فصل ۴. معادلات و نامعادلات

۱. معادله درجه دوم

۲. سهمی

۳. تعیین علامت

۱. معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

هر معادله که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم نامیده می‌شود. به طور مثال هر یک از معادلات

$2x^2-5x+1=0$ و $3x^2-7=0$ و $x^2=x$ یک معادله درجه دوم هستند.

فرم کلی یک معادله درجه **۲** بصورت $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ است که در آن a و b و c اعدادی حقیقی و $a\neq 0$ می‌باشد.

ضریب x — ضریب x^2 — ثابت (بدون x)

$if: a=0 \Rightarrow 0x^2+bx+c=0 \Rightarrow bx+c=0 \Rightarrow$ معادله درجه اول #

بنابراین شرط $a\neq 0$ برای معادله درجه دوم یک شرط حیاتی ! است.

هدف از حل معادله درجه دوم، یافتن جواب‌های آن‌هاست. جواب‌های معادله را ریشه‌های معادله می‌نامیم.

هر معادله درجه دوم حداکثر دارای ۲ ریشه است یعنی یا ۲ ریشه یا ۱ ریشه و یا اصلاً ریشه ندارد.

روش‌های حل معادله درجه دوم عبارتند از: I. روش تجزیه II. روش ریشه‌گیری III. روش مربع کامل کردن

IV. روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

– در ادامه به معرفی و تشریح این روش‌ها می‌پردازیم.

I. روش تجزیه:

خاصیت صفر: اگر حاصل‌ضرب چند مقدار برابر صفر شود آنگاه حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

اگر $A\times B=0 \Longrightarrow A=0$ یا $B=0$

$0\times x=0 \qquad x\times 0=0 \qquad 0\times 0=0$

در حل معادله درجه دوم به روش تجزیه: گام اول ← عبارت درجه دوم را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها (مربع – مزدوج – مشترک) تجزیه می‌کنیم. گام دوم ← از خاصیت صفر استفاده می‌کنیم.

مثال. معادلات درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$9x^2-16=0 \qquad 2x^2+5x=0 \qquad 4x^2-4x+1=0 \qquad x^2=x+6$

$$9x^2-16 \xlongequal{\text{مزدوج}} (3x-4)(3x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \\ \text{یا} \\ 3x+4=0 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

$$2x^2+5x=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(2x+5)=0 \begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ 2x+5=0 \rightarrow x=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$4x^2-4x+1=0 \xrightarrow{\text{مربع}} (2x-1)^2=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$x^2=x+6 \Rightarrow x^2-x-6=0 \xrightarrow{\text{مشترک}} (x-3)(x+2)=0 \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ \text{یا} \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

مثال. معادله $x^2-6x-16=0$ را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های به دست آمده را آزمایش کنید.

$$x^2-6x-16=0 \Rightarrow (x-8)(x+2)=0 \Rightarrow x=8 \text{ یا } x=-2$$

اگر $x=8 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} (8)^2-6(8)-16=0 \Rightarrow 0=0$ ✓

اگر $x=-2 \xrightarrow{\text{〃}} (-2)^2-6(-2)-16=0 \Rightarrow 0=0$ ✓

بنابراین معادله دارای ۲ ریشه است.

تمرین. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید جواب‌های خود را آزمایش کنید.

$$x^2-3x=10 \qquad\qquad 2x^2-x=0$$

II. روش ریشه‌گیری:

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2=a$ عبارت‌اند از:

$$x=+\sqrt{a} \quad \text{و} \quad x=-\sqrt{a}$$

این قاعده به "قاعده‌ی ریشه‌گیری" معروف است.

ـ توجه کنید اگر a عددی منفی باشد، معادله $x^2=a$ غیرممکن است (مربع هیچ عددی منفی نیست! $(\pm)^2=+$) و لذا معادله ریشه ندارد.

$$x^2=a \xrightarrow[a\geq 0]{\text{ریشه‌گیری}} x=\pm\sqrt{a}$$

در واقع اگر دو طرف یک تساوی یا یک طرف آن مربع کامل بود، برای به دست آوردن جواب‌ها توان ۲ را حذف می‌کنیم و در طرف دیگر تساوی $\pm\sqrt{\ }$ می‌گذاریم.

مثال. معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$$(3x-7)^2=16 \qquad 2(x-2)^2-8=0 \qquad (x-3)(x-1)-2(x-3)=4$$

$$(3x-7)^2=16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 3x-7=\pm\sqrt{16}=\pm 4 \begin{cases} 3x-7=+4 \Rightarrow 3x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{3} \\ 3x-7=-4 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$2(x-2)^2-8=0 \Rightarrow 2(x-2)^2=8 \xrightarrow{\div 2} (x-2)^2=4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} x-2=\pm 2 \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=4 \quad \text{یا} \quad x=0$$

$$(x-3)(x-1)-2(x-3)=4 \Rightarrow (x-3)(x-1-2)=4 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-3)}=4$$

$$\Rightarrow (x-3)^2=4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} x-3=\pm 2 \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$$

تمرین. معادله‌های درجه دوم زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$$3(x-2)^2-15=0 \qquad 5x^2+20=0 \qquad 2x^2-1=0$$

III. روش مربع کامل کردن:

مراحل حل یک معادله به روش مربع کامل به صورت زیر است:

۱ـ جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲ـ اگر ضریب x^2 عددی غیر از ۱ باشد، دو طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر یک شود.

