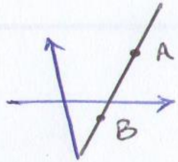
* هندسه تحلیلی

- یادآوری معادله خط:



✓ هر خط در صفحه مختصات، با دو نقطه قابل رسم است.

✓ معادله یک خط در صفحه به صورت $y=mx+h$ می باشد که m، شیب خط و h عرض از مبدأ خط است.

شیب   عرض از مبدأ

✓ اگر دو نقطه A و B را داشته باشیم، شیب خط گذرنده از A و B برابر است با:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(1,-2)$ و $B(3,2)$ می گذرد. نقاط برخورد خط با محورهای مختصات را بیابید. خط را در دستگاه مختصات رسم کنید.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-(-2)}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

$$AB: y=mx+h \rightarrow y=2x+h \xrightarrow{A(1,-2)} -2=2(1)+h \rightarrow h=-4$$

$$\rightarrow AB: y=2x-4$$

مثال: شیب هر یک از خطوط زیر را بیابید.

$y=-2+3x$ → $m=3$

$2y+4x-10=0$ → $2y=-4x+10$ $\xrightarrow{\div 2}$ $y=-2x+5$ → $m=-2$

$y=3$: x نداریم، پس $m=0$

$x=-1$: خط موازی محور y ها، شیب تعریف نشده

- اوضاع نسبی دو خط:

الف) دو خط موازی: اگر دو خط d و d' شیب‌ها برابر داشته باشند، با یکدیگر موازی اند: $\boxed{m = m'}$

؟؟ نکته: اگر علاوه بر موازی بودن، مختصات یک نقطه از خط d، در معادله d' صدق کند، دو خط بر هم منطبق اند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(2,-1)$ می‌گذرد و با خط $3x+y=4$ موازی است.

$y=-3x+4 \to m=-3$

معادله خط موازی: $y=-3x+h \xrightarrow{A(2,-1)} -1=-3(2)+h \to h=5 \to y=-3x+5$

ب) دو خط عمود بر هم: اگر دو خط d و d' بر هم عمود باشند، ۱) نماد: $\boxed{m \cdot m'=-1} \xrightarrow{\text{نتیجه}} m'=-\frac{1}{m}$

در نتیجه، شیب خط عمود، قرینهٔ ۲ معکوس شیب خط است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(2,-1)$ می‌گذرد و بر خط $3x+y=4$ عمود است.

$m=-3 \to m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3} \to y=\frac{1}{3}x+h \xrightarrow{A(2,-1)} -1=\frac{1}{3}(2)+h$
$\to h=\frac{5}{3}$

$\to y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y=x+5$

مثال: اوضاع نسبی خطوط زیر را بررسی کنید.

الف) $d: y=2x+1$ و $d': y=2x-3$ ، $m=2$ ، $m'=2$

$m=m' \to$ موازی $\to$ عرض از مبدأها برابر نیستند، پس دو خط منطبق نیستند

ب) $L: y=3x$ و $L': y=-\frac{1}{3}x+2$ ، $m=3$ ، $m'=-\frac{1}{3}$

$m \times m' = 3 \times \frac{-1}{3} = -1 \to L \perp L'$

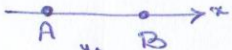
پ) $\Delta: x+2y+2=0$ و $\Delta': 2x+4y+4=0$

$m=\frac{-1}{2}$ ، $m'=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \to m=m'$ موازی

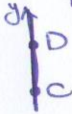
$A(0,-1)$ روی خط Δ $\xrightarrow{\text{جایگذاری در } \Delta'} 2(0)+4(-1)+4=0 \checkmark \Rightarrow$ Δ و Δ' منطبق اند

نکته: در معادله $ax+by+c=0$، شیب برابر است با:
$$m=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{a}{b}$$

- فاصله بین دو نقطه :

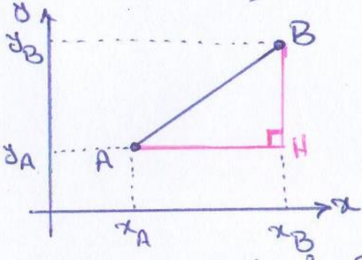


✓ اگر دو نقطه A و B، دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آنگاه : $|AB| = |x_A - x_B|$



✓ اگر دو نقطه C و D، دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آنگاه ; $|CD| = |y_C - y_D|$

حال اگر دو نقطه A و B در صفحه مختصات موجود باشند، به کمک تعاریف فوق داریم :



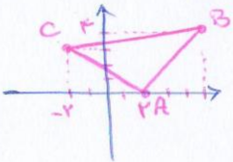
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

مثال: سه نقطه $A(2,0)$ و $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ سه رأس یک مثلث اند.

الف) مثلث را رسم کنید. ب) محیط مثلث را به دست آورید.

پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است سپس مساحت آن را حساب کنید.



ب) $AB=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=5$ $\quad AC=\sqrt{(2+2)^2+(0-3)^2}=5$ $\quad BC=\sqrt{(4-3)^2+(5+2)^2}=\sqrt{50}$

$\to P_{ABC}=AB+AC+BC=5+5+\sqrt{50}=10+\sqrt{50}$

پ) ① $BC^2=AB^2+AC^2 \xrightarrow[\text{قضیه فیثاغورس}]{\text{طبق عکس}} \hat{A}=90$

$(\sqrt{50})^2=5^2+5^2$

② $\begin{cases} m_{AB}=\frac{4-0}{5-2}=\frac{4}{3} \\ m_{AC}=\frac{3-0}{-2-2}=\frac{-3}{4} \end{cases} \to m_{AB}\times m_{AC}=-1 \to AB\perp AC \to \hat{A}=90$

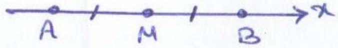
$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 5\times 5=\frac{25}{2}$

؟؟ نکته: فاصله نقطه $A(x,y)$ از مبدأ مختصات برابر است با :

$$\boxed{AO=\sqrt{x^2+y^2}}$$

- مختصات نقطه وسط پاره خط:

اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها باشند و M وسط پاره خط AB باشد، داریم:



$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB} \to x_M-x_A=x_B-x_M \to x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$$

به طور مشابه اگر A و B روی محور yها باشند، خواهیم داشت: $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

نتیجه: اگر A و B، دو نقطه در صفحه مختصات باشند، مختصات نقطه M، وسط پاره خط AB برابر است با:

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

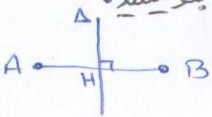
مثال: مثلث ABC با رأس های $A(1,9)$، $B(3,1)$ و $C(7,11)$ مفروض است. طول میانه AM را محاسبه کنید. معادله میانه AM را نیز بدست آورید.

$$M=\frac{B+C}{2}=\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2}\right)=(5,6)$$

$$AM=\sqrt{(5-1)^2+(6-9)^2}=5 \qquad m_{AM}=\frac{9-6}{1-5}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$

$$AM: y=-\frac{3}{4}x+h \xrightarrow{A(1,9)} 9=-\frac{3}{4}(1)+h \to h=$$

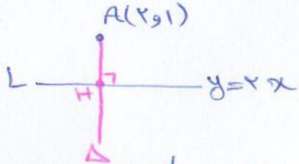
مثال: دو نقطه $A(-2,1)$ و $B(3,4)$ را در نظر بگیرید. معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.



$$H=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \qquad m_{AB}=\frac{4-1}{3+2}=\frac{3}{5} \to m_\Delta=\frac{-1}{m_{AB}}=-\frac{5}{3}$$

$$\Delta: y=-\frac{5}{3}x+h \xrightarrow{H(\frac{1}{2},\frac{5}{2})} \frac{5}{2}=-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+h \to h=\frac{10}{3} \to \Delta: y=-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}$$

مثال: قرینه نقطه $A(2,1)$ را نسبت به خط $y=2x$ به دست آورید.



