ریاضی الفبای زندگی است.

ریاضی (۲)

یازدهم تجربی

مصطفی حیدری طیب

فصل اول : هندسهٔ تحلیلی و جبر

۱. هندسهٔ تحلیلی

۲. معادله و تابع درجه ۲

۳. معادلات گویا و رادیکالی

درس ۱ : هندسهٔ تحلیلی

خداوند همواره به کار هندسه مشغول است.

می دانیم از هر دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد . بنابراین با داشتن معادله یک خط و مشخص کردن مختصات (آدرس) دو نقطهٔ دلخواه از خط ، می توان نمودار (قیافه یا ریخت) آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

شکل استاندارد معادله خط راست بصورت $\boxed{y=mx+n}$ است که در آن y به تنهایی (بدون ضریب و بدون توان) در سمت چپ تساوی است ، ضریب x را شیب خط و n را عرض از مبدأ می نامیم .

شکل درهم ریخته معادله خط بصورت $\boxed{ax+by+c=0}$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند.

در فرم درهم ریخته، تمام جملات سمت چپ تساوی هستند . a ، ضریب x و b ، ضریب y و c مقدار ثابت است .

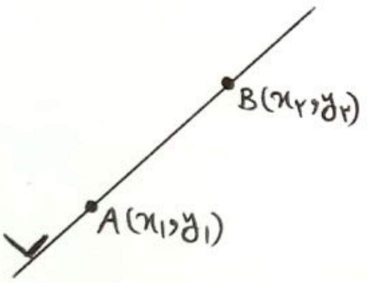
در فرم درهم ریخته شیب از رابطه زیر بدست می آید :

$$m=-\frac{a}{b} \qquad \text{شیب خط} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$$

زیرا :

$$ax+by+c=0$$

$$\Rightarrow by=-ax-c \xrightarrow{\div b} y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{\text{شیب خط}}x-\frac{c}{b}$$



$$\text{شیب خط} = \frac{\text{اختلاف عرض ها}}{\text{اختلاف طول ها}}$$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

فرمول نقطه - شیب :

$$y=m(x-x_1)+y_1$$

مثال . شیب خط به معادله $3y+4x=12$ را مشخص کنید.

روش اول . خط را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$3y=-4x+12 \xrightarrow{\div 3} y=\frac{-4}{3}x+4 \rightarrow m=\frac{-4}{3}$$

روش دوم . از رابطه $m=-\frac{a}{b}$ استفاده می‌کنیم

ضریب x : $a=4$ ضریب y : $b=3$

$$m=-\frac{a}{b}=-\frac{4}{3}$$

مثال . معادله خطی را بنویسید که از نقاط $(-1,2)$ و $(1,5)$ بگذرد.

$$A(\underset{x_1}{-1},\underset{y_1}{2}) \qquad B(\underset{x_2}{1},\underset{y_2}{5})$$

$$\rightarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-2}{1-(-1)}=\frac{3}{2}$$

$$y=m(x-x_1)+y_1 \rightarrow y=\frac{3}{2}(x-(-1))+2$$

$$\rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+2=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$$

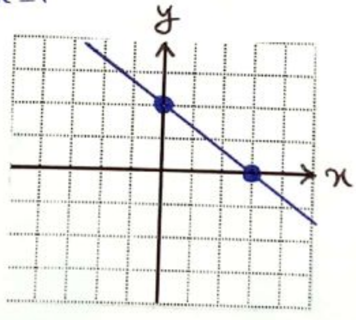
مثال . نمودار خط به معادله $2x+3y=6$ را رسم کنید.

کافی است مختصات دو نقطه دلخواه از آن را داشته باشیم . در شکل درهم‌ریخته بهتر است یکبار $x=0$ و یکبار $y=0$ را جاگذاری کنیم.

$$x=0 \rightarrow 2(0)+3y=6 \rightarrow y=2$$

$$y=0 \rightarrow 2x+3(0)=6 \rightarrow x=3$$

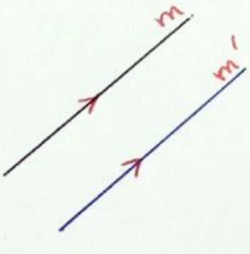
x	0	3
y	2	0

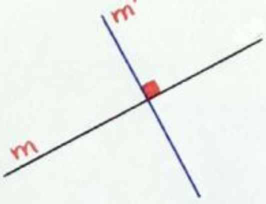


✓ وضعیت نسبی دو خط در صفحه :

دو خط در صفحه یا متقاطع‌اند و یا موازی .

- در اینجا تنها حالت تقاطع دو خط ، یعنی زمانی که بر هم عمود اند (زاویه بینشان $90°$ است) را بررسی می‌کنیم .
- اگر دو خط با هم موازی باشند ، آنگاه شیب‌های آن‌ها با هم برابر است . $m=m'$
- دو خط زمانی برهم عمودند که حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 شود یعنی $m\times m'=-1$





$$m=\frac{-1}{m'} \qquad m'=\frac{-1}{m}$$

بنابراین شیب دو خط عمود برهم ، عکس و قرینه هم می‌باشند .

مثال. وضعیت نسبی دو خط $L_1: 2x-3y=1$ و $L_2: 4x=6y+3$ را نسبت به هم مشخص کنید.

ابتدا شیب هرکدام را تعیین می‌کنیم:

$$L_1:\ 2x-3y=1 \xrightarrow[b=-3]{a=2} m=-\frac{a}{b}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$L_2:\ 4x=6y+3 \rightarrow 4x-6y=3 \xrightarrow[b=-6]{a=4} m'=-\frac{a}{b}=-\frac{4}{-6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

چون $m=m'$ پس این دو خط با هم موازیند.

مثال. معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1,0)$ بگذرد و بر خط $3x-4y=7$ عمود باشد.

