فصل ۷. آمار و احتمال

۱. احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۲. مقدمه‌ای بر علم آمار

۳. متغیر و انواع آن

۱. احتمال یا اندازه‌گیری شانس Probability

جملاتی از قبیل احتمال می‌رود، ممکن است، حدس می‌زنم، اگر شانس یار باشد، خیال می‌کنم، به گمانم، شاید و مانند آن‌ها را بارها شنیده و به کار برده‌ایم. وجه مشترک تمام این جملات، عدم یقین، بی اطلاعی، شک و تردید می‌باشد. بشر از دیرباز، مشتاق به اندازه‌گیری این عدم یقین بوده و هست و نظریه احتمال درهمین راستا ابداع شده است. شاید عطش سیری ناپذیر افراد برای قمار بود که موجب پیشرفت نظریه احتمالات در مراحل اولیه آن گردید. قماربازان به منظور بالابردن میزان برد خود، از ریاضی‌دان‌ها برای تعیین مناسب‌ترین استراتژی در بازی‌های تابع شانس کمک می‌گرفتند. بعضی از ریاضی‌دان‌ها که در این دوره پاسخ این سؤالات را پیدا می‌کردند عبارت بودند از: پاسکال، لایب نیتز، فرما، و جیمز برنولی.

ما در عصر احتمال به سر می‌بریم

در عصر شک و شاید

در عصر قاطعیت تردید

عصری که هیچ اصلی

جز اصل احتمال یقینی نیست ...!!!

قبل از تعریف رسمی احتمال، به چند تعریف اولیه نیاز داریم:

- پدیده‌های تصادفی: Experiment

یک آزمایش را تصادفی گوییم هرگاه نتیجه آن قبل از انجام آزمایش قابل پیش بینی نباشد.

درواقع علت هایی که موجب نتیجه این آزمایش می‌باشند یا تعدادشان زیاد است و یا قابل بررسی نیستند که بتوان نتیجه آن‌ها را با قاطعیت پیش بینی کرد.

- هریک از نتیجه‌های یک آزمایش تصادفی را یک پیشامد ساده می‌نامیم.

- فضای نمونه‌ای: Sample Space

مجموعه تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آن آزمایش می‌نامیم. فضای نمونه‌ای را با S نشان می‌دهیم.

هم چنین تعداد عضوهای فضای نمونه را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در پرتاب یک تاس S ، فضای نمونه‌ای و تعداد عضوهای آن به صورت زیر است:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad n(S)=6$$

◀ فضاهای نمونه‌ای مهم عبارتند از:

جنسیت فرزندان	$n(S)=2^n$
پرتاب n سکه	$n(S)=2^n$
پرتاب n تاس	$n(S)=6^n$
پرتاب تاس و سکه با هم	$n(S)=2\times6=12$
پرتاب m تاس و n سکه	$n(S)=6^m\times2^n$
انتخاب ۲ تایی	$n(S)=\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}$

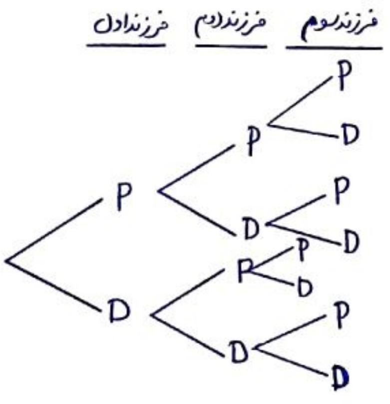
◀ پیشامد : Event

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با حروف A ، B ، C و ... نشان می‌دهیم.

- اگر فضای نمونه S دارای n عضو باشد آنگاه 2^n زیرمجموعه یعنی 2^n پیشامد دارد.
- می‌دانیم $\emptyset \subseteq S$ پس $\emptyset$ یک پیشامد از فضای نمونه S است که آن را پیشامد نشدنی (غیرممکن یا محال) می‌نامیم.
- می‌دانیم $S \subseteq S$ بنابراین S یک پیشامد از فضای نمونه S است که آن را پیشامد قطعی (حتمی یا شدنی) می‌نامیم.
- درواقع اگر پیشامدی شامل هیچ عضوی نباشد آن را پیشامد نشدنی و پیشامدی که شامل اعضای فضای نمونه S باشد را پیشامد قطعی می‌نامیم. به عنوان مثال: در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد رو شدن عدد منفی باشد آنگاه $A=\emptyset$ ، پس A یک پیشامد غیرممکن است. هم چنین اگر B پیشامد رو شدن عدد طبیعی کمتر از ۷ باشد آنگاه $B=S$ و درنتیجه B یک پیشامد قطعی است.
- تعداد اعضای پیشامدهای A و B و C و ... را با $n(A)$ ، $n(B)$ ، $n(C)$ و ... نمایش می‌دهیم.