۳ـ به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.

$$\text{ضریب } x \rightarrow b \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$$

۴ـ به روش ریشه‌گیری، جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

اگر دو طرف معادله مثبت نباشد، معادله ریشه ندارد.

مثال. معادله درجه دوم $x^2+3x-4=0$ را به روش مربع کامل نمودن حل کنید.

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x^2+3x=4$$

$$x \text{ ضریب}: b=3 \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} + \frac{9}{4}} \underbrace{x^2+3x+\frac{9}{4}}_{\text{مربع کامل}}=4+\frac{9}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$\xRightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x+\frac{3}{2}=\pm\frac{5}{2} \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

مثال. ریشه‌های معادله $2x^2-x=3$ را به روش مربع کامل به دست آورید.

$$2x^2-x=3 \xrightarrow{\div 2} x^2-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}$$

$$b=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} + \frac{1}{16}} \underbrace{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}_{\text{مربع کامل}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{16} \Rightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{25}{16} \begin{cases} x-\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \\ x-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{ریشه‌ها} \Rightarrow x=\frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad x=-1$$

خارج از بحث :

می دانیم که

$$-20 = -20$$

می توان نوشت :

$$16 - 36 = 25 - 45$$

به طرفین $\frac{81}{4}$ را اضافه می کنیم :

$$\underbrace{16 - 36 + \frac{81}{4}}_{} = \underbrace{25 - 45 + \frac{81}{4}}_{}$$

دو طرف مربع کامل می باشند

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

ریشه می گیریم

$$4 - \cancel{\frac{9}{2}} = 5 - \cancel{\frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 5$$

$$2 \times 2 = 5$$

اشتباه کار در کجاست ؟!

تمرین • معادله های زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

$x^2 - x + 1 = 0$ $\qquad$ $3x + x - 6 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 2x = 24$

IV . روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۰ → سمت راست معادله $\qquad$ جمله ثابت (بدون x) → c $\qquad$ x ضریب → b $\qquad$ x^2 ضریب → a

در معادله درجه **دوم** $ax^2+bx+c=0$ ، به عبارت b^2-4ac که وجود ریشه های معادله به علامت آن بستگی دارد ، مبین یا دلتای معادله می گوییم و آن را با حرف Δ نمایش می دهیم :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

بُرو دنبال چهارتا اسب سفید

در این صورت با توجه به علامت Δ داریم :

الف) اگر $\Delta > 0$ عددی مثبت باشد ، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از روابط زیر به دست می آیند

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد ، معادله دارای یک ریشه است که به آن ریشه مُضاعف (تکراری) می گوییم [در واقع ! یک ریشه داریم که دوبار تکرار شده است مثل ۵ و ۵] و ریشه مضاعف معادله برابر است با :

$$\Delta = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

ج) اگر $\Delta < 0$ عددی منفی باشد ، معادله ریشه حقیقی ندارد . [اعداد منفی ، جذر ندارند !]

این ریشه که نام او ریاضی است $\qquad$ جام کلک است و حقه بازی است

$\sqrt{\Delta}$

دلتای دلم پر از ملال است $\qquad$ زیرا که به زیر رادیکال است

تذکر. بطور خلاصه در روش کلی مقدار مبین معادله یعنی $\Delta=b^2-4ac$ را در رابطه $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ قرار می‌دهیم تا ریشه‌ها در صورت وجود به دست آیند.

مثال. معادله زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

A) $2x^2+x-6=0$

$a=2 \quad b=1 \quad c=-6 \qquad \Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(2)(-6)=1+48=49>0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{-1\pm 7}{4}\begin{cases}x=\frac{-1+7}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] x=\frac{-1-7}{4}=\frac{-8}{4}=-2\end{cases}$$

چون $\Delta>0$، معادله دو ریشه متمایز دارد.

B) $9x^2-6x+1=0$

$a=9 \quad b=-6 \quad c=1 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(9)(1)=36-36=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2(9)}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

چون $\Delta=0$، معادله یک ریشه مضاعف دارد.

C) $2x(x+3)=3x-7$

ابتدا معادله را به شکل $ax^2+bx+c=0$ می‌نویسیم و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$2x(x+3)=3x-7 \Rightarrow 2x^2+6x=3x-7 \Rightarrow 2x^2+3x+7=0$$

$a=2 \quad b=3 \quad c=7 \qquad \Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(2)(7)=9-56=-47<0$

چون $\Delta<0$، پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال. معادله زیر را به دو روش حل کنید و جواب‌ها را باهم مقایسه نمایید.

$$x^2-2x-3=0$$

روش تجزیه: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3$ یا $x=-1$

روش دلتا: $a=1 \quad b=-2 \quad c=-3 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-3)=4+12=16>0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{2\pm 4}{2}\begin{cases}3\\ -1\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که جواب‌ها از دو روش یکسانند.