نقطه $A(\underset{x_1}{-1},\underset{y_1}{0})$ را داریم اما شیب خط را در اختیار نداریم. چون خط مورد نظر باید بر خط $3x-4y=7$ عمود باشد لذا شیب آن قرینه و معکوس شیب این خط است:

$$3x-4y=7 \rightarrow m=-\frac{a}{b}=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$$

قرینه و عکس $m'=-\frac{4}{3}$

$$y=m'(x-x_1)+y_1=-\frac{4}{3}(x-(-1))+0=\frac{-4}{3}x-\frac{4}{3}$$

مثال. دو خط به معادله $(m-1)x+5y=3$ و $3x+(4+m)y=1$ داده شده‌اند.

الف) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.

ب) مقدار m را چگونه‌ای بیابید که این دو خط برهم عمود باشند.

حل الف) دو خط موازی شیب برابر دارند

$$\text{شیب خط اولی}=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{m-1}{5}$$

$$\text{شیب خط دومی}=-\frac{3}{4+m}$$

شیب‌ها برابر $\Rightarrow -\frac{m-1}{5}=-\frac{3}{4+m}$

$$(m-1)(4+m)=15$$

$$4m+m^2-4-m-15=0$$

$$m^2+3m-19=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(-19)=9+76=84$$

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{84}}{2(1)}$$

حل ب) دو خط زمانی برهم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان -1 شود.

$$\left(-\frac{m+1}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{4+m}\right)=-1 \Rightarrow \frac{3m+3}{20+5m}=-1$$

$$\Rightarrow 3m+3=-20-5m$$

$$\Rightarrow 3m+5m=-20-3 \Rightarrow 8m=-23$$

$$m=\frac{-23}{8}$$

تمرین. مقدار m را طوری بیابید که دو خط $4x+2y=9$ و $(2m+1)x+2y=7$ باهم موازی باشند.

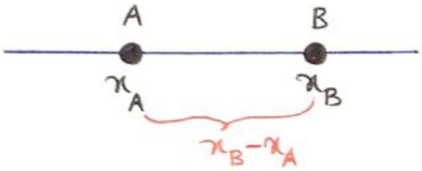
✓ فاصله دو نقطه:

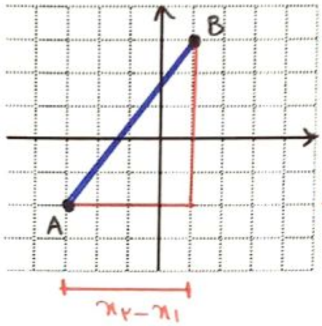
- اگر A و B دو نقطه هم‌عرض (یعنی عرض‌شان یکی باشد) در صفحه باشند آنگاه فاصله بین آنها از رابطه $AB=|x_B-x_A|$ به دست می‌آید.
- اگر C و D دو نقطه هم‌طول (یعنی طول‌شان یکی باشد) در صفحه باشند آنگاه فاصله بین آنها از رابطه $CD=|y_D-y_C|$ به دست می‌آید.
- در حالت کلی فاصله دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

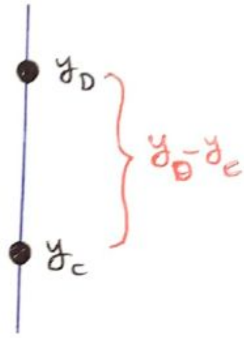
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(\text{تفاضل عرض‌ها})^2+(\text{تفاضل طول‌ها})^2}$$

فرمول خط‌کش!



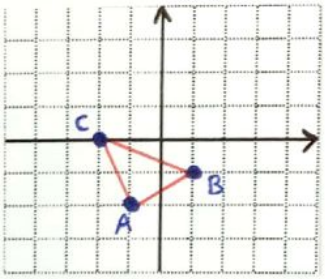




مثال. نقاط $A(-1,-2)$ و $B(1,-1)$ و $C(-2,0)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث ABC را رسم کنید. ب) نوع مثلث را مشخص کنید. ج) مساحت مثلث را به دست آورید.

به کمک فرمول خط‌کش اندازه اضلاع مثلث را محاسبه می‌کنیم:



$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(-1-(-2))^2}$$

$$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{(-2-1)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

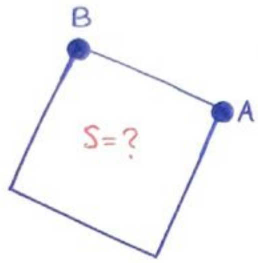
$$AC=\sqrt{(-2-(-1))^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

چون $(\sqrt{10})^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2$ یعنی رابطه فیثاغورس در این مثلث برقرار است. $BC^2=AB^2+AC^2$

لذا $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه است $(\hat{A}=90^\circ)$

از طرفی مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب ارتفاع در قاعده. یعنی:

$$S=\frac{1}{2}AC\times AB=\frac{1}{2}\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times 5=۲/۵$$



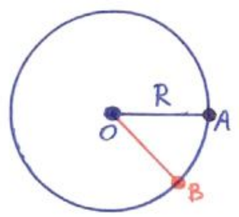
مثال. اگر نقاط $A(-1,4)$ و $B(3,3)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، مساحت مربع را بیابید.

$$\text{مساحت مربع} = (\text{یک ضلع})^2$$

اندازه ضلع مربع $AB = \sqrt{(3-(-1))^2+(3-4)^2} = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

$$S = (\sqrt{17})^2 = 17$$

مثال. دایره‌ای به مرکز $(3,1)$، از نقطه $(5,-2)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید. آیا نقطه $(6,3)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟



$O(3,1)$

$A(5,-2) \rightarrow OA = \sqrt{(5-3)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow$ شعاع دایره = فاصله مرکز تا محیط $= R = \sqrt{13}$

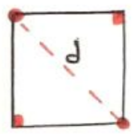
برای اینکه نقطه‌ای روی محیط دایره باشد باید فاصله‌اش تا مبدأ برابر شعاع دایره باشد

$B(6,3) \rightarrow OB = \sqrt{(6-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = R$

لذا نقطه $(6,3)$ روی دایره واقع است.