مثال. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. مطلوب است:

- فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده
- پیشامد A که در آن فقط جنسیت فرزندان اول و سوم یکسان باشد.
- پیشامد B که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.



P: پسر   D: دختر

$$S=\{PPP, PPD, PDD, PDP, DPP, DPD, DDP, DDD\}$$

$$n(S)=2^3=8 \qquad \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 2\ }$$

پیشامد A شامل عضوهایی از S است که فرزندان اول و سوم هردو دختر یا هردو پسر باشند:

$A=\{DPD ، PDP\} \rightarrow n(A)=2$

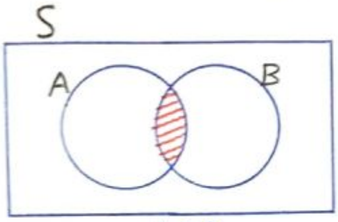
$B=\{PDD ، DDP ، DPD ، DDD\} \rightarrow n(B)=4$

تمرین. دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. پیشامد های زیر را مشخص کنید.

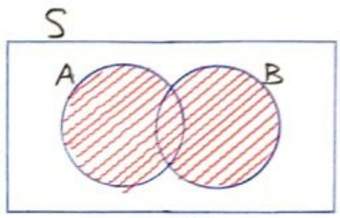
- اعداد رو شده از دو تاس باهم برابر باشند.
- حاصل‌ضرب اعداد ظاهر شده کمتر از ۴ باشد.
- حاصل‌ضرب اعداد رو شده کمتر از ۳۷ باشد.
- مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد.
- مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۱۳ باشد.

عملیات روی پیشامدها:

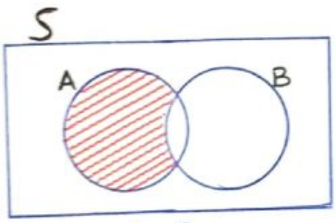
پیشامدها از همین مجموعه اند پس می‌توان برای آن‌ها عملیات مجموعه‌ای مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم تعریف کرد.



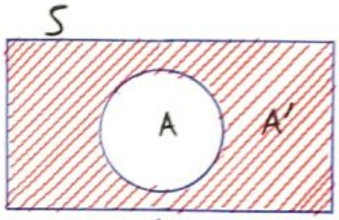
$A \cap B$



$A \cup B$



$A-B$



$A'=S-A$

- اجتماع دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B رخ دهند. به عبارت دیگر اگر حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد پیشامد $A \cup B$ رخ می‌دهد.
- اشتراک دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. به عبارت دیگر $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.
- تفاضل دو پیشامد A و B یعنی $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. (فقط A)
- متمم یک پیشامد که آن را با A' (یا Complement A^c) نمایش می‌دهیم وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه S را تشکیل می‌دهند:

$$A'=S-A \qquad A \cup A'=S \qquad A \cap A'=\varnothing$$

$$n(A')=n(S)-n(A)$$

مثال. تاس را پرتاب می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضای مشخص کنید.

- پیشامد اینکه عدد رو شده زوج **و** اول باشد.
- زوج **یا** اول باشد.
- زوج باشد ولی اول نباشد.
- عدد رو شده اول نباشد.

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$ فضای نمونه

$A=\{2,4,6\}$ پیشامد زوج بودن

$B=\{2,3,5\}$ پیشامد اول بودن

$$A\cap B=\{2\}$$

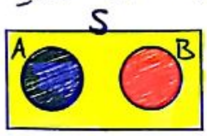
$$A\cup B=\{2,4,6,3,5\}$$

$$A-B=\{4,6\}$$

$$B'=S-B=\{1,4,6\}$$

پیشامدهای ناسازگار:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند که $A\cap B=\varnothing$، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌نامیم.



- در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی‌دهند.

$$A-B=A,\quad B-A=B \Rightarrow A\cap B=\varnothing$$

- پیشامد تصادفی A و متمم آن یعنی A' دو پیشامد ناسازگار هستند زیرا:

$$A\cap A'=\varnothing$$

مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

مثال. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. اگر A پیشامد هم‌جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود فقط یک فرزند پسر در این خانواده باشد

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامدهای A و B را مشخص کنید.

ب) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ چرا؟

$$S=\{PPP, PPD, PDD, PDP, DPP, DPD, DDP, DDD\}$$

$$A=\{PPP, PPD, DDP, DDD\}$$

$$B=\{PDD, DPD, DDP\}$$

$$A\cap B=\{DDP\}$$

چون $A\cap B\neq\varnothing$ پس A و B با هم سازگارند.

تمرین. اگر A و B و C، سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، پیشامدهای زیر را روی نمودار ون مشخص کنید.

$(A\cap B)-C$

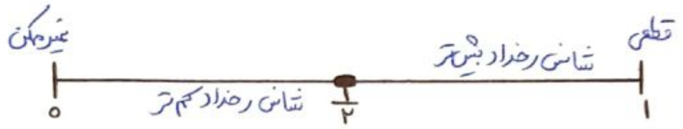
$A-(B\cup C)$

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

اگر S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و A یک پیشامد در این فضا باشد $(A \subseteq S)$ احتمال وقوع پیشامد A یعنی $P(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

$P(A)$ عددی حقیقی است که $0 \leq P(A) \leq 1$ می‌باشد و هرچه $P(A)$ به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد بیش‌تر و هرچه به عدد صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد آن کم‌تر است.



$P(\varnothing) = 0$ $\qquad$ $P(S) = 1$

- در مسائل مربوط به احتمال، تا کلمه‌ی احتمال، حالات مخرج کسر را نشان می‌دهد و از کلمه‌ی احتمال به بعد حالات مطلوب یعنی صورت کسر احتمال ساخته می‌شود.

تذکر: برای تعیین احتمال وقوع یک پیشامد دلخواه مانند A، باید فرآیند زیر را انجام دهیم:

۱. فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی مورد نظر و تعداد اعضای آن را مشخص می‌کنیم. همان طور که از فرمول معلوم است تعداد اعضای فضای نمونه برای ما مهم است، بنابراین به روش‌ها و تکنیک‌های شمارش نیاز داریم.

۲. پیشامدی را که مورد نظر مسئله است مشخص و تعداد اعضای آن را تعیین می‌کنیم.

۳. از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ احتمال رخداد پیشامد مطلوب را به دست می‌آوریم.

تعداد اعضای فضای نمونه = مخرج کسر

تعداد اعضای پیشامد مطلوب = صورت کسر

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن که:

- هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند. $\qquad$ - دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشند.

فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ مهره از ۹ مهره‌ی جعبه می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$$

A: هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند ← هر سه قرمز یا هر سه آبی

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6} \simeq 16/7\ \%$$

B: دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشند

$$n(B) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14} \simeq 35/7\ \%$$

مثال. می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۳ زن یک کمیته ۳ نفری انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه حداکثر یک مرد انتخاب شود.

فضای نمونه تمام حالات انتخاب ۳ نفر از بین ۸ نفر است، بنابراین

$$n(S)=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3!}=56$$

A: حداکثر یک مرد انتخاب شود

$$n(A)=\binom{5}{1}\times\binom{3}{2}+\binom{5}{0}\times\binom{3}{3}=5\times3+1\times1=15+1=16$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}\simeq 28.6\ \%$$

مثال. ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند. ب) دو برادر در اول و آخر صف باشند. ج) دقیقاً یک نفر بین دو برادر قرار گرفته باشد.