معادله خطی که از A می‌گذرد و بر $y=2x$ عمود است را می‌نویسیم (خط Δ):

$$m_L=2 \to m_\Delta=-\frac{1}{2} \to \Delta: y=-\frac{1}{2}x+h \xrightarrow{A(2,1)} 1=-\frac{1}{2}(2)+h \to h=2$$

$$\to \Delta: y=-\frac{1}{2}x+2$$

حال، تقاطع Δ و L را می‌یابیم (نقطه H):

$$\begin{cases} L: y=2x \\ \Delta: y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \to H\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

برای یافتن A'، قرینه A نسبت به L، از رابطه $H=\frac{A+A'}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$H=\frac{A+A'}{2} \to A'=2H-A=2\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)-(2,1)=\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

- فاصله نقطه از خط :

✓ فعالیت زیر را انجام دهید :

خط $d: 2y+x=5$ و نقطه $A(4,3)$ داده شده است ، می خواهیم به کمک مراحل زیر ، فاصله A از خط را به دست آوریم :

الف) معادله خطی را بنویسید که از A می گذرد و بر d عمود است . (خط AH)

ب) تقاطع AH و خط d یعنی نقطه H را به دست آورید .

پ) طول پاره خط AH را محاسبه کنید .

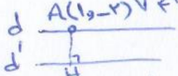
* اگر مراحل فعالیت بالا را در حالت کلی برای نقطه $A(x_0,y_0)$ و خط $d: ax+by+c=0$ انجام دهیم ، فاصله نقطه A از خط d برابر می شود با :

$$\boxed{d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

مثال : فاصله نقطه $A(7,5)$ را از خط L به معادله $4x+3y=18$ به دست آورید .

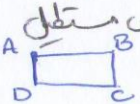
$$d=\frac{|4(7)+3(5)-18|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5$$

مثال : فاصله دو خط موازی $d: 3x+4y+5=0$ و $d': 3x+4y+15=0$ را به دست آورید . فاصله A از d' را می یابیم :



$$AH=\frac{|3(1)+4(-2)+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

مثال : دو خط $3x+2y=1$ و $2x-3y=2$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2,5)$ یک رأس مستطیل است . مساحت مستطیل چقدر است ؟



فاصله A از دو خط ، طول و عرض مستطیل می شود :

$$AB=\frac{|3(2)+2(5)-1|}{\sqrt{13}}=\frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$AD=\frac{|2(2)-3(5)-2|}{\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{13}} \rightarrow S=\frac{15}{\sqrt{13}}\times\frac{13}{\sqrt{13}}=15$$

مثال : خط $L: 3x-4y=0$ بر دایره ای به مرکز $O(2,-1)$ مماس است . شعاع دایره را بیابید .

فاصله مرکز تا خط مماس برابر شعاع است :

$$R=OM=\frac{|3(2)-4(-1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

* معادله و تابع درجه ۲

- یادآوری :

✓ در سال قبل با معادله درجه ۲ آشنا شدیم : $ax^2+bx+c=0$ و $a\neq 0$

✓ در این معادله عبارتی تشکیل دادیم به نام دلتا (Δ) : $\Delta=b^2-4ac$

✓ با توجه به مقدار و علامت Δ، جواب‌های معادله درجه ۲، به سه دسته تقسیم شدند:

- $\Delta>0$ ← معادله ۲ ریشه حقیقی متمایز دارد
- $\Delta=0$ ← معادله ۱ ریشه مضاعف دارد
- $\Delta<0$ ← معادله ریشه حقیقی ندارد

✓ در حالت $\Delta>0$، جواب‌های معادله از رابطه مقابل بدست می‌آید:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ در حالت $\Delta=0$ ، مقدار ریشه مضاعف می‌شود:

$$\boxed{x=\frac{-b}{2a}}$$

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $3x^2=5x-2 \to 3x^2-5x+2=0 \to \Delta=(-5)^2-4(3)(2)=1$

$$\to x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2(3)} \to x_1=1 \quad , \quad x_2=\frac{2}{3}$$

ب) $4x^2-4x+1=0 \to \Delta=(-4)^2-4(4)(1)=0 \to$ ریشه مضاعف: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(4)}=\frac{1}{2}$

پ) $x^4-10x^2+9=0 \xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{x^2=u} u^2-10u+9=0 \to (u-9)(u-1)=0 \to u=9 \to x^2=9 \quad , \quad u=1 \to x^2=1$

$$\to \begin{cases} x=\pm 3 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

مثال: اگر $x=-1$ یک ریشه معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$x=-1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 4(-1)^2-m(-1)-7=0 \to m=3 \to 4x^2-3x-7=0$

$\Delta=(-3)^2-4(4)(-7)=121 \to x=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2(4)} \to x_1=\frac{3+11}{8}=\frac{7}{4} \quad , \quad x_2=\frac{3-11}{8}=-1$

?? **نکته:** در معادله $ax^2+bx+c=0$، اگر a و c هم علامت نباشند، آنگاه معادله حتماً دو ریشه حقیقی دارد. (چرا؟)

- مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ :

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله درجه ۲ باشند و مجموع ریشه ها را با S و حاصل ضرب ریشه ها را با P نشان دهیم، داریم:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=-\frac{b}{a}\Rightarrow \boxed{S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$P=x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\overset{\text{مزدوج}}{=}\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-(\cancel{b^2}-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$$

مثال: در معادله $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را بیابید.

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\qquad P=\frac{c}{a}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$$

مثال: اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشهٔ دیگر و مقدار m را به کمک S و P بیابید.

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\to(-1)\times x_2=\frac{-7}{4}\to x_2=\frac{7}{4}$$

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}\to -1+x_2=\frac{m}{4}\to -1+\frac{7}{4}=\frac{m}{4}\to\frac{3}{4}=\frac{m}{4}\to m=3$$

مثال: اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2+4x-3=0$ باشند، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-4\qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$$

الف) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

ب) $\alpha^2+\beta^2=?\to(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\to\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=(-4)^2-2(-3)=22$$

ج) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{22}{-3}=-\frac{22}{3}$

د) $\alpha-\beta=A\xrightarrow{\text{توان ۲}}A^2=\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P}-\underbrace{2\alpha\beta}_{2P}=S^2-4P\xrightarrow{\text{جذر}}A=\pm\sqrt{S^2-4P}=\pm\sqrt{28}$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشند.

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \rightarrow x-2=0 \\ x=-3 \rightarrow x+3=0 \end{array}\right\} \rightarrow (x-2)(x+3)=0$$

؟؟ نکته: اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه ۲ باشند و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشند، آنگاه برای تشکیل این معادله خواهیم داشت:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow \boxed{x^2-Sx+P=0}$$

مثال: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ باشند.

$$S=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$$

$$P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-4x+1=0$$

مثال: دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱٫۵- و حاصل ضربشان ۷- باشد.

$$S=-1.5$$

$$P=-7$$

$$\rightarrow x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-1.5x-7=0 \rightarrow (x-3)(x+2.5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2.5 \end{cases}$$

مثال: محیط یک مستطیل ۳۳ و مساحت آن ۴۵ است. طول و عرض مستطیل را بیابید.

$$\text{محیط}=2(x+y)=33 \rightarrow x+y=\frac{33}{2} \rightarrow y=\frac{33}{2}-x$$

$$\text{مساحت}=x\cdot y \overset{\text{جایگذاری}}{=} x\left(\frac{33}{2}-x\right)=45 \rightarrow x^2-\frac{33}{2}x+45=0 \rightarrow \begin{cases} x=10 \rightarrow y=\frac{13}{2} \checkmark \\ x=\frac{13}{2} \rightarrow y=10 \end{cases}$$

چون طول باید بزرگتر از عرض باشد، پس طول ۱۰ و عرض $\frac{13}{2}$ است.