جهان بی‌وفا جایی سه‌پنج است — ز مرکز تا محیط اندوه و رنج است

تمرین. اگر نقاط $(2,-1)$ و $(3,0)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را بدست آورید.



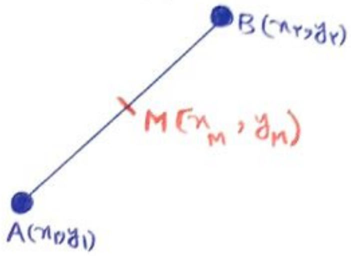
$$\left(S_{\text{مربع}} = \frac{d \times d}{2} = \frac{d^2}{2}\right)$$

تمرین. نقاط $A(-2,1)$ و $B(2,4)$ و $C(4,-7)$ مفروضند. نشان دهید مثلث ABC در رأس A قائم است. سپس محیط مثلث را بدست آورید.

✓ نقطه وسط پاره خط

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ آنگاه مختصات M نقطه وسط پاره خط AB برابر است با

$$M\left(\frac{\text{مجموع طول‌ها}}{2}, \frac{\text{مجموع عرض‌ها}}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

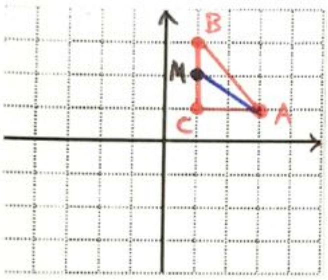


مثال. مثلث با رأس‌های $A(3,1)$ ، $B(1,3)$ ، $C(1,1)$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات M وسط ضلع BC را به دست آورید.

پ) طول میانه AM را محاسبه کنید.

ج) معادله میانه AM را بنویسید.



$$M\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) = M\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = M(1,2) \leftarrow$$

$$AM = \sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \leftarrow$$

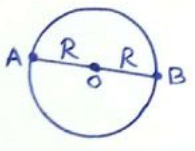
← برای اینکه معادله میانه AM را به دست آوریم ابتدا باید شیب خط گذرنده از نقاط A و M را محاسبه کنیم و در فرمول نقطه-شیب جاگذاری کنیم:

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{2-1}{1-3} = \frac{-1}{2}$$

$$\underset{x_1\ y_1}{A(3,1)} \qquad y = m(x-x_1)+y_1 = \frac{-1}{2}(x-3)+1$$

$$= \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} + 1 = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$$

مثال. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2,-4)$ و $B(-6,2)$ هستند. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع را به دست آورید.



$$O\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{2+(-6)}{2}, \frac{(-4)+2}{2}\right) = (-2,-1)$$

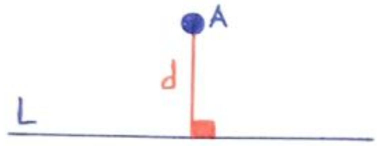
$$OA = R = \sqrt{(-2-2)^2+(-1-(-4))^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

تمرین. اگر $A(14,3)$ و $B(10,-13)$ باشند، فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

✓ فاصله نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصله A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L.

اگر مختصات نقطه A به صورت $A(x_0, y_0)$ و معادله خط L به شکل درهم‌ریخته $ax+by+c=0$ باشد، آنگاه از فرمول زیر برای محاسبه فاصله نقطه A از خط L استفاده می‌کنیم:



$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

فاصله‌ها همواره مثبت‌اند

distance

$(x \text{ ضریب})^2+(y \text{ ضریب})^2$

– برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱. همهٔ اجزای خط در یک طرف تساوی باشند.

۲. در معادله خط به جای x، طول نقطه (x_0) و به جای y، عرض نقطه (y_0) را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم سپس حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

۳. ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم سپس جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

۴. نسبت عدد قسمت ۲ به قسمت ۳ فاصله بین نقطه و خط می‌باشد.

مثال. فاصله نقطه $A(-2,5)$ را از خط به معادله $3x-y=2$ به دست آورید.

$A(-2,5)$: $x_0=-2$ ، $y_0=5$

$3x-y=2 \rightarrow 3x-1y-2=0 \qquad a=3 \quad b=-1 \quad c=-2$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(-2)-1(5)-2|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2}}=\frac{|-13|}{\sqrt{10}}=\frac{13}{\sqrt{10}}$$

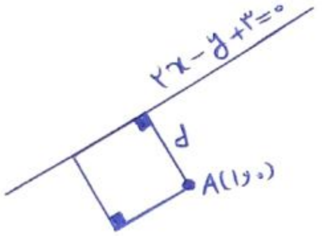
مثال. فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-3)$ از خط $3x+4y=k$ برابر ۲ است. مقدار k را به دست آورید.

$3x+4y-k=0$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow 2=\frac{|3(2)+4(-3)-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-6-k|}{\sqrt{25}}=\frac{|-(6+k)|}{5}$$

$$\Rightarrow 2=\frac{6+k}{5} \Rightarrow 6+k=10 \Rightarrow k=4$$

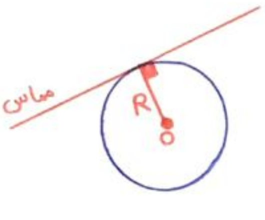
مثال. یکی از اضلاع مربعی روی خط به معادله $2x = y-3$ واقع است. اگر نقطه $(1,0)$ یکی از رأس های این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



فاصله نقطه $(1,0)$ (x_0, y_0) را از خط $2x - y + 3 = 0$ به دست می‌آوریم تا اندازهٔ ضلع مربع حاصل شود:

$$d = \frac{|2(1) - 0 + 3|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 5$$

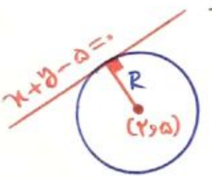
$$S_{\text{مربع}} = (\text{یک ضلع})^2 = 5^2 = 25$$



