به نام خدا

جزوه درس دوم فصل اول معادله درجه ۲ ـ تابع درجه ۲

یازدهم تجربی

دبیر: حسین لهراب

(۱)

یادآوری معادله درجه ۲ و حل معادله درجه ۲:

هر معادله به صورت $ax^2+bx+c=0$ که $a\neq 0$ است یک معادله درجه ۲ است.

منظور از حل معادله درجه ۲ ← در صورت وجود یافتن x که در معادله صدق کند.

برای حل معادلات درجه ۲ از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم.

۱ـ روش تجزیه

۲ـ روش ریشه‌گیری

۳ـ روش مربع کامل کردن

۴ـ روش دلتا

تذکر: در برخی از مواقع می‌توان از ۲ روش خاص استفاده کرد.

① $ax^2+bx+c=0$

if $a+b+c=0$ $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

② $b=a+c$ $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\dfrac{-c}{a} \end{cases}$

در روش تجزیه می‌توان از اتحادها و عامل مشترک، اتحاد مربع دو جمله‌ای و فاکتورگیری استفاده کنیم.

روش ریشه‌گیری زمانی استفاده شود که $b=0$ باشد.

روش دلتا نیز روشی است که هر معادله را می‌توان با این روش حل کرد.

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$ → معادله دارای ۲ ریشه حقیقی و متمایز است → $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0$ → معادله ریشه مضاعف → $x=\dfrac{-b}{2a}$

$\Delta<0$ → معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$3x^2+4x=0 \rightarrow x(3x+4)=0 \begin{cases} x=0 \\ 3x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4}{3}=-2 \end{cases}$

$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

$x^2+4x-5=0 \xrightarrow[a+b+c=0]{\text{روش خاص}} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{-5}{1}=-5 \end{cases}$

$-x^2+3x-2=0$ $\quad \Delta=b^2-4ac=9-4(-1)(-2)=1 \rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3\pm 1}{-2}\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$a=-1,\ b=3,\ c=-2$

مثال: معادله‌ی زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

$$x^2+5x-6=0$$

$$x^2+5x=6 \longrightarrow b=5 \rightarrow \frac{5}{2} \xrightarrow{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$x^2+5x+\frac{25}{4}=6+\frac{25}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \xrightarrow{\text{ریشه بگیر}} x+\frac{5}{2}=\pm\frac{7}{2} \begin{cases} x=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1 \\ x=\frac{-7}{2}-\frac{5}{2}=-6 \end{cases}$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله:

برخی از معادلات درجه ۴ را می‌توان به معادله‌ی درجه ۲ تبدیل کرد و آن را حل کرد. با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان این کار را انجام داد.

تذکر: اگر در یک معادله x^4 و x^2 داشته باشیم کافی است $x^2=t$ قرار دهیم تا $x^4=t^2$ تبدیل شود و معادله از درجه ۴ به درجه ۲ تقلیل یابد.

تذکر: اگر در یک معادله x^6، x^3 داشته باشیم کافی است $x^3=t$ قرار دهیم تا $x^6=t^2$ تبدیل شود و معادله از درجه ۶ به درجه ۲ تقلیل یابد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\left.\begin{array}{l} x^4-8x^2+7=0 \\ x^2=t \Rightarrow x^4=t^2 \end{array}\right\} \rightarrow t^2-8t+7=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{c}{a}=7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=7 \Rightarrow x=\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^4-7x^2-4=0 \\ x^2=t \Rightarrow x^4=t^2 \end{array}\right\} \quad 2t^2-7t-4=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=49-4(2)(-4)=$$
$$=49+32=81>0$$

$$\longrightarrow t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7\pm 9}{4} \begin{cases} t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ t=\frac{-1}{2} \Rightarrow x^2=\frac{-1}{2} \; \times \end{cases}$$ جواب ندارد

$$\left.\begin{array}{l} x^4+3x^2+2=0 \\ x^2=t \Rightarrow x^4=t^2 \end{array}\right\} \rightarrow t^2+3t+2=0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \; \times \\ t=-2 \Rightarrow x^2=-2 \; \times \end{cases}$$

معادله جواب ندارد.

$$(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5=0 \Rightarrow t^2-4t-5=0 \xrightarrow{b=a+c}$$

$x^2-4x=t$

$$\begin{cases} t=-1 \Rightarrow x^2-4x=-1 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \\ t=5 \end{cases}$$

$\Delta=16-4(1)(1)=12$

$x=\frac{+4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$ ✓

$x^2-4x=5 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x=-1 ✓ \\ x=5 ✓ \end{cases}$

۴ جواب داریم.

$$4x^6+1=5x^3 \longrightarrow 4x^6-5x^3+1=0$$

$x^3=t \rightarrow x^6=t^2 \rightarrow 4t^2-5t+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0}$

$$\begin{cases} t=1 \rightarrow x^3=1 \rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1 \\ t=\frac{1}{4} \rightarrow x^3=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه ۲، $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

مجموع ریشه‌ها $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

<u>اثبات</u>: اگر $\Delta>0$ باشد معادله دو جواب دارد:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}+\frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\overbrace{\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}^{\text{مزدوج}}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

مثال: در معادله‌ی $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بدست آورید.

$a=-2$ و $b=1$ ، $c=5$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{-2}$$

نکته: در معادله‌ی درجه ۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر ضرایب a و c هم علامت نباشند علامت Δ مثبت است و ۲ جواب دارد.

$$\Delta = b^2-4ac = b^2-4\underbrace{ac}_{-} > 0$$

$+$

اگر a و c هم علامت نباشند.