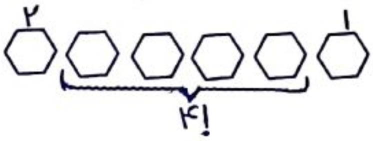
فضای نمونه عبارت است از کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار بگیرند که این تعداد حالت برابر است با:

$$n(S)=6!=720$$

← فرض کنیم A پیشامد کنار هم قرار گرفتن دو برادر باشد. ابتدا دو برادر را کنار هم قرار می‌دهیم (طناب پیچ می‌کنیم ) و ۱ نفر فرض می‌کنیم که با ۴ نفر دیگر ۵ نفر می‌شوند و به ۵! طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خود برادرها نیز به ۲! طریق می‌توانند در کنار هم جابه‌جا شوند، پس:

$$n(A)=5!\times2! \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2!\times5!}{6!}=\frac{1}{3}$$

← ۶ جایگاه به صورت زیر در نظر می‌گیریم. در جایگاه اول از سمت چپ هر یک از دو برادر می‌توانند قرار بگیرند و در جایگاه ششم برادر دیگر و ۴ جایگاه بین آن‌ها توسط ۴ نفر دیگر به ۴! طریق می‌تواند تغییر کند، لذا اگر B پیشامد مطلوب باشد آنگاه:



$$\Rightarrow n(B)=2\times4!$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2\times4!}{6!}=\frac{1}{15}$$

← فرض کنید C پیشامد مطلوب باشد. ابتدا یک نفر از ۴ نفر دیگر را به تصادف انتخاب می‌کنیم و بین دو برادر قرار می‌دهیم و این ۳ نفر را یک نفر فرض می‌کنیم که با ۳ نفر دیگر ۴ نفر می‌شوند و به ۴! طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خود برادرها نیز به ۲! طریق می‌توانند جابه‌جا شوند، لذا:

$$n(C)=\binom{4}{1}\times4!\times2!=4\times4!\times2$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4\times4!\times2!}{6!}=\frac{4}{15}$$

مثال. در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب موجود است. ۲ لامپ به تصادف و هم‌زمان خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد لامپ‌ها از یک نوع باشند؟

$$n(S)=\binom{10}{2}=\frac{10\times9}{2!}=45$$

$$n(A)=\binom{6}{2}+\binom{4}{2}=15+6=21$$

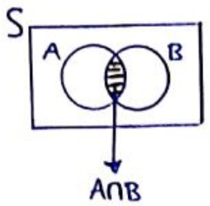
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$$

قانون جمع احتمالات

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال وقوع حداقل یکی از پیشامدهای A یا B



اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند یعنی $A\cap B=\varnothing$ ، تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(\varnothing)=۰ \Longrightarrow \boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

مثال. احتمال آنکه دانش‌آموزی در درس ریاضی قبول شود ۰/۷ ، احتمال آنکه در درس شیمی قبول شود ۰/۸۵ و احتمال آنکه در هر دو درس قبول شود ۰/۶ است. احتمال آنکه حداقل در یکی از دروس ریاضی و شیمی قبول شود چقدر است؟

ریاضی : $A \rightarrow P(A)=۰/۷$ شیمی : $B \rightarrow P(B)=۰/۸۵$ $P(\text{هر دو})=P(A\cap B)=۰/۶$

$$P(\text{قبولی در حداقل یکی})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۸۵-۰/۶=۰/۹۵$$

مثال. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $P(A)=۰/۲$ و $P(B)=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۴$. احتمال آن را محاسبه کنید که هر دو پیشامد A و B با هم اتفاق بیفتند.

می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را به دست آوریم. داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۴=۰/۲+۰/۳-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$$

مثال. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید:

$$P(A)\leqslant P(B)$$

$$A\subseteq B \Rightarrow n(A)\leqslant n(B) \xrightarrow[n(S)>۰]{\div n(S)} \frac{n(A)}{n(S)}\leqslant\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A)\leqslant P(B)$$

احتمال پیشامد متمم

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در این صورت

$$P(A) \longrightarrow \text{احتمال واقع شدن پیشامد } A$$

$$P(A') \longrightarrow A' \text{ '' '' '' ''}$$

$$A\cap A'=\varnothing \;\Rightarrow\; P(\varnothing)=0 \qquad\qquad A\cup A'=S \;\Rightarrow\; P(S)=1$$

احتمال واقع شدن + احتمال واقع نشدن = ۱

$$\Rightarrow P(A)+P(B)=1 \quad \begin{cases} \boxed{P(A)=1-P(A')} \\ \boxed{P(A')=1-P(A)} \end{cases}$$