تذکر. شعاع دایره، در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

مساحت دایره $S = \pi R^2$ محیط دایره $P = 2\pi R$

مثال. محیط و مساحت دایره‌ای به مرکز $(2,5)$ و مماس بر خط به معادله $y = -x+5$ را به دست آورید.



$$x+y-5=0$$

$$\text{شعاع دایره } R = \frac{|2+5-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

$$\Rightarrow R = 2$$

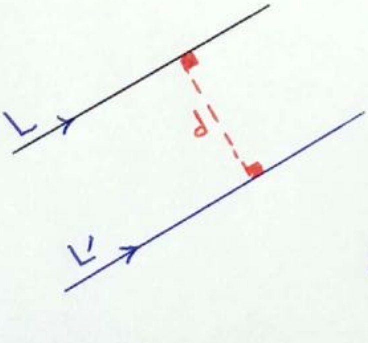
$$S = \pi R^2 = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$P = 2\pi R = 2\pi(2) = 4\pi$$

تمرین. خط $L: 3x-4y=0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2,-1)$ مماس است. قطر دایره را به دست آورید.

✓ فاصله بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط را درنظر گرفته و فاصله آن را از خط دیگر به دست می‌آوریم.
اما می‌توان این فاصله را به کمک فرمول زیر نیز به دست آورد:



$L: ax+by+c=0$ $L': ax+by+c'=0$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

توجه کنید! وقتی می‌توانیم از این فرمول استفاده کنیم که ضرائب xها باهم و ضرائب yها نیز باهم برابر باشند.

مثال. نشان دهید که دو خط $-3x+4y+7=0$ و $-6x+8y-5=0$ باهم موازی‌اند سپس فاصله بین آن‌ها را بیابید.

می‌دانیم که دو خط موازی دارای شیب‌های یکسان هستند.

$$m=-\frac{a}{b}=-\frac{-3}{4}=\frac{3}{4} \qquad m'=-\frac{a'}{b'}=-\frac{-6}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

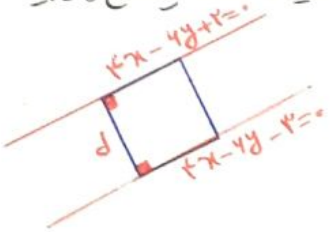
$$m=m' \Rightarrow \text{موازیند}$$

باید ضرایب را یکسان کنیم، کافیست معادله اولی را در ۲ ضرب کرده و از فرمول $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ استفاده کنیم:

$$-3x+4y+7=0 \xrightarrow{\times 2} -6x+8y+14=0 \rightarrow c'=14$$

$$d=\frac{|-5-14|}{\sqrt{(-6)^2+(8)^2}}=\frac{19}{10}=1.9$$

مثال. معادلهٔ اضلاع مربعی به صورت $2x-3y+1=0$ و $4x-6y-3=0$ هستند. محیط و مساحت این مربع را بیابید.



خطوط داده شده موازیند زیرا شیب یکسان دارند $\quad m=m'=\frac{2}{3}$

فاصله دو خط داده شده، ضلع مربع را می‌دهد. لذا:

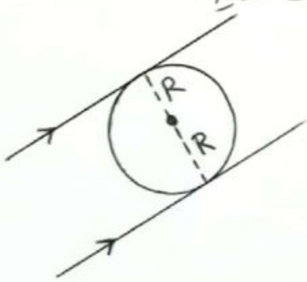
$$2x-3y+1=0 \xrightarrow{\times 2} 4x-6y+2=0$$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3-2|}{\sqrt{(4)^2+(-6)^2}}=\frac{5}{\sqrt{52}}$$

مساحت مربع $\quad S=(\text{ضلع})^2=\left(\frac{5}{\sqrt{52}}\right)^2=\frac{25}{52}$

محیط مربع $\quad P=4\times(\text{ضلع})=4\times\frac{5}{\sqrt{52}}=\frac{20}{\sqrt{52}}$

تمرین. دایره‌ای بر دو خط $y-2x+1=0$ و $2y-4x=-8$ مماس است. شعاع دایره را به‌دست آورید.



درس ۲: معادله و تابع درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$
$$y=f(x)=ax^2+bx+c$$

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن a و b و c اعدادی حقیقی و $a\neq 0$ باشد را یک معادله درجه ۲ می‌نامیم.
این معادله را به شیوه‌های مختلفی مانند: تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل، فرمول کلی (دلتا) حل می‌کنیم.

$$\Delta=b^2-4ac \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{if: } a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}\end{cases} \qquad \text{if: } a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-c}{a}\end{cases}$$

✓ حل معادلاتی که به معادله درجه دوم تبدیل‌پذیر هستند.

گاهی اوقات با معادلاتی مواجه می‌شویم که درجه ۲ نیستند، ولی با یک تغییر متغیر می‌توان آن‌ها را به معادله‌ی درجه ۲ تبدیل کرد. بعد از حل معادله درجه ۲ می‌توان، ریشه‌های معادله اولیه را در صورت وجود یافت.

مثال. معادله $x^4-2x^2-3=0$ را با تغییر متغیر $x^2=U$ حل کنید.

$$x^4-2x^2-3=0 \rightarrow (x^2)^2-2(x^2)-3=0$$
$$\rightarrow U^2-2U-3=0$$
$$\rightarrow (U-3)(U+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} U=3 \xrightarrow{x^2=U} x^2=3 \xrightarrow{\sqrt{}} x=\pm\sqrt{3} \\ U=-1 \xrightarrow{\quad''\quad} x^2=-1 \ \# \end{cases}$$

مثال. با یک تغییر متغیر مناسب، معادله زیر را حل کنید. $x^6-2x^3+1=0$

کافیست $x^3=U$ را در نظر بگیریم.

$$(x^3)^2-2(x^3)+1=0 \xrightarrow{x^3=U} U^2-2U+1=0$$
$$\rightarrow (U-1)(U-1)=0 \Rightarrow U=1$$
$$\Rightarrow x^3=1 \overset{\sqrt[3]{}}{\Rightarrow} x=\sqrt[3]{1} \Rightarrow x=1$$

مثال. معادله $(2x^2-1)^2=7+6(2x^2-1)$ را حل کنید.