بدون حل می‌توان فهمید که معادله درجه ۲ دارای ۲ جواب است.

چند نکته اضافی (برای کنکور)

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = S^2-2P$$

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^3-3SP$$

$$\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2)^2+(\beta^2)^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2 = (S^2-2P)^2-2P^2$$

$$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+4x-1=0$ باشند حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ۲) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ ۳) $\alpha^3+\beta^3$ ۴) $\alpha^2+\beta^2$ ۵) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$

۶) $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}$

$$S = \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = -4$$

$$P = \frac{c}{a} = -1$$

۱) $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{-4}{-1}+\frac{2}{\sqrt{4}}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$$

$$\rightarrow A^2 = 4+1 = 5 \rightarrow \boxed{A=\sqrt{5}}$$

۲) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2-2P}{P} = \frac{16-2(-1)}{-1} = \frac{18}{-1} = -18$

۳) $\alpha^3+\beta^3 = S^3-3PS = (-4)^3-3(-1)(-4) = -64-12 = -76$

۴) $\alpha^2+\beta^2 = S^2-2P = (-4)^2-2(-1) = 16+2 = 18$

۵) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = PS = -4\times-1 = +4$

۶) $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)}{(\beta+1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$

$$= \frac{S^2-2P+S}{P+S+1} = \frac{18-4}{-1-4+1} = \frac{14}{-4} = \frac{-7}{2}$$

در معادله‌ی $3x^2-17x+m=0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟

α , $\underbrace{3\alpha+3}_{\beta}$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{17}{3}=\alpha+\beta \Rightarrow \alpha+3\alpha+3=\frac{17}{3} \Rightarrow 4\alpha=\frac{17}{3}-3=\frac{8}{3}$

$P=\frac{c}{a}=\frac{m}{3}$

$\rightarrow \alpha=\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{2}{3}$

$\rightarrow \beta=3\alpha+3=3(\frac{2}{3})+3=5$

$\rightarrow \alpha\beta=\frac{m}{3} \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}}\times 5=\frac{m}{\cancel{3}} \Rightarrow m=10$

مثال: در معادله‌ی $x^2-7x+1=0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند حاصل $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

$\alpha\beta=1 \quad \alpha+\beta=7$

$A=\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2=\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$

$\rightarrow A^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A^2=1(7)+2\times1\times\sqrt{1}=9$

$\rightarrow A=\sqrt{9}=3$

نکته: اگر در یک معادله‌ی درجه ۲ ریشه‌ها قرینه‌ی هم باشند پس $b=0$ است.

$\alpha+\beta=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$

نکته: اگر در یک معادله درجه ۲ ریشه‌ها معکوس یکدیگر باشند ← $a=c$

$\alpha\beta=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a$

به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$ معکوس یکدیگرند؟

-۲   -۱   ۱   ۲

$\xrightarrow{\text{مرتب}} \underbrace{m}_{a}x^2+3x+\underbrace{m^2-2}_{c}=0 \Rightarrow a=c \Rightarrow m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0$

$\xrightarrow{b=a+c}$ $m=-1 \xrightarrow{\text{معادله اصلی}} -x^2+3x+1-2=0 \rightarrow -x^2+3x-1=0$ ✓ $\Delta>0$

$m=2 \rightarrow 2x^2+3x+4-2=0 \rightarrow 2x^2+3x+2=0$

$\rightarrow \Delta<0$ معادله جواب ندارد.

مثال: در معادله‌ی درجه دوم $x^2-2x-4=0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چقدر است؟

$S=2 \quad P=-4$

ریشه $\alpha \Rightarrow \alpha^2-2\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha^2-4=2\alpha$

$(\alpha^2-4)^2+4\beta^2=(2\alpha)^2+4\beta^2=4\alpha^2+4\beta^2=4(S^2-2P)=4(\cancel{4+8})^{12}=48$

مثال: در معادله‌ی $2x^2-(2m+1)x+m=0$ مقدار m را چنان بیابید که:

الف) یکی از ریشه‌ها، قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر باشد. $b=0 \Rightarrow 2m+1=0 \Rightarrow m=\frac{-1}{2}$

ب) یکی از ریشه‌ها عکس ریشه‌ی دیگر باشد؟ $a=c \rightarrow 2=m$

پ) یکی از ریشه‌ها یک واحد بیشتر از دو برابر ریشه‌ی دیگر باشد؟

α و $2\alpha+1$ $\rightarrow$ $S=\frac{-b}{a}=\frac{2m+1}{2}$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}$

$\alpha+2\alpha+1=\frac{2m+1}{2} \rightarrow 3\alpha+1=\frac{2m+1}{2} \rightarrow \alpha=\frac{\frac{2m+1}{2}-1}{3}=\frac{2m-1}{6}$

$\alpha\cdot(2\alpha+1)=\frac{m}{2}$

$\rightarrow \left(\frac{2m-1}{6}\right)\left(2\left(\frac{2m-1}{6}\right)+1\right)=\frac{m}{2} \xrightarrow{\text{بعد از ساده کردن}} 4m^2-7m-2=0 \rightarrow \Delta=81$

$m=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7\pm9}{8} \rightarrow m=2$ ، $m=\frac{-1}{4}$

تشکیل معادله‌ی درجه ۲ با استفاده از S و P

تشکیل معادله‌ی درجه ۲ در این جا می‌خواهیم به کمک مجموع و حاصل ضرب دو عدد یک معادله‌ی درجه ۲ تشکیل دهیم به طوری که آن دو عدد ریشه (جواب) های معادله باشند.