اثبات:

$$S=A\cup A'$$

می‌دانیم

$$P(S)=P(A\cup A') \xlongequal{\text{قانون جمع احتمالات}} P(A)+P(A')-\underbrace{P(A\cap A')}_{\varnothing}$$

$$\xrightarrow[P(\varnothing)=0]{P(S)=1} 1=P(A)+P(A')$$

مثال. احتمال آنکه فردا بارانی باشد $\frac{1}{10}$ است. چقدر احتمال دارد فردا بارانی نباشد؟

$$P(A)=\frac{1}{10} \quad , \quad P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

تذکر. در مسائلی که واژه‌های "حداقل" و "حداکثر" و یا واژه‌های معادل آن‌ها به کار می‌رود، اگر تعداد حالت‌های متمم آن کم‌تر باشد، از روش متمم استفاده می‌کنیم.

مثال. اگر ۷ نفر که دو نفر آن‌ها با هم برادرند به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد دو برادر کنار یکدیگر **نباشند**؟

$$n(S)=7!$$

احتمال اینکه دو برادر کنار هم باشند برابر است با:

$$P(A)=\frac{2!\times 6!}{7!}=\frac{2}{7}$$

بنابراین، بنابر قانون احتمال پیشامد متمم داریم:

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

مثال: یک عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۷ به وجود می‌آید. مطلوب است احتمال آن که دو رقم فرد کنار هم نباشند؟

$n(S) = 5!$ تمام جابه‌جایی‌های ۵ عدد

فرض کنید A پیشامدی شامل تمام اعداد ۵ رقمی از بین اعضای S باشد که دو رقم فرد کنار هم نباشند، بنابراین A' شامل تمام اعداد ۵ رقمی است که دو رقم ۱ و ۷ کنار هم باشند (دو رقم فرد را به عنوان یک رقم در نظر می‌گیریم) پس:

$$n(A') = 4! \times 2! \quad \rightarrow \quad P(A') = \frac{4! \times 2!}{5!} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

مثال: ۳ دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل ۲ نفر آن‌ها یکسان است؟

اگر A پیشامد یکسان بودن ماه تولد حداقل ۲ نفر از ۳ نفر باشد آنگاه A' پیشامدی است که ماه تولد هیچ دو نفری از ۳ نفر یکسان نیست لذا:

$$n(S) = \underline{12} \times \underline{12} \times \underline{12}$$

$$n(A') = \underline{12} \times \underline{11} \times \underline{10}$$

$$P(A') = \frac{\cancel{12} \times 11 \times 10}{\cancel{12} \times 12 \times 12} = \frac{110}{144} = \frac{55}{72} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{55}{72} = \frac{17}{72}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A') + P(B') = 1.2$، آنگاه $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

$$P(A') + P(B') = (1 - P(A)) + (1 - P(B)) = 1.2 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0.8$$

A و B ناسازگارند $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.8$

تمرینات:

۱. از بین ۳ داوطلب گروه ریاضی، ۴ داوطلب گروه تجربی و ۲ داوطلب گروه انسانی، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه از هر گروه دقیقاً یک نفر انتخاب شده باشد چقدر است؟

۲. از ظرفی که شامل ۷ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم. احتمال آنکه حداقل ۱ سیب سالم باشد چقدر است؟

۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوری که $P(A') = 0.3$ و $P(B) = 0.6$ و $P(A \cap B) = 0.4$. مقدار $P(A \cup B)$ را بیابید.

۴. از بین ۴ دانش‌آموز سال دوم و ۵ دانش‌آموز سال سوم، ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که از هر دو گروه انتخاب شده باشند را به دست آورید.

۵. یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم. چقدر احتمال دارد سکه "پشت" یا تاس ۴ بیاید؟

۲. مقدمه‌ای بر علم آمار + ۳. متغیر و انواع آن

آمار، هنر پرورش داده‌هاست.

آمار: به مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات آمار می‌گوییم.

علم آمار: مجموعه روش‌هایی که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازمان‌دهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود را علم آمار می‌گویند.

- کلمه آمار در زبان انگلیسی statistics است که از لحاظ تاریخی، از کلمه لاتین status مشتق شده و یکی از معانی آن، state دولت است.
- آمار هدف نیست، نه آغاز است و نه پایان. بلکه ابزار و وسیله‌ای است برای پاسخ دادن به سؤالات تحقیق.

جامعه آماری (جمعیت population): مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، جامعه نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامند.