تذکر. (کاربرد معادله درجه ۲ در حل مسائل)

از معادله درجه دوم در حل بسیاری از مسائل ریاضی استفاده می‌شود به این شکل که مجهول مسئله را x در نظر می‌گیریم و با توجه به صورت مسئله یک معادله برای آن می‌نویسیم و با حل آن معادله جواب به دست می‌آید. در آخر باید بازگشت به عقب! دقت باید کنیم یعنی جواب به دست آمده را در شرایط اولیه مسئله امتحان کنیم.

مثال. اختلاف سن دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

x: سن برادر کوچک‌تر $\xrightarrow{+4}$ سن برادر بزرگ‌تر: $x+4$

۴ سال دیگر $\Rightarrow (x+4)(x+8)=60 \Rightarrow x^2+8x+4x+32=60 \Rightarrow x^2+12x-28=0$

روش تجزیه $\Rightarrow (x+14)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-14 & ✗ \\ x=2 & ✓ \end{cases}$

یکی ۲ سال و دیگری ۶ سال دارد.

مثال. در یک مسابقه دوره‌ای بین تعدادی شطرنج‌باز، ۳۶ بازی انجام شده است. (در مسابقات دوره‌ای بین هر دو نفر فقط یک بازی انجام می‌شود) تعداد شطرنج‌بازان این دوره از مسابقات را به دست آورید.

فرض کنید تعداد شرکت‌کننده‌ها n نفر باشد. نفر اول با $n-1$ نفر دیگر، نفر دوم با $n-2$ نفر دیگر و ... بازی متفاوت انجام می‌دهند که بنابراین داریم:

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=36 \xrightarrow{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(n-1)\times n}{2}=36$$

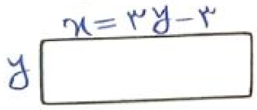
$$\Rightarrow n^2-n-72=0 \Rightarrow (n-9)(n+8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=9 & ✓ \\ \text{یا} \\ n=-8 & ✗ \end{cases}$$

تمرین. معادله‌های زیر را به روش دلتا حل کنید.

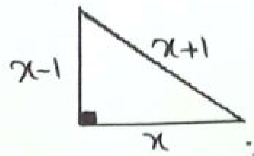
$3x^2+5x-8=0$ $\quad 2x^2+3x=1$ $\quad 5x^2-11x+6=0$ $\quad x^2+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}x$

تمرین. طول یک مستطیل از سه برابر عرض آن سه واحد کمتر است. اگر مساحت این مستطیل برابر ۶۰ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.



تمرین. مجموع ۴ عدد زوج متوالی برابر ۸۴ است. با تشکیل معادله عدد بزرگ‌تر را به دست آورید.

تمرین. مقدار x را در مثلث قائم‌الزاویه مقابل به دست آورید و سپس مساحت آن را پیدا کنید.



تمرین. معادله درجه دومی بنویسید که ضریب x آن عددی رادیکالی باشد سپس آن را با روش کلی حل کنید.

نکته در معادله $ax^2+bx+c=0$

if: $a+b+c=0 \overset{\text{ریشه‌ها}}{\Longrightarrow} 1$ و $\frac{c}{a}$

if: $b=a+c \overset{''}{\Longrightarrow} -1$ و $\frac{-c}{a}$

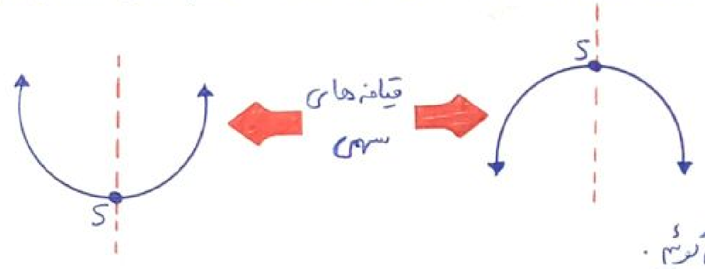
مثال $x^2-3x+2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} 1$ و $\frac{2}{1}=2$

$2x^2+3x+1=0 \xrightarrow{b=a+c} -1$ و $-\frac{1}{2}$

۲. سهمی $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ یا $y=ax^2+bx+c$

مسیر حرکت بعضی از اشیا مانند آونگ، یک خط راست نیست و شکلی شبیه منحنی ◡ دارد. این مسیر توسط معادله درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ ایجاد می‌شود.

نمودار هر معادله به صورت $y=ax^2+bx+c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت زیر است:



- به نقطه S، رأس سهمی می‌گوییم.
- اگر $a>0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالاست و سهمی دارای پایین‌ترین نقطه (یا مینیمم min) و اگر $a<0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین است و سهمی دارای بالاترین نقطه (یا ماکسیمم Max) می‌باشد که در هر صورت به این نقاط، رأس سهمی می‌گوییم.
- خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن یا محور تقارن سهمی نامیده می‌شود. $x=?$

انواع معادله سهمی و روش رسم نمودار آن‌ها:

معادله سهمی معمولاً به یکی از دو صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ یا $y=ax^2+bx+c$ بیان می‌شود که اولی را سهمی در فرم مربعی و دومی را سهمی در شکل کلی می‌نامیم.