فرض کنید α و β ریشه‌های معادله (دو عدد) باشند در این صورت داریم:

$x=\alpha$ و $x=\beta$

$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \xRightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow \boxed{x^2-Sx+P=0}$

$\alpha+\beta=S$

$\alpha\beta=P$

نکته مهم ← معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن -3 و 2 باشد.

$S=2+(-3)=-1$

$P=2\times(-3)=-6$

$\} \rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+1x-6=0$

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$ و $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ باشد.

$S=\frac{3+\cancel{\sqrt{2}}}{5}+\frac{3-\cancel{\sqrt{2}}}{5}=\frac{6}{5}$

$P=\left(\frac{3+\sqrt{2}}{5}\right)\left(\frac{3-\sqrt{2}}{5}\right)\overset{\text{مزدوج}}{=}\frac{9-2}{25}=\frac{7}{25}$

$\} \rightarrow x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-\frac{6}{5}x+\frac{7}{25}=0$

۷

مثال: دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن ۱٫۵- و حاصل ضربشان ۷- باشد.

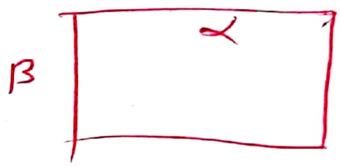
$$\left.\begin{array}{l} S = -1.5 = -\frac{3}{2} \\ P = -7 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ x^2 + \frac{3}{2}x - 7 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 3x - 14 = 0 \end{array}$$

$$\to \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-14) = 9 + 112 = 121 \to \sqrt{\Delta} = 11$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 11}{4} \left\langle \begin{array}{l} x = \frac{8}{4} = 2 \\ x = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

مثال: آیا مستطیلی با محیط 11 cm و مساحت $6\ cm^2$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است طول و عرض آن را بیابید. اگر طول α و عرض β باشد

$$\text{محیط} = 11 \to 2(\alpha + \beta) = 11 \to \alpha + \beta = \frac{11}{2}$$
$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \alpha\beta = 6$$



$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{11}{2} \to \beta = \frac{11}{2} - \alpha \\ \alpha\beta = 6 \end{array}\right. \to \alpha\left(\frac{11}{2} - \alpha\right) = 6 \xRightarrow{\times 2} \alpha(11 - 2\alpha) = 12 \to -2\alpha^2 + 11\alpha - 12 = 0$$

$$\to \Delta = b^2 - 4ac = 121 - 4(-2)(-12) = 121 - 96 = 25$$

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 \pm 5}{-4} \left\langle \begin{array}{l} \alpha = +4 \to \beta = \frac{11}{2} - 4 = \frac{11-8}{2} = \frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \to \beta = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4 \end{array}\right.$$

البته با روش S و P نیز می‌توان معادله را تشکیل داد و α و β را بدست آورد.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{11}{2} \to S = \frac{11}{2} \\ \alpha\beta = 6 \to P = 6 \end{array}\right\} \to x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

که روش دلتا xها را پیدا می‌کنیم.

تمرین:

۱- دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $\frac{13}{4}$ و حاصل ضربشان ۳- باشد.

۲- طول و عرض مستطیلی که مساحت آن ۱۵ و محیط آن ۱۷ باشد را مشخص کنید.

۸

تشکیل معادله درجه دوم جدید (ویژه کنکور)

اگر $ax^2+bx+c=0$ یک معادله درجه ۲ داده شده باشد و از ما بخواهد معادله درجه دومی بنویسیم که ریشه‌های آن یک ارتباط خاص با ریشه‌های معادله اولی داشته باشد برای این کار ۲ روش داریم:

روش اول: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله اولی باشد ابتدا S و P را بدست می‌آوریم و مقادیر 'S و 'P را برای معادله جدید (به کمک رابطه داده شده) بدست می‌آوریم

$x^2-S'x+P'=0$

روش دوم: ابتدا فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله اول x (معادله قدیم) و ریشه‌های معادله جدید را X در نظر می‌گیریم. به کمک رابطه داده شده رابطه بین x و X را می‌نویسیم. x را برحسب X پیدا کرده و در معادله اولیه قرار می‌دهیم تا یک معادله درجه ۲ برحسب X بدست آید. این معادله همان جواب مسئله است.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2-2x-4=0$ باشد.

روش اول: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند

$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=2$

$P=x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=-4$

ریشه‌های معادله جدید $2x_1$ و $2x_2$ است.

$S'=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2S=4$

$P'=2x_1 \times 2x_2=4(x_1 \cdot x_2)=4P=-16$

$\longrightarrow$ $x^2-Sx+P=0$

$x^2-4x-16=0$

روش دوم: اگر x ریشه‌های معادله $x^2-2x-4=0$ باشد و X ریشه‌های معادله جدید باشد. پس:

$X=2x \Rightarrow x=\frac{X}{2}$

در معادله اولیه به جای x مقدار $\frac{X}{2}$ قرار می‌دهیم:

$x^2-2x-4=0 \Rightarrow \left(\frac{X}{2}\right)^2-2\left(\frac{X}{2}\right)-4=0 \Rightarrow \frac{X^2}{4}-X-4=0$