- جامعه آماری، گروهی از افراد، اشیا یا حوادث‌اند که حداقل در یک ویژگی یا صفت مشترک هستند.
- تعداد اعضای جامعه را اندازه یا حجم جامعه می‌نامیم و با N نمایش می‌دهیم.
- جامعه آماری ممکن است محدود (حجم جامعه قابل شمارش) و یا نامحدود (حجم جامعه غیرقابل شمارش) باشد.

در اینجا فقط در مورد جامعه‌های محدود که تعداد اعضای آن مشخص می‌باشد بحث می‌کنیم. مثل: تعداد دانش‌آموزان یک کلاس

نمونه Sample: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب می‌شود، نمونه می‌گویند و هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده را عضو نمونه می‌نامیم.

- نمونه گروهی از جامعه است که طبق شرایط مشخصی انتخاب شده‌اند تا نماینگر خصوصیات جامعه باشند.
- نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است. در واقع چون حجم جامعه تحقیق بسیار بزرگ است، اندازه‌گیری ویژگی مورد پژوهش برای تک‌تک افراد یا عناصر جامعه آماری غیرممکن است، از طرفی نمونه‌گیری باعث صرفه‌جویی در زمان و هزینه می‌شود و کار تحقیق را ساده و امکان‌پذیر می‌کند.
- تعداد اعضای نمونه را اندازه یا حجم نمونه می‌نامند و آن را با n نمایش می‌دهند.
- عمل نمونه‌گیری و روش‌های تعیین اندازه نمونه، مهم‌ترین بخش آمار را تشکیل می‌دهند.

مثال: بعضی از مردم نسبت به گزیدگی پشه حساس‌اند. محل گزیدگی در این افراد تا مدتی همراه با خارش و سوزش است که بعد از مدتی این آثار برطرف می‌شود. برای مطالعه این مدت زمان ۱۰۰ نفر از آن‌ها را مورد مطالعه قرار دادیم. با توجه به اطلاعات موجود جدول زیر را کامل کنید.

ویژگی مورد بررسی	جامعه	نمونه	اندازه نمونه

جامعه: تمام افرادی که نسبت به گزیدگی پشه حساس‌اند

ویژگی مورد مطالعه: مدت زمان از بین رفتن آثار خارش و سوزش

نمونه: افراد انتخاب شده

اندازه نمونه: ۱۰۰ نفر

تمرین. یک پژوهشگر ورزشی می‌خواهد اطلاعاتی درباره‌ی سن ورزشکارانی که برای اولین بار کاپیتان تیم ملی شده‌اند به دست آورد. برای این اساس از بین ۳۰۰ کاپیتان تیم‌های ملی، ۵۰ نفر را انتخاب می‌کند. جامعه، اندازه‌ی جامعه، نمونه، اندازه‌ی نمونه و ویژگی مورد بررسی را مشخص کنید.

کاربرد علم آمار در پزشکی

◀ **شاخص توده‌ی بدن:** معیاری که با توجه به آن می‌توان میزان چاقی یک فرد را سنجید، معیار «شاخص توده‌ی بدن» است که از تقسیم وزن افراد (W) برحسب کیلوگرم بر توان دوم قد (H) برحسب متر به دست می‌آید.

$$B.M.I = \frac{W}{H^2}$$

$$\text{شاخص توده‌ی بدن} = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{توان دوم قد برحسب متر}}$$

برای شاخص توده‌ی بدن نتایج زیر به دست می‌آید:

شاخص توده‌ی بدن	طبقه‌بندی
کم‌تر از ۱۸/۵	کم وزن
۱۸/۵ تا ۲۴/۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴/۹	چاقی درجهٔ یک
۳۵ تا ۳۹/۹	چاقی درجهٔ دو
بیش‌تر از ۴۰	چاقی درجهٔ سه

براساس علم آمار با استفاده از مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص توده‌ی بدن شناسایی می‌شود. به عنوان مثال عواملی همچون رژیم غذایی ناسالم و کم تحرکی می‌توانند در بالا رفتن این معیار و ایجاد بیماری چاقی مؤثر باشند.

مثال. فرض کنید وزن شخصی ۷۵ کیلوگرم و قدش ۱۶۰ سانتی‌متر باشد.

ـ شاخص توده‌ی بدن این شخص را به دست آورید.