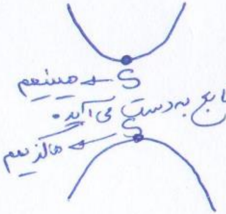
* ماکزیمم و مینیمم تابع درجه دوم

- یادآوری:

✓ در سال گذشته با معادله سهمی آشنا شدیم: $y=ax^2+bx+c$

✓ مختصات رأس سهمی برابر بود با: $x_S=-\frac{b}{2a}$ و $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$

✓
- اگر $a>0$ باشد، آنگاه دهانه سهمی رو به بالاست و به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ کمترین (مینیمم) مقدار تابع به دست می‌آید.
- اگر $a<0$ باشد، آنگاه دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار تابع به دست می‌آید.



مثال: الف) ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x)=-x^2+2x+3$ را در صورت وجود بیابید.

$a<0 \to$ ماکزیمم دارد

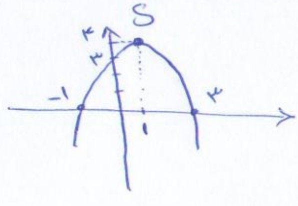
$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(-1)}=1 \to y_S=f(1)=-(1)^2+2(1)+3=4 \to S(1,4)$

ب) نقاط تقاطع تابع با محور xها و yها را بیابید.

$x=0 \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} f(0)=3 \to (0,3)$

$y=0 \xrightarrow{\text{طول از مبدأ}} -x^2+2x+3=0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2-2x-3=0 \to (x-3)(x+1)=0 \to x=3 \to (3,0)\ ,\ x=-1 \to (-1,0)$

پ) شکل تابع (سهمی) را رسم کنید.



مثال: محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن ماکزیمم گردد.

محیط $P = 2(x+y) = 100 \rightarrow x+y = 50 \rightarrow y = 50 - x$

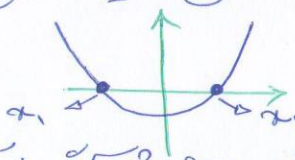
مساحت $S = x \cdot y \xrightarrow[\text{از بالا}]{\text{جایگذاری}} S = x(50-x) = -x^2 + 50x \rightarrow x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2(-1)} = 25$

$\rightarrow y = 50 - x = 50 - 25 = 25$

نکته: اگر محیط مستطیل عددی ثابت باشد، مساحت مستطیل وقتی ماکزیمم است که مستطیل به مربع تبدیل شود (طول و عرض برابر داشته باشد)

- صفرهای (ریشه های) تابع درجه دوم:

✓ نقاط برخورد یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم که در واقع ریشه های معادله $f(x)=0$ هستند و مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است.



؟؟ نکته: اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، آنگاه طبق آنچه از معادله درجه ۲ آموختیم، داریم:

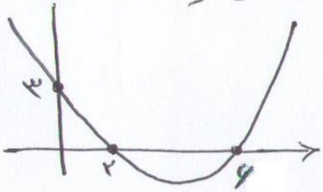
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

مثال: نقاط برخورد نمودار سهمی $f(x) = x^2 - 4x - 9$ با محورهای مختصات را بیابید.

$x = 0 \rightarrow f(0) = (0)^2 - 4(0) - 9 = -9 \rightarrow (0, -9)$ عرض از مبدأ

$y = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 9 = 0 \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 52 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} = 2 \pm \sqrt{13}$

مثال: اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت مقابل باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید.



(۱): طبق نکته صفحه قبل، $f(x)=a(x-\underset{2}{x_1})(x-\underset{6}{x_2})$ است:

$$\to f(x)=a(x-2)(x-6)$$

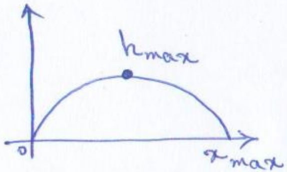
$$\xrightarrow{\text{(0,3) روی نمودار}} f(0)=3 \to 3=a(0-2)(0-6) \to a=\frac{3}{12} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

$$\to f(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x-6)=\frac{1}{4}x^2-2x+3$$

(۲): از آنجا که $f(0)=3$ پس $c=3$ است و داریم:

$$f(x)=ax^2+bx+3 \begin{cases} \to x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a} \to 2\times 6=\frac{3}{a} \to a=\frac{1}{4} \\ \to x_1+x_2=\frac{-b}{a} \to 2+6=\frac{-b}{\frac{1}{4}} \to b=-2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+3$$

مثال: فوتبالیستی توپی را با زاویه 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه $20\ m/s$ شوت می‌کند. معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه $y=-\frac{1}{40}x^2+x$ است. نمودار مسیر حرکت توپ را رسم کنید. حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟ حداکثر ارتفاع توپ را بدست آورید.



نقطه شروع شوت، همان مبدأ مختصات است:

x_{max}، نقطه برخورد مجدد توپ با زمین است، یعنی صفر دیگر تابع:

$$-\frac{1}{40}x^2+x=0 \to x\left(-\frac{1}{40}x+1\right)=0 \begin{cases} \to x=0 \to \text{مبدأ} \\ \to x=40=x_{max} \end{cases}$$

حداکثر ارتفاع توپ، عرض رأس سهمی است:

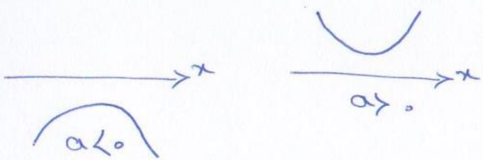
$$x_{h_{max}}=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(-\frac{1}{40})}=20 \to \boxed{h_{max}=-\frac{1}{40}(20)^2+20=10}$$

؟؟ نکته: با توجه به علامت Δ در تابع $y=ax^2+bx+c$ حالات زیر را داریم:

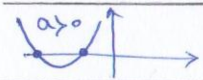
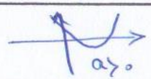
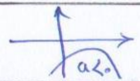
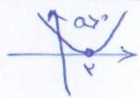
۱ ← $\Delta>0$: دو نقطه تقاطع با محور xها:

۲ ← $\Delta=0$: یک ریشه مضاعف (مماس بر محور xها):

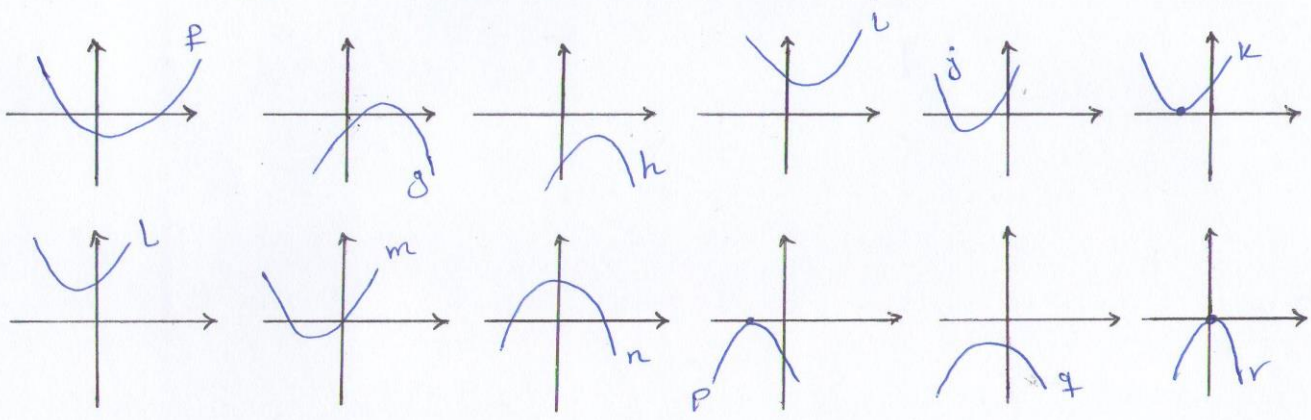
۳ ← $\Delta<0$: تابع محور xها را قطع نمی‌کند:



مثال: با توجه به نمونه، جدول زیر را کامل کنید.