$\xrightarrow{\times 4}$ $X^2-4X-16=0$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x+3)=2$ باشند به ازای کدام مقدار K جواب معادله $4x^2-Kx+25=0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$ است؟

$$x(5x+3)=2 \to 5x^2+3x-2=0$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-3}{5}$$

$$P=\alpha\beta=-\frac{2}{5}$$

$$S'=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{\frac{9}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{25}}=\frac{\frac{9+20}{\cancel{25}}}{\frac{4}{\cancel{25}}}=\frac{29}{4}$$

$$P'=\frac{1}{\alpha^2}\times\frac{1}{\beta^2}=\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2=\left(\frac{1}{P}\right)^2=\left(\frac{-5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$x^2-S'x+P'=0 \Rightarrow x^2-\frac{29}{4}x+\frac{25}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-29x+25=0$$

$$\longrightarrow K=29$$

$$X=\frac{1}{x^2} \longrightarrow x^2=\frac{1}{X} \to x=\frac{1}{\sqrt{X}}$$

x ریشه‌های معادله قدیم ، X ریشه‌های معادله جدید

$$5x^2+3x-2=0 \longrightarrow 5\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)-2=0 \to \frac{5}{X}+\frac{3}{\sqrt{X}}-2=0$$

$$\xrightarrow{\times X} 5+\frac{3\overset{\sqrt{X}\times\sqrt{X}}{X}}{\sqrt{X}}-2X=0 \to 5+3\sqrt{X}-2X=0$$

$$\to 3\sqrt{X}=2X-5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9X=4X^2+25-20X \Rightarrow$$

$$4X^2-29X+25=0$$

دقت کردید که روش دوم سخت‌تر است

مثال: ریشه‌های $\underbrace{\text{معادله‌ای}}_{X}$ از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $\underbrace{2x^2-3x+1=0}_{x}$ یک واحد کمتر است.

$$X=\frac{1}{x}-1 \longrightarrow X+1=\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{معکوس}} x=\frac{1}{X+1} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اولیه}}$$

$$\longrightarrow 2\left(\frac{1}{X+1}\right)^2-3\left(\frac{1}{X+1}\right)+1=0 \xrightarrow{\times (X+1)^2} 2-3(X+1)+(X+1)^2=0$$

$$2-3X-3+X^2+2X+1=0 \longrightarrow -X^2-5X-2=0 \xrightarrow{\times -1}$$

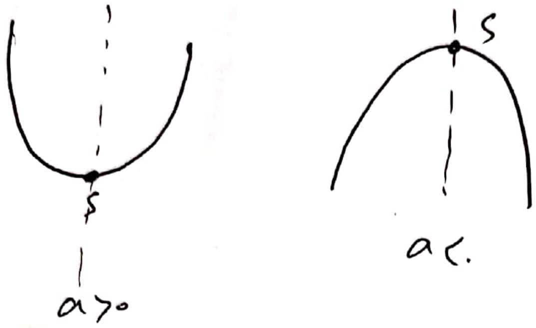
$$X^2+5X+2=0$$

ماکزیمم و مینیمم سهمی:

یادآوری:

سهمی: نمودار تابع درجه ۲ ، $y=ax^2+bx+c$ یک سهمی است.
$a\neq 0$

نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ نسبت به a به دو صورت زیر است.



در نمودارهای روبه‌رو S راس سهمی است که در آن سهمی دارای بیشترین یا کمترین مقدار است.

اگر $a>0$ سهمی دارای کمترین مقدار (min) مینیمم و اگر $a<0$ سهمی دارای بیشترین مقدار (max) ماکزیمم است.

دو فرم برای سهمی داریم که می‌خواهیم مختصات راس هرکدام را پیدا کنیم.

۱) فرم استاندارد $y=a(x-h)^2+k \longrightarrow$ راس سهمی (h,k)

۲) فرم گسترده $y=ax^2+bx+c \longrightarrow$ راس سهمی $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

تذکر: طول و عرض سهمی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x_S=\frac{-b}{2a} \quad , \quad y_S=\frac{-\Delta}{4a}$$

نکته: در سهمی منظور از ماکزیمم یا مینیمم سهمی عرض راس سهمی است.

مثال: تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر max و کدام یک min دارد. سپس مقدار max یا min هرکدام را بیابید.

الف) $f(x)=2(x+1)^2-3$

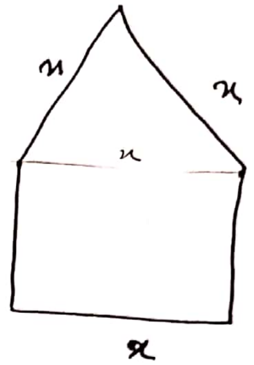
$a=2>0 \Rightarrow$ min دارد $\rightarrow S(-1,-3)$ مقدار مینیمم آن -3 است.

ب) $f(x)=-2x^2-4x+1$ $\quad x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{-4}=-1$

$a<0 \Rightarrow$ max دارد $\quad f(-1)=-2(-1)^2-4(-1)+1=-2+4+1=3$ مقدار ماکزیمم ۳ است.

(11)

مثال: پنجره ای به شکل مستطیل داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است اگر محیط این پنجره $12m$ باشد. ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر (max) نور دهی را داشته باشد.