تغییر متغیر: $2x^2-1=U$

$$\rightarrow U^2=7+6U \rightarrow U^2-6U-7=0$$

$$(u-2)(u+1)=0 \begin{cases} u=2 \rightarrow 2x^2-1=2 \rightarrow 2x^2=8 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \\ u=-1 \rightarrow 2x^2-1=-1 \rightarrow 2x^2=0 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

تمرین. معادلهٔ زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید:

$$x^4+3x^2+2=0$$

$$(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5=0$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به کمک روابط زیر یافت:

مجموع S: sum ضرب P: product α و β ریشه‌ها

$$(\text{مجموع دو ریشه})\quad S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$(\text{حاصل‌ضرب دو ریشه})\quad P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

مثال. در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$a=-2 \qquad b=1 \qquad c=5$

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}=0/5 \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{5}{-2}=-2/5$$

مثال. اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+(2k+5)x-1=0$ برابر ۶ شود، مقدار k را به دست آورید.

$$S=-\frac{b}{a}=6 \rightarrow -\frac{2k+5}{3}=6$$

$$2k+5=-18$$

$$2k=-23 \rightarrow k=\frac{-23}{2}$$

مثال. اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $-mx^2+3x+m-1=0$ برابر -2 باشد، مقدار m چقدر است؟

$$P=\frac{c}{a}=-2 \rightarrow \frac{m-1}{-m}=-2 \rightarrow m-1=2m \rightarrow m=-1$$

تمرین. در معادلهٔ $2x^2-(2m+1)x+m=0$ اگر مجموع ریشه‌ها برابر ۱ باشد مقدار m را به دست آورید.

۷) تشکیل معادله درجه ۲ با داشتن S و P

گاهی اوقات برای حل یک مسأله باید معادله درجه دومی تشکیل دهیم و سپس آن را حل کنیم. اگر α و β ریشه های یک معادله درجه دوم باشند آنگاه ابتدا S (مجموع ریشه ها) و P (حاصلضرب ریشه ها) را بدست می آوریم و سپس معادله زیر را تشکیل می دهیم:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

ریشه ها:

$$\begin{cases} x=\alpha \to x-\alpha=0 \\ x=\beta \to x-\beta=0 \end{cases} \xrightarrow{\times} (x-\alpha)(x-\beta)=0 \to x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}x+\underbrace{\alpha\cdot\beta}_{P}=0$$

$$\to x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $3+\sqrt{5}$ و $3-\sqrt{5}$ باشند.

$$S=(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6$$

$$P=(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})=(3)^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$$

$$x^2-Sx+P=0 \to x^2-6x+4=0$$ معادله خواسته شده

مثال: طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۵ و محیط آن ۱۷ باشد.

$$\text{محیط}=17=2(\alpha+\beta) \to \alpha+\beta=\frac{17}{2} \to \beta=\frac{17}{2}-\alpha \quad *$$

$$\text{مساحت}=15=\alpha\cdot\beta \to \alpha\left(\frac{17}{2}-\alpha\right)=15$$

$$\to \frac{17}{2}\alpha-\alpha^2=15 \to \alpha^2-\frac{17}{2}\alpha+15=0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2\alpha^2-17\alpha+30=0$$

$$\Delta=(-17)^2-4(2)(30)=289-240=49$$

$$\alpha=\frac{17\pm 7}{4} \begin{cases} \alpha=6 \xrightarrow{*} \beta=\frac{17}{2}-6=\frac{5}{2}=2/5 \\ \alpha=\frac{5}{2} \xrightarrow{*} \beta=\frac{17}{2}-\frac{5}{2}=\frac{12}{2}=6 \end{cases}$$

تمرین: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ باشند.

تمرین: دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن ها $\frac{13}{4}$ و حاصل ضرب شان -3 باشد.

✓ ماکزیمم Max و مینیمم min سهمی

نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ را سهمی می‌گوییم که همواره به یکی از دو صورت زیر است:

به Max یا min سهمی، رأس سهمی می‌گوییم. موضوع اصلی یافتن مختصات رأس سهمی است که می‌توان از

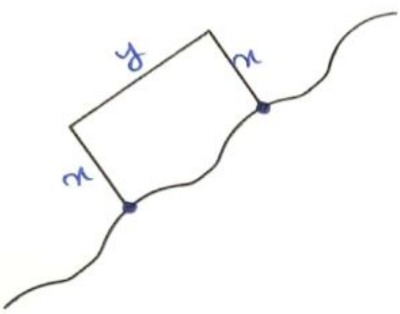
$$S\left(-\frac{b}{2a}\,,\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

استفاده کرد.

البته می‌توانیم طول رأس را از $x=-\frac{b}{2a}$ به دست آوریم و در سهمی جایگذاری کنیم تا عرض رأس به دست آید.

عرض رأس سهمی $=$ مقدار Max یا min سهمی

مثال. مطابق شکل با طنابی به طول ۲۰ متر، قطعه زمینی مستطیل شکل را کنار رودخانه جدا می‌کنیم. حداکثر مساحت را به دست آورید.