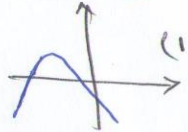
معادله	تعداد صفرهای تابع	علامت ریشه‌ها به کمک P	علامت ریشه‌ها به کمک S	شکل تقریبی تابع
$y=x^2+6x+5$	$\Delta=6^2-4(1)(5)=16>0$ ۲ ریشه حقیقی متمایز	$P=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}>0$ ریشه‌ها هم علامت اند	$S=-\frac{b}{a}=-6<0$ هر دو ریشه منفی اند	
$y=x^2-5x+4$	$\Delta=(-5)^2-4(1)(4)=9$ ۲ ریشه حقیقی متمایز	$P=\frac{c}{a}=\frac{4}{1}>0$ ریشه‌ها هم علامت اند	$S=-\frac{b}{a}=5>0$ هر دو ریشه مثبت اند	
$y=-x^2+2x-2$	$\Delta=2^2-4(-1)(-2)=-4<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد	—	—	
$y=x^2-4x+4$	$\Delta=(-4)^2-4(1)(4)=0$ ۱ ریشه مضاعف	—	$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$	

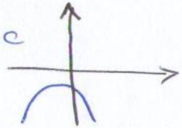
مثال: با توجه به نمودارهای داده شده‌ی زیر، جدول را تکمیل کرده و علامت ضرایب a، b و c در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ را بیابید.



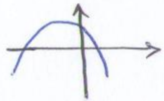
ویژگی \ تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
علامت b	−	+	$-\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow b>0$	$-\frac{b}{2a}>0 \to b<0$	$-\frac{b}{a}<0 \to b>0$	$-\frac{b}{2a}<0 \to b>0$	$-\frac{b}{2a}<0 \to b>0$	$-\frac{b}{a}<0 \to b>0$	$-\frac{b}{a}=0 \to b=0$	$-\frac{b}{2a}<0 \to b<0$	$-\frac{b}{2a}<0 \to b>0$	$-\frac{b}{2a}=0 \to b=0$
علامت c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌ها	۲	۲	۰	۰	۲	۱	۰	۲	۲	۱	۰	۱
علامت ریشه (ها) (در صورت وجود)	یکی + یکی −	هر دو +	ریشه ندارد	ریشه ندارد	هر دو −	۱ ریشه مضاعف منفی	ریشه ندارد	یکی − یکی صفر	یکی + یکی −	۱ ریشه مضاعف منفی	ریشه ندارد	۱ ریشه مضاعف صفر

مثال: نسبت به معادله $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. اگر $a<0$ و $bc<0$ باشد، آنگاه نمودار سهمی کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) ✓ 

$a<0 \to$ سهمی رو به پایین و $bc<0 \to$ b و c مختلف العلامت

گزینه ۱: $\begin{cases} c<0 \\ -\dfrac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0 \end{cases}$ ✗

گزینه ۲: $\begin{cases} c<0 \\ -\dfrac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0 \end{cases}$ ✗

گزینه ۳: $\begin{cases} c>0 \\ -\dfrac{b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b>0 \end{cases}$ ✗

گزینه ۴: $\begin{cases} c>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0 \end{cases}$ ✓

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

$$f(x)=x^3-x^2-4x+4=(x-2)\,q(x)$$

$(x-2)$ یکی از عامل ها تجزیه $f(x)$

$$\to q(x)=\frac{f(x)}{x-2}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2+x-2 \\ \hline x^2-4x+4 & \\ -x^2+2x & \\ \hline -2x+4 & \\ +2x-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\to q(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

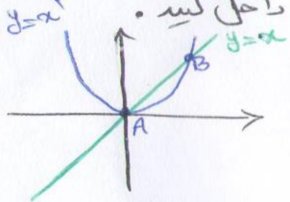
$$x=-2 \qquad x=1$$

* روش هندسی حل معادلات

✓ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

✓ این روش حل معادله را که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

مثال: نمودار $f(x)=x^2$ و $g(x)=x$ را رسم کنید و به کمک آن معادله $x^2=x$ را حل کنید.

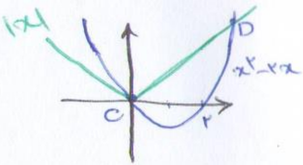


دو نمودار در نقاط A و B متقاطع‌اند.

$x^2=x \to x^2-x=0$

$\to x(x-1)=0 \to \begin{cases} x=0 \to A(0,0) \\ x=1 \to B(1,1) \end{cases}$

مثال: به روش هندسی معادلهٔ $|x|=x^2-2x$ را حل کنید.



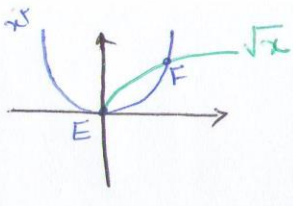
دو نمودار در نقاط C و D متقاطع‌اند. چون تقاطع‌ها در $x\geq 0$ رخ داده، پس داریم:

$x\geq 0 \to |x|=x$

$\to x=x^2-2x \to x^2-3x=0 \to x(x-3)=0$

$\to x=0 \to C(0,0)$

$\to x=3 \to D(3,3)$

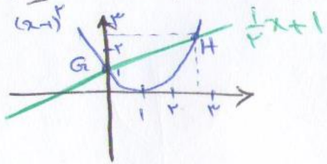


مثال: به روش هندسی معادلهٔ $\sqrt{x}=x^2$ را حل کنید.

دو تابع در نقاط E و F متقاطع‌اند.

$$x\geq 0 \to \sqrt{x}=x^2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=x^4$$

$$\to x^4-x=0 \to x(x^3-1)=0 \begin{cases} \to x=0 \to E(0,0) \\ \to x=1 \to F(1,1) \end{cases}$$

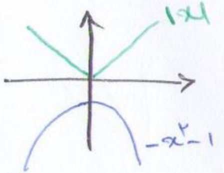


مثال: تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ را به روش هندسی به دست آورید.

دو نمودار در نقاط G و H متقاطع‌اند.

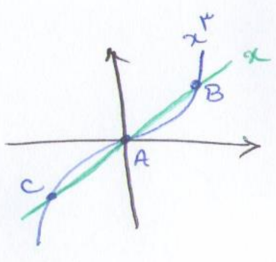
$G(1,0)$ مقدار دقیق

طول و عرض نقطهٔ H بین ۲ و ۳ است.



مثال: معادلهٔ $|x|=-x^2-1$ را به روش هندسی حل کنید.

مطابق شکل دو نمودار تقاطعی ندارند.



مثال: معادلهٔ $x^3=x$ را به روش هندسی حل کنید.