محیط پنجره $= 3x+2y=12 \Rightarrow 2y=12-3x \Rightarrow \boxed{y=6-\frac{3}{2}x}$ (1)

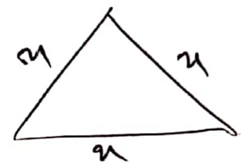
مساحت پنجره = مساحت مستطیل + مساحت مثلث متساوی الاضلاع

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = x\left(6-\frac{3}{2}x\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2+6x-\frac{3}{2}x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)x^2+6x$$

تذکر: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول x برابر است با:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$



چون $\frac{\sqrt{3}-6}{4}$ عددی منفی است پس $a<0$ پس دارای max است

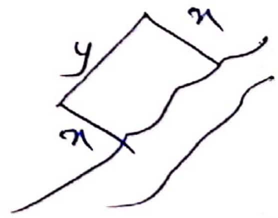
$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{\cancel{-6}^{\,-3}}{\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)} = -3\times\frac{4}{\sqrt{3}-6}$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{3}-6} = \boxed{\frac{12}{6-\sqrt{3}} \simeq 2.8}$$

(1) $y = 6-\frac{3}{2}x = 6-\frac{3}{2}(2.8) = \boxed{1.8\,m}$

مثال: می خواهیم کنار یک رودخانه ای محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. اگر تنها هزینه نصب 100 متر نرده را در اختیار داشته باشیم ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن شود.

$$2x+y=100 \Rightarrow y=100-2x$$



$$S=xy=x(100-2x) = -2x^2+100x$$

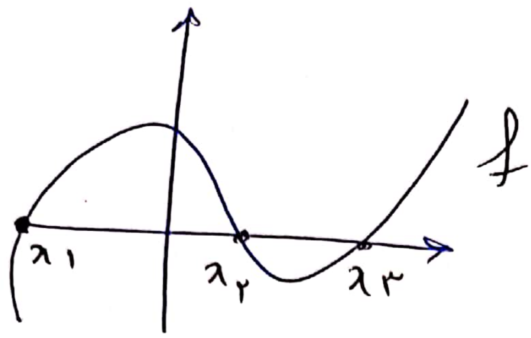
$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{100}{4} = \boxed{25}$$

$$y=100-2x=100-\underset{50}{\cancel{2(25)}} = \boxed{50}$$

صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی):

به نقاط برخورد یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع را نامیم که همان ریشه‌ها $f(x)=0$ هستند.

در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.



تابع f در شکل مقابل دارای ۳ صفر است یعنی دارای ۳ ریشه است چون ۳ جا محور xها را قطع کرده است.

نکته: در سهمی $y = f(x) = ax^2+bx+c$ محل تلاقی نمودار f با محور yها $(0, \ldots)$ $f(0)$ است که در این جا $f(0)=c$ است.

مشخص کردن علامت a و b و c سهمی از روی شکل:

$y=ax^2+bx+c$

۱) اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد ← $a>0$ ، دهانه سهمی رو به پایین باشد $a<0$ است

۲) c ← محل تلاقی نمودار با محور yها است
اگر بالای محور yها قطع کند ← $c>0$
اگر پایین محور yها قطع کند ← $c<0$
اگر مبدأ را قطع کند ← $c=0$

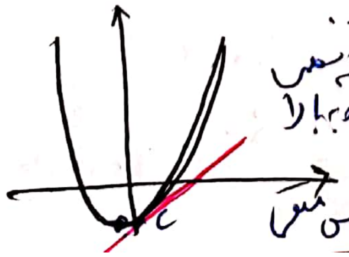
۳) برای علامت b هم به دو روش می‌توان عمل کرد.

۱. استفاده از طول راس سهمی و علامت a: $x = \frac{-b}{2a}$

۲. استفاده از مفهوم مشتق ← اگر خط مماس بر نمودار در جایی که محور yها را قطع کند به صورت / باشد ← $b>0$ و به صورت \ باشد $b<0$ و به صورت — باشد $b=0$ است.

مثال: در هر یک از سهمی‌های زیر علامت a و b و c را مشخص کنید.

1)



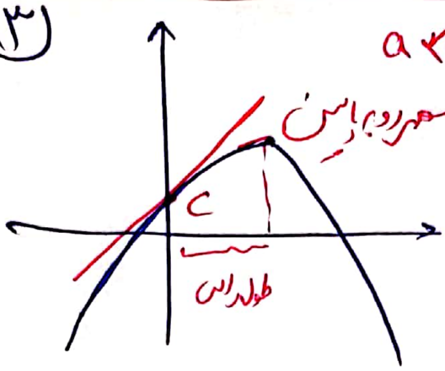
دهانه سهمی رو به بالا $a>0$

$c<0 \rightarrow$ محل تلاقی با محور yها

طول راس منفی $\frac{-b}{2a}<0 \rightarrow \frac{-}{+} = - \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$

شیب + ← $b>0$ است.

(۱۳)



$a<0$ دهانه سهمی رو به پایین

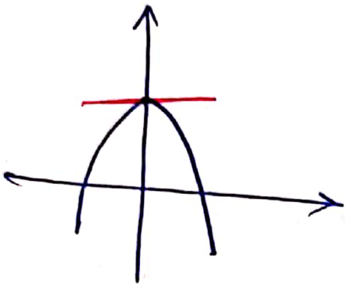
$c>0$ محل تلاقی با محور عرض ها

طول راس +

$x=-\frac{b}{2a}>0$ $\quad \frac{-}{-}=+$

$-b<0 \Rightarrow b>0$

شیب خط مماس + است ← $b>0$ است.



$a<0$

$c>0$

$b=0$ طول راس $=0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow b=0$

بحث روی علامت ریشه‌های معادله درجه ۲

اگر در معادله درجه ۲ ← $\Delta>0$ باشد در این صورت داریم.

۱) اگر $P<0$ ← ریشه‌ها یکی + و دیگری منفی است ← مختلف العلامت اند

۲) اگر $P>0$ ⇐
- $S>0$ ← هر دو ریشه + اند
- $S<0$ ← هر دو ریشه منفی اند

… S ، P و Δ در مورد ریشه‌ها و علامت‌های آن تقرار بدهید.