1. سهمی در فرم مربع کامل $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

- نقطه $S(\alpha,\beta)$ رأس این سهمی است.

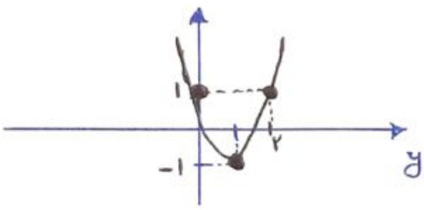
  قرینه عدد داخل پرانتز (α) — عدد بیرون پرانتز (β)

- خط $x=\alpha$، خط تقارن سهمی است.
- اگر $a>0$ سهمی در شکل چاله (دهانه رو به بالا) و اگر $a<0$ سهمی در شکل تپه (دهانه رو به پایین) خواهد بود.
- برای رسم سهمی در فرم مربع کامل ابتدا مختصات رأس $S(\alpha,\beta)$ را مشخص می‌کنیم سپس دو نقطه با فاصله یکسان نسبت به طول رأس (یعنی α) را مشخص می‌کنیم. [مزیت این نقاط در این است که عرضشان همواره با هم برابر است.] نقاط مشخص‌شده را به صورت یک منحنی به یکدیگر وصل می‌کنیم. به این روش، **روش ۳ نقطه** برای رسم سهمی می‌گوییم.

x		α	
y		β	

مثال. نمودار سهمی $y=2(x-1)^2-1$ را رسم کنید. مختصات رأس و خط تقارن را مشخص نمایید.

چون $a=2>0$ پس دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود و در واقع باید سهمی به صورت ∪ باشد. نقطه $S(1,-1)$ رأس این سهمی است و $x=1$ خط تقارن است.



x	0	1	2
y	1	-1	1

$y=2(0-1)^2-1=1$

$y=2(2-1)^2-1=1$

تمرین. نمودار سهمی به معادله $y=-(x+2)^2+3$ را رسم کنید.

2. سهمی در شکل کلی $y=ax^2+bx+c$

ابتدا مقدار $x_0=-\frac{b}{2a}$ را یافته و درون معادله قرار می‌دهیم تا نقطه رأس $S(x_0,y_0)$ به دست آید. حال دو نقطه کمکی در طرفین x_0 در نظر گرفته و با جایگذاری در معادله مقدار y آن‌ها را می‌یابیم سپس نقاط را در دستگاه مختصات به صورت یک منحنی (و با توجه به علامت a) به هم وصل می‌کنیم.

x		x_0	
y		y_0	

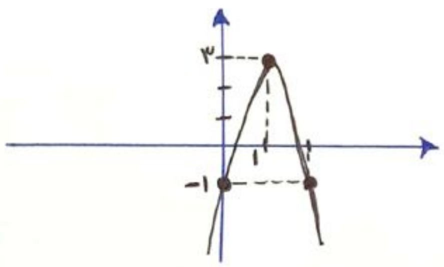
— خط به معادله $x=-\frac{b}{2a}$، خط تقارن سهمی است.

مثال. مختصات رأس و معادله محور تقارن سهمی $y=-2x^2+4x+1$ را بیابید سپس نمودار آن را رسم کنید.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(-2)}=1 \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{x=1} y=-2(1)^2+4(1)+1=-2+4+1=3$$

مختصات رأس $\Leftarrow S(1,3)$ محور تقارن: $x=1$

$a=-2<0 \rightarrow$ ∩



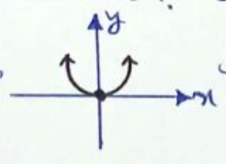
x	0	1	2
y	-1	3	-1

تمرین. نمودار سهمی به معادلات $y=x-x^2$ و $y=x^2-4x$ را رسم کنید.

تذکر.

1. می‌توان رأس سهمی را از $S\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ به دست آورد که در آن $\Delta=b^2-4ac$.

2. $y=x^2$ ساده‌ترین سهمی است که قیافه آن به صورت



می‌باشد. در واقع:

$y=(x-0)^2+0$ یا $y=x^2+0x+0$

۳. با مربع سازی می‌توان $y=ax^2+bx+c$ را به فرم $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ تبدیل کرد. مثلاً

$$y=x^2-4x+\underbrace{5=x^2-4x+4}_{5=4+1}+1=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1$$

۴. با داشتن نقاطی از یک سهمی می‌توان معادله آن را به شکل $y=ax^2+bx+c$ نوشت. کافی است طول و عرض نقاط را در این معادله جاگذاری کنیم.

مثال. نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقاط به طول ۳ و ۱ قطع کرده است. معادله سهمی و معادله محور تقارن آن را بنویسید.

این سهمی از نقاط $(0,3)$، $(3,0)$ و $(1,0)$ می‌گذرد. بنابراین مختصات این ۳ نقطه در معادله سهمی صدق می‌کند.