دو نمودار در نقاط A، B و C متقاطع‌اند.

$$x^3=x \to x^3-x=0 \to x(x^2-1)=0$$

$$\to \begin{cases} x=0 \to A(0,0) \\ x=1 \to B(1,1) \\ x=-1 \to C(-1,-1) \end{cases}$$

* معادلات گویا و گنگ

- معادلات گویا :

✓ معادله $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$ را در نظر بگیرید. به چنین معادلاتی که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله ای) قرار دارد، معادلات گویا می گوییم.

✓ برای حل یک معادله گویا ۲ گام زیر را بر می داریم :

① ← ابتدا صفرهای مخرج را می یابیم. جواب های معادله نباید شامل صفرهای مخرج باشد.

② ← طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها ضرب می کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود، سپس معادله حاصل را حل می کنیم.

مثال : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \xrightarrow{\times x} x \times \frac{x+1}{x} = x \times \frac{x}{1} \to x+1 = x^2 \to x^2 - x - 1 = 0 \to \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$

$x = 0$ صفر مخرج

$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

نکته : به نسبت $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که مقدار تقریبی آن ۱٫۶۱۸ می باشد، نسبت طلایی گفته می شود.

ب) $\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{x=-2} + \underbrace{\frac{2}{x}}_{x=0} = \underbrace{\frac{4x-4}{x^2-4}}_{x=\pm 2} \to x = 0 , \pm 2$ صفرهای مخرج

ک.م.م مخرج $x(x^2-4)$ است :

$x(x^2-4) \times \frac{3}{x+2} + x(x^2-4) \times \frac{2}{x} = x(x^2-4) \times \frac{4x-4}{x^2-4} \to 3x(x-2) + 2(x^2-4) = x(4x-4)$

$\to 3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x \to x^2 - 2x - 8 = 0 \to (x-4)(x+2) = 0$

$\to \begin{cases} x = 4 \; ✓ \\ x = -2 \; ✗ \end{cases}$ جزو صفرهای مخرج

ب) $\dfrac{1}{\underbrace{(x-2)^2}_{x=2}}+\dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{x=2}}=3 \xrightarrow{\times(x-2)^2} 1+2(x-2)=3(x-2)^2 \rightarrow 1+2x-4=3x^2-12x+12$

$\rightarrow 3x^2-14x+15=0 \rightarrow \Delta=(-14)^2-4(3)(15)=16$

صفر مخرج: $x=2$

ک.م.م مخرج‌ها $=(x-2)^2$

$\rightarrow x=\dfrac{14\pm\sqrt{16}}{2(3)}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{18}{6}=3 \checkmark \\ x_2=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3} \checkmark \end{cases}$

ت) $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2-x}{x^2-x} \xrightarrow{\text{تجزیه مخرج‌ها}} \dfrac{2x}{\underbrace{(x-1)}_{x=1}\underbrace{(x+1)}_{x=-1}}+\dfrac{2}{\underbrace{x+1}_{x=-1}}=\dfrac{2-x}{\underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(x-1)}_{x=1}} \xrightarrow{\times x(x^2-1)} 2x(x)+2x(x-1)=(x+1)(2-x)$

صفرهای مخرج: $x=0$ و 1 و -1

ک.م.م مخرج‌ها: $x(x^2-1)$

$\rightarrow 2x^2+2x^2-2x=2x-x^2+2-x \rightarrow 5x^2-3x-2=0 \xrightarrow{5-3-2=0}$

$\begin{cases} x=1 \ \times \\ x=-\dfrac{2}{5} \checkmark \end{cases}$

مثال: مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. یعنی اگر طول و عرض مستطیل x و y باشد، داریم: $\dfrac{x+y}{x}=\dfrac{x}{y}$

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین را بیابید.

$P=2x+2y=144 \rightarrow x+y=72 \rightarrow y=72-x$

$\dfrac{x+y}{x}=\dfrac{x}{y} \xrightarrow{y=72-x} \dfrac{\cancel{x}+72-\cancel{x}}{x}=\dfrac{x}{72-x} \rightarrow \dfrac{72}{\underbrace{x}_{x=0}}=\dfrac{x}{\underbrace{72-x}_{x=72}} \xrightarrow{\times x(72-x)}$

$\rightarrow 72(72-x)=x^2 \rightarrow x^2+72x-72^2=0 \rightarrow \Delta=72^2-4(1)(72^2)=5(72^2)$

$\rightarrow x=\dfrac{-72\pm\sqrt{5\times72^2}}{2}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{-72+72\sqrt{5}}{2}=36(\sqrt{5}-1) \Rightarrow y=72-x=72-36(\sqrt{5}-1) \rightarrow y=108-36\sqrt{5} \\ x_2=\dfrac{-72-72\sqrt{5}}{2}<0 \ \times \end{cases}$

مثال: اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت، چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار ماشین A، دو برابر ماشین B باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

ماشین	زمان انجام کل کار	زمان انجام ۱ ساعت کار
A	t	$\frac{1}{t}$
B	$2t$	$\frac{1}{2t}$
A و B	4	$\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{2t}=\frac{1}{4} \rightarrow \frac{2+1}{2t}=\frac{1}{4} \rightarrow \frac{3}{2t}=\frac{1}{4}$$

$\rightarrow t=6=$ زمان ماشین A

$\rightarrow 2t=12=$ زمان ماشین B

مثال: اگر علی و حسن به ترتیب و به تنهایی در ۶ و ۱۲ روز اتاقی را رنگ بزنند و درصورتی که با کمک رضا، همان اتاق را در ۲ روز رنگ بزنند، رضا به تنهایی اتاق را در چند روز رنگ می زنند؟

اگر زمان انجام کار رضا را t بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 12t} 2t+t+12=6t \rightarrow 3t=12 \rightarrow t=4$$

رضا در ۴ روز می تواند اتاق را رنگ کند

* معادلات گنگ (رادیکالی)

✓ معادله‌ی $x+\sqrt{x}=12$ را در نظر بگیرید. به چنین معادلاتی که در آنها عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود دارد، معادلات رادیکالی می‌گوییم.

✓ برای حل معادلات رادیکالی ۳ گام زیر را پیروی داریم:

① ابتدا جملات را طوری در طرفین تساوی جابجا می‌کنیم که رادیکال (ها) در یک طرف و بقیه عبارت‌ها در طرف دیگر تساوی قرار بگیرند.

② دامنه‌ی متغیر تساوی به وجود آمده را مشخص می‌کنیم. (۱← عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد ۲← طرف دوم تساوی هم باید بزرگتر مساوی صفر باشد.)

③ سپس با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن، به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم. جواب‌های نهایی اگر در دامنه‌ی متغیر صدق کنند، قابل قبول‌اند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x+2}+4=x$

$1 \rightarrow \sqrt{x+2}=x-4$

$2 \rightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \rightarrow x\geq -2 \\ x-4\geq 0 \rightarrow x\geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x\geq 4$

$3 \xrightarrow{\text{توان } 2} x+2=(x-4)^2 \rightarrow x+2=x^2-8x+16 \rightarrow x^2-9x+14=0 \rightarrow (x-2)(x-7)=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 & \times \\ x=7 & ✓ \end{cases}$

ب) $x+\sqrt{x}=12$

$1 \rightarrow \sqrt{x}=12-x$

$2 \rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 12-x\geq 0 \rightarrow x\leq 12 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0\leq x\leq 12$

$3 \xrightarrow{\text{توان } 2} x=(12-x)^2 \rightarrow x=144+x^2-24x \rightarrow x^2-25x+144=0 \rightarrow (x-9)(x-16)=0$

$\rightarrow \begin{cases} x=9 & ✓ \\ x=16 & \times \end{cases}$

پ) $۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x-۳}$ $\quad ۱ \rightarrow \checkmark \quad ۲ \rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \\ ۳x-۳ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \geq ۱$

$۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x = ۳x-۳ \rightarrow x = -۳ \quad \times$ معادله جواب ندارد

ت) $۲\sqrt{۲t-۱} - t = ۱$ $\quad ۱ \rightarrow ۲\sqrt{۲t-۱} = t+۱ \quad ۲ \rightarrow \begin{cases} ۲t-۱ \geq ۰ \rightarrow t \geq \frac{۱}{۲} \\ t+۱ \geq ۰ \rightarrow t \geq -۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} t \geq \frac{۱}{۲}$

$۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴(۲t-۱) = (t+۱)^۲ \rightarrow ۸t-۴ = t^۲+۲t+۱ \rightarrow t^۲-۶t+۵=۰ \rightarrow (t-۵)(t-۱)=۰$

$\rightarrow \begin{cases} t = ۵ \ \checkmark \\ t = ۱ \ \checkmark \end{cases}$

ث) $\dfrac{۱}{\sqrt{u-۳}} - \dfrac{۲}{\sqrt{u}} = ۰$ $\quad ۱ \rightarrow \dfrac{۱}{\sqrt{u-۳}} = \dfrac{۲}{\sqrt{u}} \quad ۲ \xrightarrow[\text{مخرج هستند}]{\text{چون رادیکالها در}} \begin{cases} u-۳ > ۰ \rightarrow u > ۳ \\ u > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} u > ۳$

$۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \dfrac{۱}{u-۳} = \dfrac{۴}{u} \xrightarrow{\text{طرفین-وسطین}} ۴(u-۳) = u \rightarrow ۴u-۱۲ = u \rightarrow ۳u = ۱۲ \rightarrow u = ۴ \ \checkmark$

ج) $\underbrace{\sqrt{x-۲}}_{\geq ۰} + \underbrace{\sqrt{۲x+۳}}_{\geq ۰} + \underbrace{۱}_{>۰} = ۰ \quad > ۰$

حاصل عبارت سمت چپ همواره بزرگتر از صفر است، پس هیچگاه برابر صفر نمی شود.

مثال: آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد؟

a : عدد مورد نظر

$a+\sqrt{a}=6 \qquad 1 \rightarrow \sqrt{a}=6-a \qquad 2 \rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 6-a \geq 0 \rightarrow a \leq 6 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0 \leq a \leq 6$

$3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a=(6-a)^2 \rightarrow a=36+a^2-12a \rightarrow a^2-13a+36=0 \rightarrow (a-4)(a-9)=0 \begin{cases} a=4 \ \checkmark \\ a=9 \ \times \end{cases}$

مثال: نقطه‌ای روی محورها بیابید که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $P(2,3)$ برابر ۵ باشد. مسأله چند جواب دارد؟

$M(x,0)$: نقطه روی محور x ها

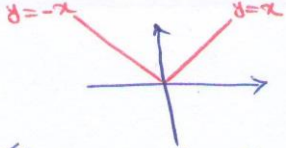
$MP=5 \rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}=5 \qquad 1 \rightarrow \checkmark \qquad 2 \rightarrow \checkmark$

عبارت زیر رادیکال از دو پرانتز توان ۲ تشکیل شده است، پس محدودیتی برای x وجود ندارد.

$3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-2)^2+9=25 \rightarrow (x-2)^2=16 \xrightarrow{\text{جذر}} x-2=\pm 4 \rightarrow \begin{cases} x-2=4 \rightarrow x=6 \\ x-2=-4 \rightarrow x=-2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} M_1(6,0) \\ M_2(-2,0) \end{cases}$

* قدرمطلق و ویژگی های آن



✓ در سال قبل با قدرمطلق آشنا شدیم :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

✓ کارکرد اصلی قدرمطلق، مثبت کردن حاصل یک عبارت است. طبق تعریف فوق، اگر x، خود مثبت باشد، قدرمطلق کارکردی ندارد، ولی اگر x منفی باشد، قدرمطلق حاصل را قرینه می کند تا مثبت شود.

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5-(-3)| = |-5+3| = |-2| = 2$

ب) $|\underbrace{\sqrt{3}-\sqrt{5}}_{<0}| = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

پ) $|1.5 - \frac{3}{2}| = |1.5-1.5| = |0| = 0$

ت) $|\underbrace{3-\pi}_{<0}| = -(3-\pi) = \pi-3$

نکته: $\sqrt{x^2} = |x|$ هرگاه $\sqrt{\ }$ و توان ۲ را ساده کردید، به جای x باید $|x|$ بنویسیم.

$$\left.\begin{array}{l}(-2)^2 = 4 \\ (+2)^2 = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{(\pm 2)^2} = |\pm 2| = 2$$

مثال: عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4+2a^2+1} = \sqrt{(a^2+1)^2} = |\underbrace{a^2+1}_{>0}| = a^2+1$

ب) $\sqrt{\underset{3+4}{7} - \underbrace{4\sqrt{3}}_{2\times 2\times\sqrt{3}}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(2)^2-2(2)(\sqrt{3})} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |\underbrace{2-\sqrt{3}}_{>0}| = 2-\sqrt{3}$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح x، تساوی $|x^2-9|+x^2=9$ برقرار است؟

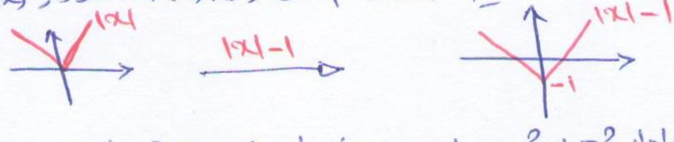
$$|x^2-9|=9-x^2 \Rightarrow x^2-9\le 0 \to (x-3)(x+3)\le 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -3\le x\le 3$$

$$\xrightarrow{x\in \mathbb{Z}} x=-3,-2,-1,0,1,2,3$$

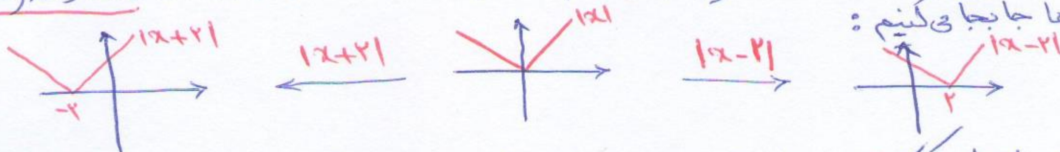
* رسم توابع قدرمطلق

✓ برای رسم نمودار توابع دارای قدرمطلق، از ۲ روش می‌توانیم استفاده کنیم:
۱- رسم به کمک انتقال نمودار $|x|$
۲- تعیین علامت و تبدیل به تابع چندضابطه‌ای

✓✓ یادآوری: اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار $f(x)+b$، نمودار $f(x)$ را b واحد روی محور yها جابجا کنیم:



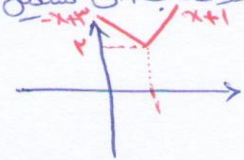
✓✓ یادآوری: اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار $f(x+a)$، نمودار $f(x)$ را $a-$ واحد (خلاف علامت a) روی محور xها جابجا می‌کنیم:



✓ در روش دوم، ابتدا به کمک تعیین علامت (با استفاده از ریشه عبارت داخل قدرمطلق)، قدرمطلق را برداشته و یک تابع دوضابطه‌ای تشکیل می‌دهیم و سپس هر ضابطه را در دامنه‌ی خود رسم می‌کنیم.

$$y=|\underbrace{x-1}_{\text{ریشه}: x=1}|+2=\begin{cases}(x-1)+2 & x\ge 1\\ -(x-1)+2 & x<1\end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ -x+3 & x<1\end{cases}$$

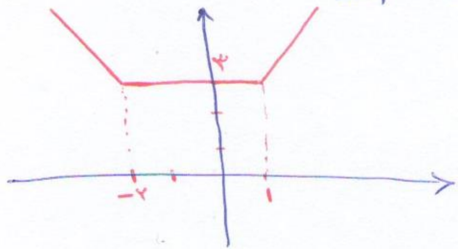
دامنه‌ها: $\begin{cases}x\ge 1\\ x<1\end{cases}$



مثال: نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=|\underbrace{x-1}_{x=1}|+|\underbrace{x+2}_{x=-2}|$ را رسم کنید.