$3x^2+7x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=49-\underbrace{4(3)(2)}_{24}=25>0$ ۲ ریشه حقیقی متمایز

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{3}<0$

$P=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}>0$ $\longrightarrow$ هر دو ریشه منفی اند

$y=3x^2-7x+1$ $\quad \Delta=49-4(3)(1)=49-12=37>0$ ۲ ریشه دارد

$P=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}>0$ $\longrightarrow$ هر ۲ ریشه + اند

$S=\frac{-b}{a}=\frac{7}{3}>0$

$y=x^2+4x-5$ $\quad \Delta>0$ $\quad P=\frac{c}{a}=-5<0 \longrightarrow$ $S=\frac{-b}{a}=-4<0$ ریشه‌ها مختلف العلامت

یکی + و دیگری – …

نکته: برای نوشتن معادله سهمی از روی نمودار سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر نمودار دو جا محور x ها را قطع کرده باشد (۲ ریشه) x_1, x_2

معادله آن به صورت مقابل است ← $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

به کمک نقطه کمکی a را به دست می‌آوریم

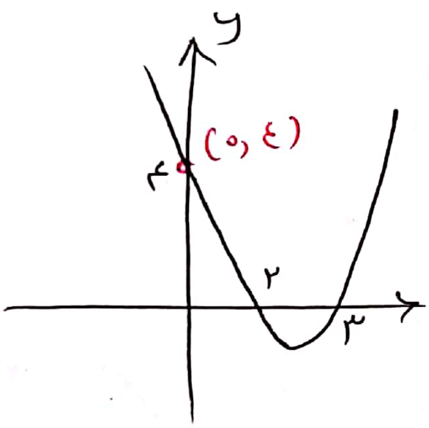
حالت دوم: اگر نمودار مماس بر محور x ها در یک جا باشد (یک ریشه) ریشه مضاعف معادله آن به صورت $y=a(x-x_1)^2$ است. به کمک نقطه کمکی a را به دست می‌آوریم.

حالت سوم: اگر مختصات رأس و یک نقطه کمکی داشتیم از فرمول زیر برای معادله سهمی استفاده می‌کنیم

$$y=a(x-x_s)^2+y_s$$

(x_s, y_s) مختصات رأس سهمی

مثال: معادله سهمی زیر را بیابید.



فرم اول

$x_1=2$

$x_2=3$

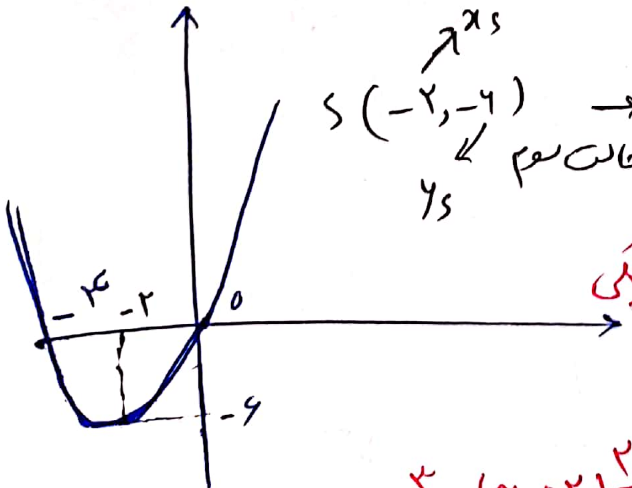
$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$y=a(x-2)(x-3)$$

$$\xrightarrow{(0,4)} 4=a\,\underbrace{(0-2)(0-3)}_{6}$$

$$\to a=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{2}{3}(x-2)(x-3)=\frac{2}{3}(x^2-5x+6)=\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x+4$$



$S(-2,-6)$ (x_s ، y_s) حالت سوم $\to$ $y=a(x-x_s)^2+y_s$

$$y=a(x+2)^2-6$$

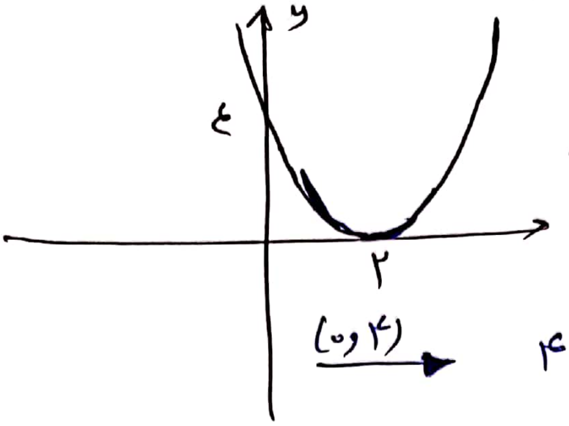
$$\xrightarrow[(0,0)]{\text{نقطه کمکی}} 0=a(0+2)^2-6 \Rightarrow 4a-6=0$$

$$\to a=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{3}{2}(x+2)^2-6=\frac{3}{2}(x^2+4x+4)-6$$

$$\to y=\frac{3}{2}x^2+6x+\cancel{6}-\cancel{6} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x^2+6x$$

15



حالت دوم

$y=a(x-x_1)^2$

$x_1=2 \rightarrow y=a(x-2)^2$

$(0,4) \rightarrow 4=a(0-2)^2 \Rightarrow 4=4a \Rightarrow a=1$

$y=1(x-2)^2 = x^2-4x+4$

مثال: به ازای کدام مقدار m، منحنی به معادله‌ی $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع می‌کند؟

← ریشه‌ها مثبت هستند

مجموع ریشه‌ها مثبت و حاصل ضرب ریشه‌ها + است.