ـ درباره‌ی چاق یا لاغر بودن این شخص چه می‌توان گفت؟

$$W = ۷۵ \ kg \qquad H = ۱/۶ \ m \qquad B.M.I = \frac{W}{H^2} = \frac{۷۵}{(۱/۶)^2} \simeq ۲۹/۳$$

با توجه به جدول فوق، این شخص دارای اضافه وزن می‌باشد.

تمرین. قد شخصی ۱۹۰ سانتی‌متر و شاخص توده‌ی بدن وی ۳۰ است. وزن این شخص چند کیلوگرم است؟

◀ متغیر Variable

متغیر، ویژگی یا صفت مشخصی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

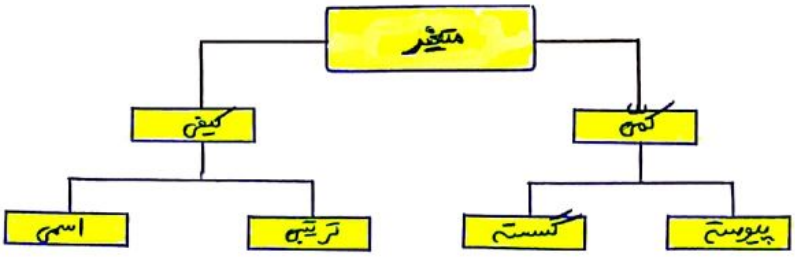
ـ عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت می‌دهیم، مقدار متغیر می‌نامیم.

— متغیر ویژگی است که مقادیر متفاوت را می‌پذیرد و همواره تغییر می‌کند.

— متغیر به ویژگی ای اطلاق می‌شود که بیش از یک ارزش به آن اختصاص داده می‌شود مثل: وزن، قد، بهرهٔ هوشی، پیشرفت تحصیلی و...

— برخی از متغیرها قابل اندازه‌گیری اند، یعنی با عدد بیان می‌شوند مانند قد. هم‌چنین برخی از متغیرها قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند، یعنی با عدد بیان نمی‌شوند مانند گروه خونی افراد.

— متغیرها را می‌توان برحسب اینکه قابل اندازه‌گیری باشند و یا اینکه قابل اندازه‌گیری نباشند به دو دستهٔ کمّی و کیفی تقسیم نمود.



متغیر کمّی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.

— متغیر کمّی پیوسته، متغیری است که بین دو واحد آن هر نقطه یا ارزشی را می‌توان انتخاب کرد، در واقع می‌تواند هر عددی را اختیار کند. مثلاً اگر نمرات یک کلاس از صفر تا ۲۰ تغییر کند، این متغیر می‌تواند تمام اعداد بین این فاصله را اختیار کند: ۰، ۱۰، ۱۸/۲۵، ۱۵/۵، ... بنابراین نمره می‌تواند به طور پیوسته تمام مقادیر بازهٔ [۰ و ۲۰] را اختیار کند.

— متغیرهای پیوسته عموماً از راه اندازه‌گیری به دست می‌آیند.

متغیر کمّی گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد و عملاً اعداد صحیح را می‌پذیرد.

— متغیر کمّی گسسته از راه شمارش به دست می‌آیند و عموماً تعداد آن‌ها مدنظر است. مثل: تعداد روزهای بارانی

متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. مثل: مراحل تحصیل، مراحل رشد یک کودک

متغیر کیفی اسمی: متغیری است که در آن‌ها ترتیب طبیعی وجود ندارد. مثل: گروه خونی، رنگ چشم، جنسیت

مثال: نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) شاخص تودهٔ بدن ← کمّی پیوسته (برحسب اعشار هم بیان می‌شود)

ب) شدت بارندگی ← کیفی ترتیبی (برحسب زیاد، متوسط و کم دسته‌بندی می‌شود)

ج) جمعیت شهر ← کمّی گسسته (برحسب تعداد بیان می‌شود)

د) گروه خونی ← کیفی اسمی (A، B، AB و O)

تمرین: نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

• مراحل زندگی • سال تولید خودرو • رنگ خودرو • نوع آلایندگی هوا • تعداد کلاس‌های مدرسه

• میزان علاقه مردم به فوتبال • میزان آلودگی هوا • تعداد جواب‌های معادله $x^2-1=0$ • فاصله

the end.