طول طناب $=20$

$$x+y+x=20 \rightarrow y+2x=20 \rightarrow y=20-2x \quad *$$

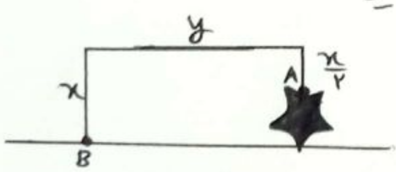
$$S_{Max}=x\cdot y \overset{*}{=} x(20-2x)=20x-2x^2$$

$$=-2x^2+20x$$

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{20}{2(-2)}=5 \xrightarrow[*]{\text{جایگذاری}} y=20-2(5)=10$$

$$S_{Max}=x\cdot y=5\times 10=50$$ مترمربع

مثال. در شکل روبه‌رو، از A تا B را با طنابی به طول ۱۰ متر محصور کرده‌ایم. حداکثر مساحت مستطیل را به دست آورید.



$$x+y+\frac{x}{2}=10 \rightarrow y+\frac{3}{2}x=10 \rightarrow y=-\frac{3}{2}x+10 \quad *$$

$$S_{Max}=x\cdot y=x\left(-\frac{3}{2}x+10\right)=-\frac{3}{2}x^2+10x$$

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{10}{2(-\frac{3}{2})}=\frac{10}{3}$$

$$\overset{*}{\rightarrow} y=-\frac{3}{2}\left(\frac{10}{3}\right)+10=-5+10=5$$

$$S_{Max}=\frac{10}{3}\times 5=\frac{50}{3}$$ مترمربع

تمرین. بیش‌ترین مساحت زمینی به شکل مستطیل که با طنابی به طول ۸۸ متر در حاشیه رودخانه‌ای محصور می‌شود چقدر می‌باشد؟

✓ صفرهای تابع درجه ۲

نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم.

- برای پیدا کردن صفرهای تابع f باید معادله $f(x)=0$ را حل کنیم.

- در تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ می‌توان تعداد صفرهای تابع را به کمک علامت Δ مشخص کرد.

- محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور yها، برابر $f(0)=c$ می‌باشد.

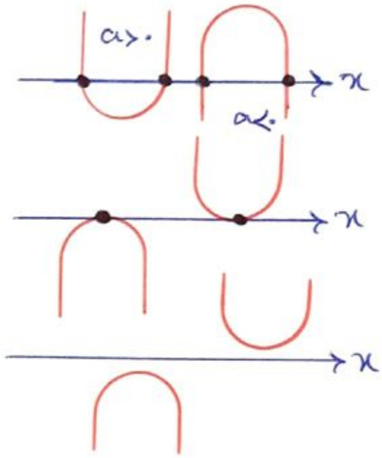
محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

if: $\Delta > 0$ → دو ریشه متمایز داریم

if: $\Delta = 0$ → یک ریشه مضاعف داریم

if: $\Delta < 0$ → ریشه نداریم



✓ تعیین علامت ضرایب a و b و c به کمک نمودار

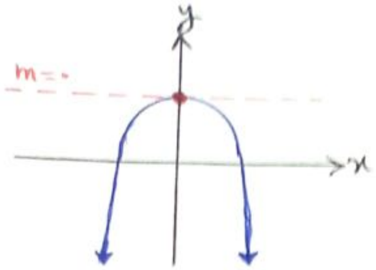
اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در اختیار باشد می‌توانیم علامت ضرایب a و b و c را اینگونه مشخص کنیم:

- اگر سهمی رو به بالا باشد $a>0$ و اگر رو به پایین باشد $a<0$ می‌باشد.

- علامت c را هم می‌توان به کمک عرض از مبدأ یافت. اگر نمودار محور عرض‌ها را زیر مبدأ قطع کند $c<0$ و اگر آن را بالای مبدأ قطع کند $c>0$ است و اگر از مبدأ بگذرد $c=0$ خواهد بود.

- علامت b را هم می‌توان به کمک طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ پیدا کرد (با توجه به علامت a و علامت x). اگر طول رأس بعد از مبدأ باشد $\frac{-b}{2a}>0$ و b با a مختلف‌العلامت است، اما اگر رأس قبل از مبدأ باشد $\frac{-b}{2a}<0$ و b با a هم علامت خواهد بود. اگر طول رأس صفر باشد، $b=0$ خواهد شد.

تذکر: برای یافتن علامت b کافی است در نقطه برخورد با محور عرض‌ها، خط مماس بر نمودار را رسم کنیم. اگر شیب آن مثبت بود آنگاه b مثبت می‌شود و اگر شیب آن منفی بود آنگاه b منفی می‌شود.

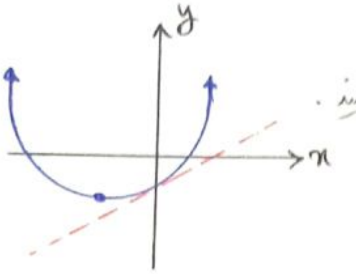


مثال. به کمک نمودار $f(x)=ax^2+bx+c$ علامت ضرایب a و b و c را مشخص کنید.

چون دهانه سهمی رو به پائین است پس $a<0$

چون نمودار محور yها را در بالای مبدأ قطع کرده است لذا $c>0$

چون در نقطه c، شیب خط مماس صفر است لذا $b=0$ خواهد بود.



مثال. نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ رسم شده است. در مورد a و b و c و Δ بحث کنید.

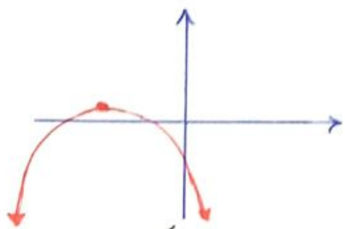
دهانه سهمی رو به بالا است : $a>0$

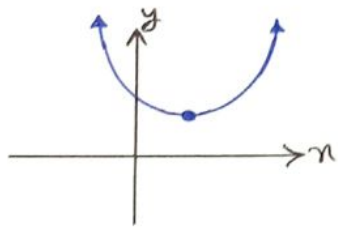
نمودار محور طول‌ها را در ۲ نقطه قطع کرده است : $\Delta>0$

" " عرض‌ها " " زیر مبدأ قطع کرده است : $c<0$

در نقطه c شیب خط مماس، مثبت است لذا : $b>0$

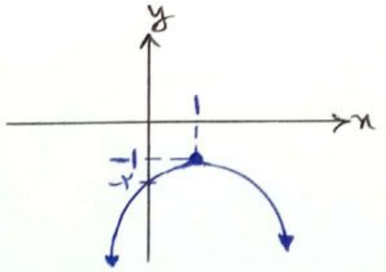
مثال. سهمی $y=ax^2+bx+c$ را با شرایط $a<0$ ، $b<0$ ، $c<0$ رسم کنید.