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases}$$

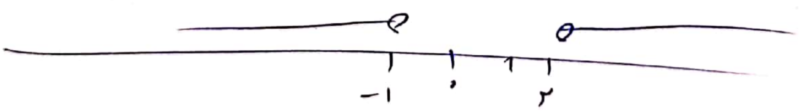
$\Delta=b^2-4ac=[2(m+1)]^2-4(m-2)(12) = 4(m^2+2m+1)-4(12m-24)>0$

$\xrightarrow{\div 4} m^2+2m+1-12m+24>0 \Rightarrow m^2-10m+25>0 \Rightarrow (m-5)^2>0$

همواره $\Delta>0$ است شروط دیگر را چک می‌کنیم.

$P=\frac{c}{a}=\frac{12}{m-2}>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2$ (1)

$S=\frac{-b}{a}=\frac{2(m+1)}{m-2}<0 \Rightarrow m+1<0 \Rightarrow m<-1$ (2)



اشتراک آن تهی است

پس جواب ← هیچ مقدار m.

مثال: به ازای کدام مقدار m، منحنی به معادله $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

در صورتی سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد که دو ریشه مختلف العلامت داشته باشد یعنی $P<0$

$P=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m+2<0 \Rightarrow m<-2$

حل سوالات کنکور سراسری از این درس در چند سال اخیر.

کنکور رشته ریاضی داخل ۹۸

به ازای کدام مقدار m معادله درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است؟

$-2 \le m < 3/5$ $-2 < m < 2/5$

$-1 \le m \le 2/5$ $-1 < m < 3/5$ ✓

دقت کنید در معادله درجه دوم ضریب x^2 نباید صفر باشد $2m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$ که هیچ‌کدام از گزینه‌ها سوال $\frac{1}{2}$ را دارا نیستند پس سوال اشکال دارد. حال بدون در نظر گرفتن این نکته به حل سوال می‌پردازیم:

$\xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی}} \Delta > 0 \Rightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow 36-4(2m-1)(m-2)>0$

$\xrightarrow{\div 4} 9-(2m^2\underbrace{-4m-m}_{-5m}+2)>0 \Rightarrow -2m^2+5m+7>0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2m^2+5m+7=0 \xrightarrow{b=a+c} x_1=-1,\ x_2=\frac{7}{2}$

m		-1		$\frac{7}{2}$	
	-		+		-

قابل قبول

$(-1, 3/5)$

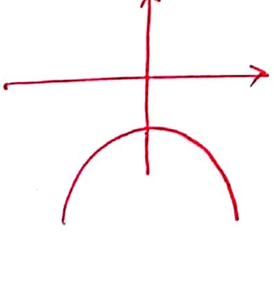
کنکور رشته ریاضی خارج ۹۸

به ازای کدام مقدار m، سهمی به معادله $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ همواره پایین محور xها است؟

$2<m<6$ $2<m<4$ $2<m<5$ $1<m<5$

$\xrightarrow{\text{سهمی همواره پایین محور xها}}$ $a<0 \to 1-m<0 \Rightarrow 1<m$ ①

$\Delta<0 \to b^2-4ac<0 \Rightarrow [2(m-3)]^2-4(1-m)(-1)<0$



$\to 4(m^2-6m+9)+4(1-m)<0 \xrightarrow{\div 4}$

$m^2-6m+9+1-m<0 \Rightarrow m^2-7m+10<0$

$\to m^2-7m+10=(m-2)(m-5)=0$ ، $m=2$ ، $m=5$

m		2		5	
	+		-		+

قابل قبول

$(2,5)$

① ∩ ② $\xrightarrow{}$ 0   1   2   5 $\xrightarrow{\text{اشتراک}} (2,5)$

②

کنکور ۹۹ داخل تجربی

معادله‌ی درجه دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$-\frac{5}{2}$ $\quad -1 \quad$ 3 $\quad \frac{7}{2}$

$S=\frac{1}{P} \Rightarrow SP=1 \longrightarrow -\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}=1 \Rightarrow -bc=a^2 \rightarrow$

$-(2m-1)(2-m)=3^2 \Rightarrow -(4m-2m^2-2+m)=9 \Rightarrow$

$2m^2-5m+\underbrace{\cancel{2-9}}_{-7}=0 \xrightarrow[b=a+c]{\cancel{a+b+c=0}} \begin{cases} m=-1 \\ m=-\frac{c}{a}=\frac{+7}{2} \end{cases}$

با جایگذاری m در معادله

if $m=-1 \Rightarrow 3x^2+(2(-1)-1)x+2-(-1)=0 \Rightarrow 3x^2-3m+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(3)(3)<0 \longrightarrow$ پس قابل قبول نیست

پس $m=\frac{7}{2}$ درست است.

کنکور ۹۹ خارج تجربی:

معادله‌ی درجه دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای ۲ ریشه‌ی مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟

$(-6,-4)$ $\quad (-6,0)$ $\quad (-4,-2)$ $\quad (-4,0)$

$\Delta>0 \rightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow m^2-4(2)(m+6)>0 \Rightarrow m^2-8m-48>0$

$(m-12)(m+4)=0$

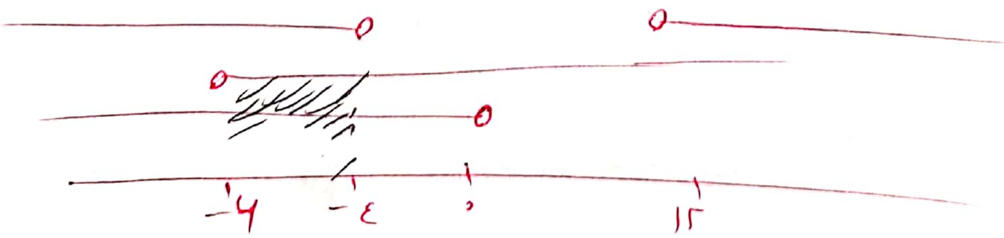
$m=12$
$m=-4$

$S>0 \rightarrow -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{m}{2}>0 \Rightarrow m<0$ ①