روی سهمی قرار دارد $(0,3)$ $\xrightarrow[y=3]{x=0}$ $a(0)^2+b(0)+c=3 \Rightarrow c=3$ $y=ax^2+bx+3$

" " " " $(3,0)$ $\xrightarrow[y=0]{x=3}$ $a(3)^2+b(3)+3=0 \Rightarrow 9a+3b=-3 \xrightarrow{\div 3} \boxed{3a+b=-1}$ (1)

" " " " $(1,0)$ $\xrightarrow[y=0]{x=1}$ $a(1)^2+b(1)+3=0 \Rightarrow \boxed{a+b=-3}$ (2)

از (1) و (2) $\Rightarrow \begin{cases}3a+b=-1\\ a+b=-3\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=1$ و $b=-4$

معادله سهمی: $y=ax^2+bx+c=1x^2-4x+3=x^2-4x+3$

محور تقارن: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(1)}=2 \Rightarrow x=2$

مثال. اگر $S(-1,2)$ رأس سهمی $y=ax^2+bx$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

روی سهمی قرار دارد $(-1,2)$ $\xrightarrow[y=2]{x=-1}$ $a(-1)^2+b(-1)=2 \Rightarrow \boxed{a-b=2}$ (1)

$x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow$ طول رأس $=-1=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \boxed{b=2a}$ (2)

رابطه (2) را در رابطه (1) قرار می‌دهیم:

$$a-b=2 \xrightarrow[\text{جاگذاری}]{b=2a} a-(2a)=2 \Rightarrow -a=2 \Rightarrow a=-2$$

$$b=2a=2(-2)=-4 \Rightarrow b=-4$$

تمرین. سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. اگر این سهمی از نقاط $A(1,-2)$ و $B(2,-3)$ بگذرد و محور عرض‌ها را در ۱ قطع کند، مطلوب است:

۱. مقادیر a و b و c را به دست آورید.

۲. معادله سهمی را بیابید.

۳. معادله تقارن سهمی را مشخص کنید.

۴. مختصات رأس این سهمی را پیدا کنید.

۵. نمودار سهمی را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۳. تعیین علامت

1. تعیین علامت عبارات درجه اول   2. تعیین علامت عبارات درجه دوم   3. نامعادله‌ها   4. نامعادله‌ها قدر مطلق

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد. به عنوان مثال دامنه توابع رادیکالی را به کمک تعیین علامت می‌توان پیدا کرد. [تابع و دامنه موضوع فصل پنجم کتاب درسی است!]

1. تعیین علامت عبارات درجه اول

$$P=ax+b$$

ابتدا عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا ریشه آن را به دست آوریم سپس یک جدول دو سطری مانند زیر رسم می‌کنیم که سطر اول این جدول تغییرات x را روی محور xها (از $-\infty$ تا $+\infty$) نمایش می‌دهد و سطر دوم آن وضعیت علامت $P=ax+b$ را مشخص می‌کند.

$$P=0 \Rightarrow ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$ ریشه

x	$-\infty$	ریشه	$+\infty$
$P=ax+b$	مخالف علامت a	●	موافق علامت a

← بیشتر از ریشه موافق علامت a (یعنی ضریب x)

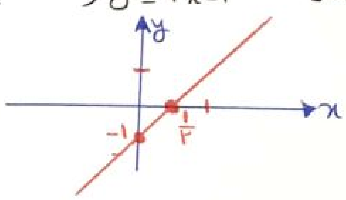
← کمتر از ریشه مخالف علامت a (یعنی ضریب x)

مثال. عبارت‌های $y=2x-1$ و $y=1-2x$ را تعیین علامت کنید.

$y=2x-1$

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	$-$	●	$+$

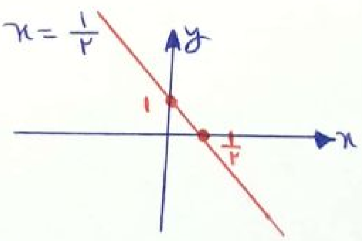


از روی نمودار واضح است که برای $x>\frac{1}{2}$ نمودار بالای محور طول‌هاست (یعنی +) و برای $x<\frac{1}{2}$ نمودار پایین محور طول‌ها واقع شده است (یعنی −)، همچنین نمودار در نقطه $x=\frac{1}{2}$ با محور xها قرار ملاقات گذاشته است (یعنی صفر یا ریشه)

$y=1-2x$

$$1-2x=0 \Rightarrow 1=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x		$\frac{1}{2}$	
$1-2x$	$+$	●	$-$



برای $x>\frac{1}{2}$ علامت منفی است و برای $x<\frac{1}{2}$ علامت مثبت است. (برعکس قبلی اتفاق افتاده است)

مثال. هر یک از عبارت‌های $A=(-x+4)(x+1)$ و $B=\frac{x+2}{4-3x}$ را تعیین علامت کنید.

برای A: ابتدا ریشه‌های عبارت‌های داخل پرانتز را به دست می‌آوریم و این ریشه‌ها را در سطر اول جدول تعیین علامت از کوچک به بزرگ (صعودی) می‌نویسیم.