تمرین. با توجه به نمودار سهمی روبه‌رو در مورد Δ ، a ، b و c بحث کنید.

تذکر. با در اختیار داشتن نمودار یک سهمی می‌توان ضابطه آن را بصورت $y=ax^2+bx+c$ نوشت. به عبارتی در اینجا می‌خواهیم از سخت‌افزار به نرم‌افزار برسیم. (کاری که عکس آن را در پایه دهم انجام می‌دادیم.) **هدف:** یافتن ضرایب a و b و c



مثال. معادله سهمی مقابل را بنویسید.

$$y=ax^2+bx+c$$

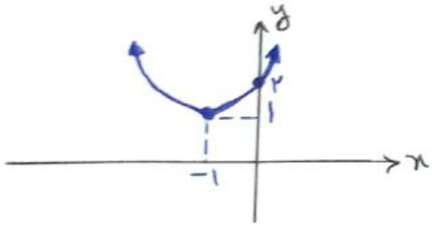
$$(0,-2)\rightarrow -2=a(0)^2+b(0)+c \rightarrow c=-2$$

$$(1,-1)\rightarrow -1=a(1)^2+b(1)-2 \rightarrow a+b=1 \ *$$

$$x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow 1=\frac{-b}{2a} \rightarrow b=-2a$$

$$\xrightarrow[b=-2a]{*} a-2a=1 \rightarrow a=-1 \longrightarrow b=-2(-1) \rightarrow b=2$$

$$\therefore \quad y=-1x^2+2x-2$$



مثال: نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل روبه‌رو است.
حاصل $\frac{b+c}{a}$ را به‌دست آورید.

$$(-1,1)\in f \to f(-1)=1 \Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=1$$

$$\Rightarrow a-b+c=1 \;\bullet$$

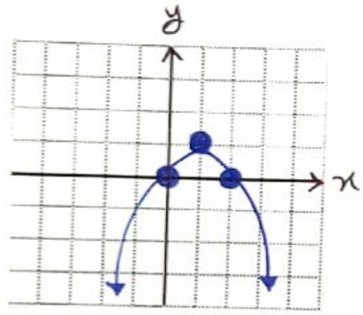
$$(0,2)\in f \to f(0)=2 \to a(0)^2+b(0)+c=2 \to c=2$$

$$\xrightarrow[c=2]{\bullet} a-b+2=1 \to a-b=-1 \;\blacksquare$$

$$x=\frac{-b}{2a}=-1 \Rightarrow b=2a \;\blacktriangle$$

$$\xrightarrow[b=2a]{\blacksquare} a-2a=-1 \to -a=-1 \to a=1 \xrightarrow{\blacktriangle} b=2(1) \to b=2$$

مقدار خواسته شده $\frac{b+c}{a}=\frac{2+2}{1}=4$



تمرین: معادله تابع مقابل را بنویسید.

درس ۳: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

تعریف نشده ها در ریاضی

$\frac{\text{عدد}}{0}$

$\sqrt{\text{منفی}}$

الف) معادلات گویا

معادلاتی که صورت و مخرج شان چندجمله ای باشد را معادلات گویا می نامیم. مثل

$$\frac{2x+1}{x^2-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{x}{x-1}$$

برای حل اینگونه معادلات، طرفین را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود (مخرج زدایی می کنیم!) بعد از ساده کردن حاصل به دست آمده، معادله را حل می کنیم و در انتها ریشه هایی که مخرج کسرها را صفر می کنند (یا در عالم واقعیت بی معنی هستند!!!) را از ریشه ها کنار می گذاریم.

ک.م.م مخرج ها ← حذف مخرج ها ← بازگشت به عقب

مثال. معادله گویای زیر را حل کنید.

$$\frac{2x+1}{x^2-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{x}{x-1}$$

می دانیم که $x^2-1=(x-1)(x+1)$ پس طرفین معادله را در $(x-1)(x+1)$ ضرب می کنیم:

$$\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}\times\frac{2x+1}{\cancel{x^2-1}}+(x-1)\cancel{(x+1)}\times\frac{x-1}{\cancel{x+1}}=\cancel{(x-1)}(x+1)\times\frac{x}{\cancel{x-1}}$$

$$\Rightarrow 2x+1+(x-1)(x-1)=(x+1)x$$

$$\Rightarrow 2x+1+x^2-1x-1x+1=x^2+x$$

$$\Rightarrow 2=x \checkmark$$

$x=2$ قابل قبول است زیرا مخرج کسرهای معادله را صفر نمی کند.

مثال. معادله $\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{9-x^2}$ را حل کنید.

کسر سمت راست یعنی $\frac{12}{9-x^2}$ را می توان به شکل $\frac{-12}{x^2-9}$ نوشت. $x^2-9=(x-3)(x+3)$

تمام معادله را در $x(x-3)(x+3)$ ضرب می کنیم:

$$x(x-3)(x+3)\times\left[\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}\right]=x(x-3)(x+3)\times\left[\frac{-12}{x^2-9}\right]$$

$$\Rightarrow 3\underbrace{(x-3)(x+3)} - 2x(x+3) = -12x$$

$$3(x^2-9) - 2x^2 - 6x = -12x$$

$$3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x + 12x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x+9)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 & \checkmark \\ x = 3 & \times \end{cases}$$

$x=3$ غیرقابل قبول است زیرا مخرج کسرهای معادله را صفر می‌کند.

تمرین. معادله گویای مقابل را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$$

تذکر. جواب هر معادله در خودِ معادله صدق می‌کند! کاربرد این مطلب در این است که در برخی معادلات پارامتری مانند a وجود دارد. در اینگونه سوالات یک ریشه از معادله داده می‌شود و ریشه دیگر خواسته می‌شود. با جایگذاری ریشه در معادله، مقدار پارامتر را می‌یابیم و معادله را به حالت عادی (بدون پارامتر) برمی‌گردانیم. با حل معادله سایر ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم.