$P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m+6}{2}>0 \Rightarrow m>-6$ ②

m		-4		12	
	+		-		+

$(-\infty,-4)\cup(12,\infty)$ ③



اشتراک هر ۳ تا $\quad (-6,-4)$

①∩②∩③

۱۸

کنکور ۱۴۰۰ ریاضی داخل:

اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4-7x^2-5=0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2-3SP+2S$ کدام است؟

$59-7\sqrt{69}$ $\qquad 7+\sqrt{69}$ $\qquad 50$ $\qquad 59+7\sqrt{69}$

$x^2=t \Rightarrow x^4=t^2 \to t^2-7t-5=0 \to \Delta=b^2-4ac=49-4(1)(-5)=+69$

$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2} \longrightarrow x^2=\frac{7\mp\sqrt{69}}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7\mp\sqrt{69}}{2}}$

$\alpha=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$ قرینه‌اند $S=\alpha+\beta=0$

$\beta=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$ $\qquad P=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}\times\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$

$=-\sqrt{\frac{(7+\sqrt{69})^2}{4}}=-\frac{(7+\sqrt{69})}{2}$

$2P^2-\cancel{3SP}+\cancel{2S}=2\left(\frac{7+\sqrt{69}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)=\frac{49+69+14\sqrt{69}}{2}$

$=59+7\sqrt{69}$

کنکور ۱۴۰۰ تجربی داخل:

فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار x_1+x_2 کدام است؟

2 $\qquad 1$ $\qquad 0$ $\qquad -1$

$\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^2$

چاق و لاغر

$\underbrace{(t^2)^3-1^3}=t^6-1$

$\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)(t^2-1)=2t \longrightarrow \frac{(t^4+1+t^2)(t^2-1)}{t^2}=2t$

$\longrightarrow t^6-1=2t^3 \Rightarrow t^6-2t^3-1=0 \xrightarrow{t^3=x} x^2-2x-1=0$

$\longrightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$

۱۹)

کنکور ۱۴۰۱ تجربی

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x=5-x^2$ باشند، $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ ، ریشه‌های کدام معادله است؟

$125x^2+14x=1$ $\qquad$ $125x^2=14x+1$

$125x^2=12x+1$ $\qquad$ $125x^2+12x=1$

$$x^2+x-5=0$$

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=-1$$

$$P=x_1 x_2=\frac{c}{a}=-5$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$S'=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{\left[(x_1+1)(x_2+1)\right]^3}=$$

$$=\frac{(\overbrace{x_1+1+x_2+1}^{x_1+x_2+2})^3-3(\overbrace{\cancel{x_1+1)}(x_2+1}^{x_1x_2+x_1+x_2+1})(\overbrace{x_1+1+x_2+1}^{x_1+x_2+2})}{\left[x_1x_2+x_1+x_2+1\right]^3}=\frac{(S+2)^3-3(P+S+1)(S+2)}{(P+S+1)^3}$$

$$=\frac{(\cancel{-1}+2)^3-3(-5\cancel{-1+1})(\overset{1}{\cancel{-1+2}})}{(-5-1+1)^3}=\frac{1+15}{125}=\frac{16}{125}$$

$$P'=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{1}{(\underbrace{x_1+x_2}_{-1}+\underbrace{x_1x_2}_{-5}+1)^3}=\frac{-1}{125}$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{14}{125}x-\frac{1}{125}=0 \xrightarrow{\times 125}$$

$$125x^2-14x-1=0 \Rightarrow \boxed{125x^2=14x+1}$$

روش دوم:

$$x^2+x-5=0 \Rightarrow x_1+x_2=-1 \Rightarrow \begin{cases} -x_1=x_2+1 \\ -x_2=x_1+1 \end{cases}$$

$$S'=\frac{1}{(-x_1)^3}+\frac{1}{(-x_2)^3}=-\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3}=-\frac{S^3-3PS}{P^3}=-\frac{14}{125}$$

$$P'=\frac{1}{(x_1x_2)^3}=\frac{-1}{125} \longrightarrow x^2+\frac{14}{125}x-\frac{1}{125}=0 \Rightarrow 125x^2+14x=1$$

۲۰)

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - x = 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^3+\frac{1}{x_2}$ و $x_2^3+\frac{1}{x_1}$ است؟

$4x^2 = 51x + 221$

$4x^2 = 51x + 197$

$4x^2 + 51x = 221$

$4x^2 + 51x = 197$

$x^2 - x - 4 = 0$ $\qquad S = \frac{-b}{a} = +1$ و $P = \frac{c}{a} = -4$

$$S' = x_1^3 + \frac{1}{x_2} + x_2^3 + \frac{1}{x_1} = x_1^3 + x_2^3 + \underbrace{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}_{\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}} =$$

$$= S^3 - 3PS + \frac{S}{P} = 1^3 - 3(-4)(1) + \frac{1}{-4} = \overset{13}{\cancel{1+12}} - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

$$P' = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_1 x_2)^3 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1x_2} =$$

$$= P^3 + S^2 - 2P + \frac{1}{P} = -64 + \overset{9}{\cancel{1 - 2(-4)}} + \frac{1}{-4} = -55 - \frac{1}{4} = \frac{-221}{4}$$

$$\to x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

$$\to 4x^2 = 51x + 221$$