برای B: ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج کسر را 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .

$$A=(-x+4)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} -x+4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

برای هرکدام از عبارت های یک سطر در نظر می‌گیریم و در آن سطر، تعیین علامت را انجام می‌دهیم و سطر آخر جدول را به کل عبارت A اختصاص می‌دهیم به این ترتیب که علامت های خانه های هرستون را در هم ضرب کرده و علامت حاصل را در جلوی سطر A قرار می‌دهیم.

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$-x+4$	$+$		$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
A	$-$		$+$		$-$

یعنی A در بازهٔ $(-1, 4)$ همواره مثبت و در بازه‌های $(4, +\infty)$ و $(-\infty, -1)$ همواره منفی است.

$$B=\frac{x+2}{4-3x} \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ 4-3x=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

توجه کنید که مقدار B به ازای ریشهٔ صورت، صفر می‌شود ولی به ازای ریشهٔ مخرج (در اینجا $\frac{4}{3}$) تعریف نمی‌شود (مقدار ندارد!)

ت ← تعریف نشده

x	$-\infty$	-2		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$4-3x$	$+$		$+$	0	$-$
B	$-$		$+$	ت	$-$

یعنی B در بازهٔ $(-2, \frac{4}{3})$ علامتش $+$ و در بازه‌های $(\frac{4}{3}, +\infty)$ و $(-\infty, -2)$ علامت $-$ دارد. هم‌چنین این عبارت به ازای $x=\frac{4}{3}$ مقدار ندارد و لذا تعریف نشده است.

تمرین. عبارات $P=x^3(3-x)$ و $Q=x^2(2x+1)^2$ و $Z=\frac{x+1}{-2x+6}$ را تعیین علامت کنید.

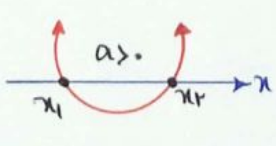
2. تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم

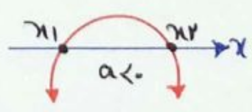
$$P(x)=ax^2+bx+c$$

$\Delta=b^2-4ac$ معادله: $P(x)=ax^2+bx+c=0$

- اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای ۲ ریشهٔ متمایز x_1 و x_2 است (فرض می‌کنیم $x_1<x_2$ باشد) و جدول تعیین علامت و نمودار آن به صورت زیر در می‌آید:

x		x_1		x_2	
$P(x)$	موافق a	0	مخالف a	0	موافق a

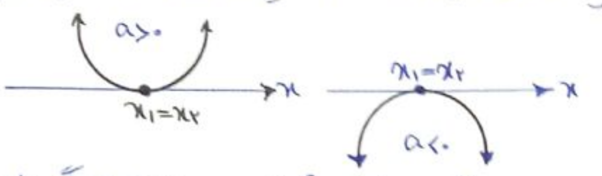




بین دو ریشه مخالف a هستیم، خارج ریشه ها موافق a هستیم.

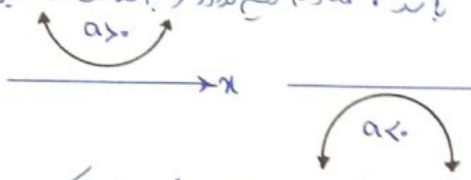
- اگر $\Delta = 0$ باشد ، معادله ریشه مضاعف دارد $x_1 = x_2$. در اینصورت قبل و بعد از ریشه با a موافقت می‌کند:

x		$-\frac{b}{2a}$	
$P(x)$	موافق a	●	موافق a



- اگر $\Delta < 0$ باشد ، معادله ریشه ندارد و به علامت a بستگی دارد (با a موافق می‌شویم !)

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	موافق a



تذکر. منظور از تعیین علامت یک سهمی آن است که تعیین کنیم سهمی در چه بازه‌هایی زیر محور xها و در چه بازه‌هایی بالای محور xها قرار می‌گیرد. به همین دلیل ساده ، برای تعیین علامت آن ، همانند تعیین علامت چند جمله‌ای های درجه دوم عمل می‌کنیم.

مثال. با رسم سهمی $y=-x^2+4x$ آن را تعیین علامت کنید. (با جدول تعیین علامت مقایسه کنید!)

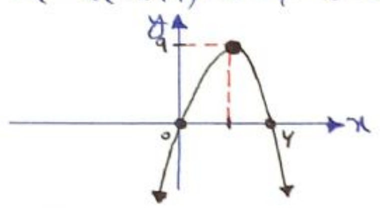
$y=-x^2+4x \rightarrow a=-1 \quad b=4 \quad c=0$

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(-1)}=3 \rightarrow y=-(2)^2+4(2)=9$

رأس سهمی $S(3,9)$

$y=0 \Rightarrow -x^2+4x=0 \Rightarrow x(-x+4)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=4$ محل برخورد با xها (ریشه‌ها)

x	0	3	4
y	0	9	0



با توجه به نمودار ، اگر $x<0$ یا $x>4$ آنگاه سهمی پایین محور طول‌ها است یعنی $y<0$. و اگر $0<x<4$ آنگاه سهمی بالای محور xها است یعنی $y>0$ می‌باشد. جدول تعیین علامت زیر نیز گویای همین مطلب است. [در واقع جدول اجرای نرم افزاری است و نمودار اجرای سخت افزاری، که یکدیگر را تأیید می‌کنند. جالب نیست؟!]