مثال. به ازای چه مقدار a، معادله $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{a} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{x=1} \frac{1}{(1)-2} + \frac{8}{a} = \frac{3(1)}{(1)+2} \Rightarrow \frac{1}{-1} + \frac{8}{a} = 5 \Rightarrow \frac{8}{a} = 5+1 = 6$$

$$a = \frac{8}{6} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

تمرین. اگر $x=2$ یک جواب معادله $\frac{2x^2}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد،

— a را تعیین کنید.

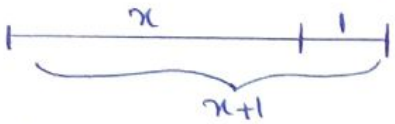
— به ازای $a=2$ ریشه دیگر این معادله را درصورت وجود به دست آورید.

✓ کاربردی از معادلهٔ گویا (مستطیل طلایی)

مستطیل هایی را که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد، مستطیل طلایی می نامیم.

$$\frac{\text{عرض} + \text{طول}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \qquad \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

برای به دست آوردن عدد طلایی از پاره خط زیر استفاده می کنیم:



$$\frac{\text{کل پاره خط}}{\text{قسمت بلندتر}} = \frac{\text{قسمت بلندتر}}{\text{قسمت کوتاه تر}} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \quad x(x) = 1(x+1) \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$ معادلهٔ طلایی

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2(1)}$$

x:
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓ مقدار دقیق عدد طلایی
- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ × (زیرا طول پاره خط منفی نیست!)

اگر $\sqrt{5} \simeq 2.236$ باشد آنگاه داریم:

$$x \simeq \frac{1+2.236}{2} \Rightarrow x \simeq 1.618$$

نتیجه اینکه مستطیل هایی خوش آیندترند که نسبت طول به عرضشان تقریباً 1.6 باشد. $\frac{x}{y} \simeq 1.6$

به عبارتی طولشان 1.6 برابر عرضشان باشد. $x \simeq 1.6y$

ب) معادلهٔ رادیکالی

معادله‌ای که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول x باشد را معادله رادیکالی می نامیم. مثل

$$x + \sqrt{x} = 6$$

برای حل یک معادله رادیکالی می توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کرد که عبارت های رادیکالی در یک طرف تساوی قرار گیرند. سپس با توان رسانی طرفین معادله (و در صورت لزوم با تکرار این عمل) معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود. بعد از حل معادله و پیدا کردن x ها باید آن ها را در اصل معادله جایگذاری کنیم تا مطمئن شویم جواب ها در معادله صدق می کند.

تنها کردن رادیکال ← توان رسانی ← Delete کردن رادیکال ← حل معادله ← بازگشت به عقب

مثال. معادله رادیکالی $x+\sqrt{x}=6$ را حل کنید.

$$x+\sqrt{x}=6 \to \sqrt{x}=6-x \to (\sqrt{x})^2=(6-x)^2$$

اتحاد دوم $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$x=36-12x+x^2 \to x^2-13x+36=0$$

$$\to (x-9)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=9 & \times \quad 9+\sqrt{9}\neq 6 \\ x=4 & \checkmark \quad 4+\sqrt{4}=6 \end{cases}$$

مثال. معادله $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$ را حل کنید.

$$(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})^2=(5)^2$$

$$\to (\sqrt{x+5})^2+2(\sqrt{x+5})(\sqrt{x})+(\sqrt{x})^2=25$$

$$\to x+5+2\sqrt{x(x+5)}+x=25 \to 2\sqrt{x(x+5)}=20-2x$$

$$\xrightarrow{\div 2} \sqrt{x(x+5)}=10-x \to (\sqrt{x(x+5)})^2=(10-x)^2$$

$$x(x+5)=100-20x+x^2 \to x^2+5x=100-20x+x^2 \to 25x=100 \to x=4 \ \checkmark$$

مثال. عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد. (با تشکیل معادله)

x: عدد مورد نظر

$$x-\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$$

$$\to x-\frac{1}{2}x=\sqrt{x} \to \frac{1}{2}x=\sqrt{x} \to \left(\frac{1}{2}x\right)^2=(\sqrt{x})^2$$

$$\frac{1}{4}x^2=x \xrightarrow{\times 4} x^2=4x \to x^2-4x=0 \to x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \checkmark \\ x=4 & \checkmark \end{cases}$$

مثال. ریشه های معادله $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$ را با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ به دست آورید.

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \xRightarrow{\times 2t} 2t^2+2=5t \Rightarrow 2t^2-5t+2=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9 \Rightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow t=2 \ , \ t=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2=(2)^2 \Rightarrow x=4 & \checkmark \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt{x})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{1}{4} & \checkmark \end{cases}$$

مثال. اگر $x=4$ یک جواب معادله $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد.

- a را تعیین کنید.

- ریشه دیگر معادله را در صورت وجود بدست آورید.

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{x=4} (4)+a=\sqrt{5(4)-(4)^2} \Rightarrow 4+a=\sqrt{4} \Rightarrow 4+a=2 \Rightarrow a=-2$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{a=-2} x+(-2)=\sqrt{5x-x^2} \Rightarrow x-2=\sqrt{5x-x^2} \Rightarrow (x-2)^2=(\sqrt{5x-x^2})^2$$

$$x^2-4x+4=5x-x^2 \Rightarrow 2x^2-9x+4=0$$

با حل معادله درجه دوم فوق از روش کلی یا تجزیه داریم: $x=4$ و $x=\frac{1}{2}$ که فقط $x=4$ قابل قبول است (؟)

تمرین. با تشکیل معادله، عدد صحیحی پیدا کنید که مجموع آن با جذرش برابر ۱۲ باشد.

تمرین. معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{2}$$