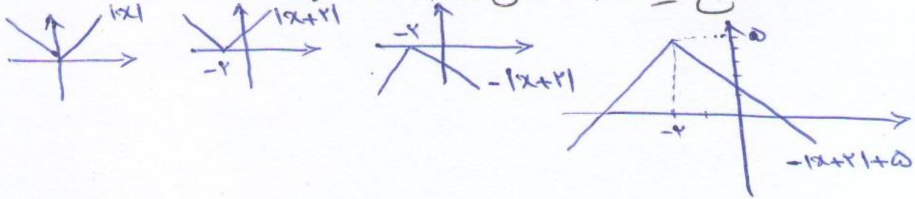
$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)-(x+2)=-2x-1 & x<-2\\ -(x-1)+(x+2)=3 & -2\leq x\leq 1\\ (x-1)+(x+2)=2x+1 & x>1\end{cases}$$

x		-2		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$

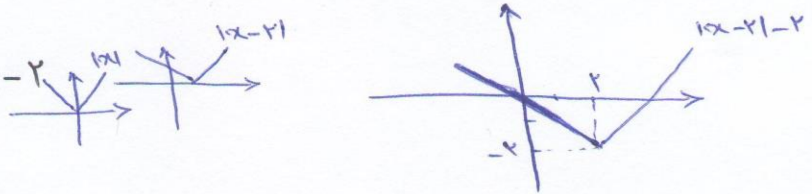


مثال: نمودار توابع زیر را با انتقال رسم کنید. (یادآوری: نمودار $-f(x)$، قرینه $f(x)$ نسبت به محور xها است)

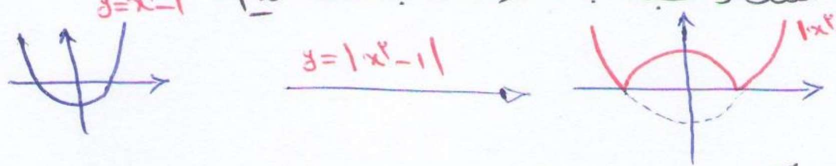
الف) $f(x)=5-|x+2|$



ب) $f(x)=|x-2|-2$

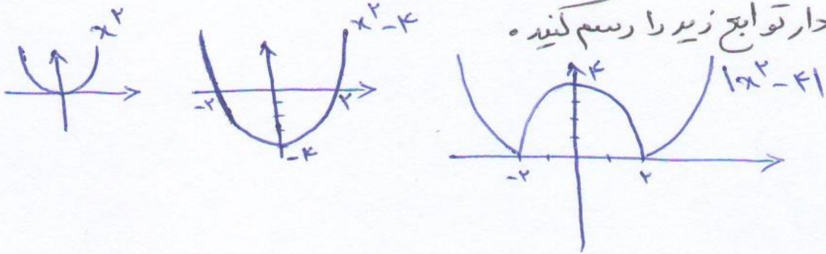


؟؟ نکته : برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ، کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و قرینه قسمت هایی از نمودار که زیر محور xها است را نسبت به محور xها به دست آوریم .

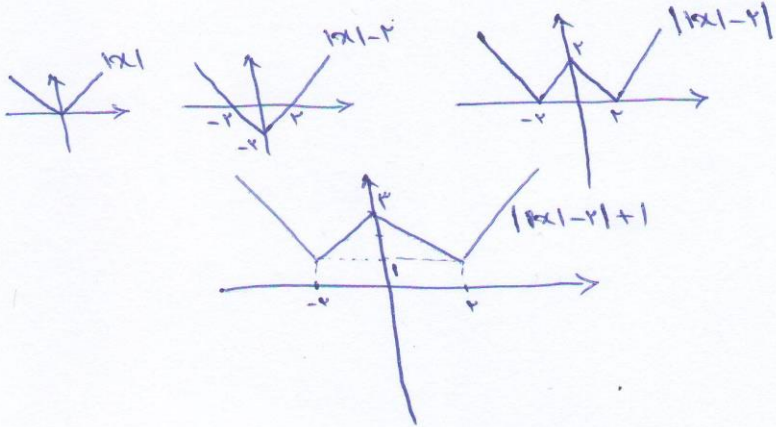


مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید .

الف) $y=|x^2-4|$



ب) $y=||x|-2|+1$



* ویژگی های قدر مطلق:

✓ در سال های قبل با برخی ویژگی های قدر مطلق آشنا شدیم:

الف) $|x| \geq 0$

ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

پ) $|x| = a \iff x = a$ یا $x = -a$

ت) $|x| = |a| \rightarrow x = \pm a$

ث) $|-x| = |x|$

ج) $|x|^2 = x^2$

مثال: a و b دو عدد حقیقی دلخواه اند:

الف) از رابطه $|a| = \sqrt{a^2}$ استفاده کرده و ثابت کنید:

$$|ab| = |a||b|$$

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$$

ب) با فرض $b \neq 0$ و استفاده از قسمت الف ثابت کنید:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = |a|\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

* معادلات قدرمطلق

✓ در قسمت (پ) ویژگی های قدرمطلق گفتیم : $|x|=a \Longleftrightarrow x=a$ یا $x=-a$

و در قسمت (ت) گفتیم : $|x|=|a| \Longleftrightarrow x=\pm a$

از این دو ویژگی برای حل معادلات قدرمطلق استفاده می کنیم.

روش اول : مثال : $|x-7|=3$

$$|x-7|=3 \begin{cases} \rightarrow x-7=3 \rightarrow x=10 \\ \rightarrow x-7=-3 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

۱۰ و ۴ جواب های معادله هستند

روش دوم : با به توان ۲ رساندن طرفین معادله هم می توانیم این معادله را حل کنیم :

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-7)^2=9 \rightarrow x^2-14x+49=9 \rightarrow x^2-14x+40=0 \rightarrow (x-10)(x-4)=0 \begin{cases} \rightarrow x=10 \\ \rightarrow x=4 \end{cases}$$

مثال : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $|3x-2|=|x-4|$

$$\begin{cases} \rightarrow 3x-2=x-4 \rightarrow 2x=-2 \rightarrow x=-1 \\ \rightarrow 3x-2=-x+4 \rightarrow 4x=6 \rightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

ب) $|x-1|=4-3x$

$$\begin{cases} \rightarrow x-1=4-3x \rightarrow 4x=5 \rightarrow x=\frac{5}{4} \\ \rightarrow x-1=3x-4 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

✓✓ معادله قسمت ب را به روش هندسی حل کنید.