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$-x^2+4x$		−	●	+	●	−	

مثال. عبارت $P=\frac{-x^2-1}{x^2+x-12}$ را تعیین علامت کنید.

ریشه‌های صورت : $-x^2-1=0 \Rightarrow x^2=-1$ ✗ معادله ریشه ندارد ← همواره منفی

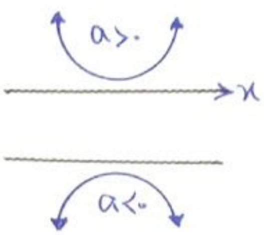
ریشه‌های مخرج : $x^2+x-12=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow x=-4 , x=3$

x		-4		3	
$-x^2-1$	−		−		−
x^2+x-12	+	●	−	●	+
P	−	ت	+	ت	−

تمرین. عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$P=\frac{x^2-1}{4-3x} \qquad Q=(x-1)^2(x+1)(2-3x)$$

تمرین. با رسم سهمی $y=(x-1)(x+2)$، آن را تعیین علامت کنید و صحت علامت های به دست آمده را با جدول بررسی کنید.



تذکر: شرط اینکه عبارت درجه دوم ax^2+bx+c :

الف) همواره مثبت باشد آن است که $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

ب) همواره منفی باشد آن است که $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

3. نامعادله

$\leqslant$ ، $<$ ، $\geqslant$ ، $>$

$$P(x)\leqslant Q(x)$$

منظور از حل یک نامعادله، یافتن بازه یا بازه هایی است که به ازای هر x واقع در این بازه یا بازه ها نامعادله برقرار باشد.

– وقتی طرفین یک نامساوی را در عدد غیرصفری ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم؛ اگر آن عدد مثبت باشد، جهت نامساوی عوض نمی‌شود ولی اگر آن عدد منفی باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود.

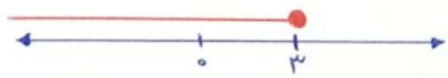
مثال. نامعادلهٔ $2x-3\geqslant 5x+6$ را حل کنید.

$$2x-3\geqslant 5x+6$$

$$2x-5x\geqslant 6+3$$

$$-3x\geqslant 9$$

$$\xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\div(-3)} \quad x\leqslant 3$$



$(-\infty,3]$

تذکر: برای به دست آوردن مجموعه جواب نامعادله های یک دستگاه، ابتدا هر یک از آن ها را به تنهایی حل نموده و در نهایت بین مجموعه جواب های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مثال. دستگاه نامعادله $-2<3x-1\leqslant 8$ را حل کنید.

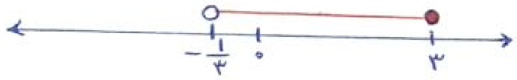
نامعادله های همزمان $3x-1\leqslant 8$ و $-2<3x-1$ را به صورت دستگاه نوشته و آن را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x-1\leqslant 8 \\ 3x-1\geqslant 2 \end{cases}$$

$$3x-1\leqslant 8 \xrightarrow{+1} 3x\leqslant 9 \xrightarrow{\div 3} x\leqslant 3 \qquad (1)$$

$$3x-1>-2 \xrightarrow{+1} 3x>-1 \xrightarrow{\div 3} x>\frac{-1}{3} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) $\xrightarrow{\cap}$ $-\frac{1}{3} < x \leq 3$ یا $(-\frac{1}{3}, 3]$



مثال. مجموعه جواب نامعادله زیر را به شکل بازه بنویسید.

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2-1) = 0 \rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 < 0 \rightarrow$ ریشه ندارد $\xrightarrow{a>0}$ همواره مثبت

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+2	$+$		$+$		$+$		$+$
کل عبارت	$-$		$+$		$-$		$+$

باتوجه به جدول، عبارت در هریک از بازه‌های

$(-\infty, -1]$ و $[0, 1]$

کوچک‌تر یا مساوی صفر است پس مجموعه جواب عبارت است از:

$(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

تمرین. نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} \geq 0 \qquad\qquad 2x^2 - 5x < -3$$

مثال. چند عدد صحیح می‌توان یافت که در نامعادله $x^2 - x - 6 < 0$ صدق کند؟

عبارت را تعیین علامت می‌کنیم، مجموعه جواب در بازه‌ی کوچک‌تر از صفر (یعنی منفی) اتفاق می‌افتد؟

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3, -2$

x		-2		3	
x^2-x-6	$+$	0	$-$	0	$+$

اعداد صحیح بازه‌ی $(-2, 3)$ جواب مسأله است یعنی:

$-1, 0, 1, 2$

مثال. برای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^2 + 3x + m$ همواره مثبت است؟ (یعنی بالای محور xها قرار می‌گیرد)

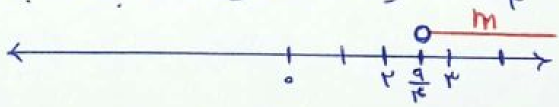
می‌دانیم اگر سهمی بالای محور xها باشد آنگاه $a > 0$ و $\Delta < 0$ است.