* نامعادلات قدر مطلق:

اگر $c \neq 0$ باشد، جواب های نامعادلات قدر مطلق $|x|>c$ و $|x|<c$ به صورت زیر است:

$$|x|<c \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2<c^2 \to x^2-c^2<0 \to (x-c)(x+c)<0 \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}} -c<x<c$$

$$|x|>c \to \cdots \to x>c \cup x<-c$$

?? نکته: چند رابطه و نامساوی قدر مطلق:

(1) $\to -|a| \le a \le |a|$

(2) $\to -(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$

(3) $\to |a+b| \le |a|+|b|$ نامساوی مثلث

مثال: نامعادله زیر را حل کنید.

$$|x^2-1| \le 3 \to -3 \le x^2-1 \le 3 \xrightarrow{+1} -2 \le x^2 \le 4$$

$\to x^2 \ge -2 \to$ همواره برقرار $\to x \in \mathbb{R}$

$\to x^2 \le 4 \xrightarrow{\sqrt{}} |x| \le 2 \to -2 \le x \le 2$

$\xrightarrow{\cap}$

$$-2 \le x \le 2$$

* مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

- یادآوری:

در سال قبل با دنباله های حسابی و هندسی آشنا شدیم:

دنباله حسابی: $a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots \longrightarrow a_n = a_1+(n-1)d$ و $d = a_2 - a_1$

دنباله هندسی: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots \longrightarrow a_n = a_1q^{n-1}$ و $q = \dfrac{a_2}{a_1}$

مثال: در دنباله $3, 6, 9, 12, \dots$:

الف) جمله ی دوازدهم دنباله را بیابید.

$a_1 = 3$
$d = 6-3 = 3$
$\longrightarrow a_n = a_1+(n-1)d = 3+(n-1)3 = 3+3n-3 = 3n \longrightarrow a_{12} = 3(12) = 36$

ب) جمله چندم دنباله برابر ۱۰۲ است؟

$a_n = 102 \longrightarrow 3n = 102 \longrightarrow n = 34$ جمله ۳۴ اُم

مثال: اگر جملات چهارم و دهم یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۲ و ۱۲۸ باشند، قدر نسبت دنباله را بیابید.

$$\begin{cases} a_4 = 2 \longrightarrow a_1q^3 = 2 \\ a_{10} = 128 \longrightarrow a_1q^9 = 128 \end{cases} \longrightarrow \frac{a_{10}}{a_4} = \frac{\cancel{a_1}q^9}{\cancel{a_1}q^3} = \frac{128}{2} \longrightarrow q^6 = 64 \longrightarrow q = 2$$

- مجموع جملات دنباله حسابی :

✓ یک مثال ساده : می خواهیم حاصل $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ را بیابیم :

اگر این اعداد را از انتها به ابتدا زیر این اعداد بنویسیم ، داریم :

$$\begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ 11+11+11+11+11+11+11+11+11+11 = 10\times 11 \longrightarrow \text{مجموع اعداد} = \frac{10\times 11}{2} \end{array}$$

✓ اگر همین عمل را در حالت کلی انجام دهیم ، خواهیم داشت :

$$\begin{array}{l} a_1 ,\ a_1+d ,\ a_1+2d ,\ \cdots ,\ a_1+(n-1)d \\ a_1+(n-1)d ,\ a_1+(n-2)d ,\ \cdots ,\ a_1 \\ 2a_1+(n-1)d ,\ 2a_1+(n-1)d ,\ \cdots ,\ 2a_1+(n-1)d \longrightarrow 2S_n = n\times(2a_1+(n-1)d) \end{array}$$

$$\longrightarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]}$$

مثال: الف) اگر a_1 و a_n جملات ابتدا و انتهای دنباله حسابی باشند ، نشان دهید :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]} \qquad S_n = \frac{n}{2}[a_1 + \underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}] = \frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

ب) حاصل $1+2+3+\cdots+n$ را بیابید .

$$\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 1 \\ a_n = n \end{array} \longrightarrow S_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n] = \frac{n}{2}[1+n] = \frac{n(n+1)}{2}$$

?? نکته : $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n}{2}$

مثال: مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله ... و۷ و۴ و۱ را بیابید.

$a_1=1$

$d=4-1=3$

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{100}{2}[2(1)+(100-1)\times 3]=50[299]=14950$$

مثال: مجموع اعداد دورقمی مضرب ۴ را بیابید. اولین عدد دورقمی مضرب ۴: ۱۲

آخرین " " " " : ۹۶

ابتدا باید تعداد این اعداد را بیابیم:

$12, 16, 20, \ldots, 96$

$a_1=12$

$d=16-12=4$

$a_n=96$

$$a_n=a_1+(n-1)d \rightarrow 96=12+(n-1)4 \rightarrow n=22$$

$$S_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]=\frac{22}{2}[12+96]=11\times 108=1188$$

مثال: در یک دنباله حسابی اگر $S_n=3n^2+n$ باشد، جمله پنجم دنباله را بیابید.

به جای n اعداد ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم:

$$S_1=a_1=3(1)^2+1=4 \Rightarrow a_1=4 \rightarrow 4+a_2=14 \rightarrow a_2=10 \Rightarrow d=a_2-a_1=10-4=6$$

$$S_2=a_1+a_2=3(2)^2+2=14 \Rightarrow a_1+a_2=14$$

$$\Rightarrow a_n=4+(n-1)\times 6=6n-2 \rightarrow a_5=6(5)-2=28$$

؟؟ نکته: $\boxed{S_n-S_{n-1}=a_n}$

روش دوم:

$$a_n=S_n-S_{n-1}=3(n)^2+n-[3(n-1)^2+(n-1)]=6n-2 \rightarrow \ldots$$

- مجموع جملات دنباله هندسی:

در دنباله $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$ داریم:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

اگر طرفین رابطه بالا را در q ضرب کنیم، داریم:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

حال $S_n - S_nq$ را تشکیل می‌دهیم:

$$S_n - S_nq = a_1 - a_1q^n \to S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \to \boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

مثال: مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی مقابل را بیابید.

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

$a_1 = \frac{1}{8}$

$$\to S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{1}{8}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{1}{8}(2^{10}-1) = \frac{1023}{8}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$$

مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع شش جمله اول، ۹ برابر مجموع سه جمله اول است. قدر نسبت دنباله را بیابید.

$$S_6 = 9S_3 \to \frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}} = 9 \times \frac{\cancel{a_1}(1-q^3)}{\cancel{1-q}} \to \underbrace{(1-q^6)}_{(1+q^3)\cancel{(1-q^3)}} = 9\cancel{(1-q^3)} \to 1+q^3 = 9 \to q^3 = 8$$

$$\to q = 2$$

مثال: مجموع n جملهٔ اول یک دنباله هندسی، $S_n = 3^n - 1$ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

$$S_1 = a_1 = 3^1 - 1 = 2$$

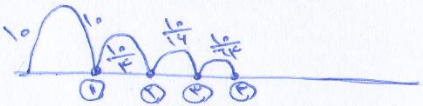
$$S_2 = a_1 + a_2 = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow 2 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 6$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$$

نکته: $\boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$

مثال: توپی داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع 10 متری برسد. این توپ پس از چهار بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟



ارتفاع توپ قبل از nاُمین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. پس داریم:

$$A_1 = 10 \,,\; A_2 = \frac{10}{4} \,,\; A_3 = \frac{10}{16} \,,\; A_4 = \frac{10}{64} \,,\; \dots \,,\; A_n = \frac{10}{4^{n-1}}$$

چون حرکت توپ به صورت یکبار به سمت بالا و یکبار به سمت پایین است، پس مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی با زمین به صورت زیر است:

$$20 \,,\; \frac{20}{4} \,,\; \frac{20}{16} \,,\; \dots \,,\; \frac{20}{4^{n-1}}$$

$$S_4 = \frac{20 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{20}{\frac{3}{4}}\left(1 - \frac{1}{256}\right) = \frac{80}{3} \times \frac{255}{256} \simeq 26.56$$