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = m$

$a = 1 > 0 \qquad\qquad \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(m) < 0$

$\Rightarrow 9 - 4m < 0 \Rightarrow -4m < -9 \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\div(-4)} m > \frac{9}{4}$

پس اگر m در بازه‌ی $(\frac{9}{4}, +\infty)$ قرار گیرد، عبارت فوق همواره مثبت خواهد بود.



مثال: به ازای چه مقادیری از m سهمی $y=mx^2+(m+1)x+m$ همواره پایین محور xها قرار می‌گیرد؟

باید $a<0$ و $\Delta<0$ باشد:

$a=m \qquad b=m+1 \qquad c=m$

(1) $a=m<0$

(2) $\Delta=b^2-4ac=(m+1)^2-4(m)(m)<0 \Rightarrow -3m^2+2m+1<0$

عبارت $P=-3m^2+2m+1$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$-3m^2+2m+1=0 \xrightarrow[\text{مجموع ضرائب صفر است}]{a+b+c=0} m=1$ یا $m=\frac{c}{a}=\frac{-1}{3}$

m		$\frac{-1}{3}$		1	
P	$-$	•	$+$	•	$-$

$\xrightarrow{P<0} m<\frac{-1}{3}$ یا $m>1$

$\xrightarrow[\cap]{\text{از (1) و (2)}} \quad (-\infty, \frac{-1}{3})$

تمرین: به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y=mx^2-mx-1$ همواره پایین محور طول‌هاست؟

تمرین: به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشهٔ حقیقی است؟

4. نامعادلهٔ قدر مطلق

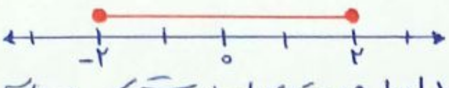
$|A|\leq b \qquad |A|\geq b$

قدر مطلق (ارزش واقعی هر عدد) x که آن را با نماد $|x|$ نمایش می‌دهیم، همان فاصلهٔ x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$|x|=|-x|$ ، $|x|<a \xrightarrow{a>0} -a<x<a$ ، $|x|>a \rightarrow x>a$ یا $x<-a$

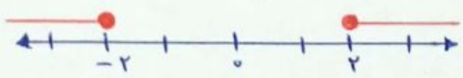
مثال: مجموعه جواب نامعادله $|x|\leq 2$ شامل تمام اعداد حقیقی است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد یعنی $-2\leq x\leq 2$



$[-2,2]$

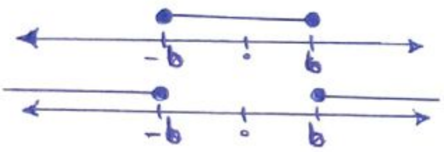
همچنین مجموعه جواب نامعادله $|x|\geq 2$ شامل تمام اعدادی است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد یعنی

$x\geq 2$ یا $x\leq 2$



$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

تذکر. فرض کنید b یک عدد حقیقی مثبت و A یک عبارت جبری باشد در این صورت



۱. اگر $|A| \leq b$ آنگاه $-b \leq A \leq b$

۲. اگر $|A| \geq b$ آنگاه $A \geq b$ یا $A \leq -b$

مثال. مجموعه جواب نامعادله $|2x-3| \leq 1$ را به صورت بازه نوشته و سپس آن را روی محور نمایش دهید.

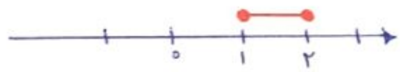
با استفاده از رابطه $|A| \leq b \iff -b \leq A \leq b$ داریم:

$$|2x-3| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq 2x-3 \leq 1$$

$$\xRightarrow{+3} 2 \leq 2x \leq 4$$

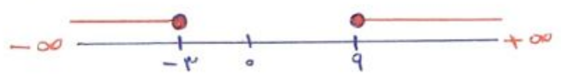
$$\xRightarrow{\div 2} 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [1,2]$$



مثال. مجموعه جواب نامعادله قدرمطلق $\left|\frac{x-1}{2} - 1\right| \geq 3$ را به دست آورید.

با استفاده از رابطه $|A| \geq b \iff A \geq b$ یا $A \leq -b$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \\ \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \end{cases} \xRightarrow{\times 2} \begin{cases} x-1-2 \geq 6 \\ x-1-2 \leq -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 6 \\ x-3 \leq -6 \end{cases} \xRightarrow{+3} \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq -3 \end{cases}$$



مجموعه جواب $= (-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$

تمرین. مجموعه جواب نامعادله‌های قدرمطلق زیر را به شکل بازه بنویسید.

$$\left|\frac{x}{3}+1\right| < \frac{2}{3} \qquad\qquad |7-2x| \leq 1$$