به نام خدا

دبیر: حسین لهراسب

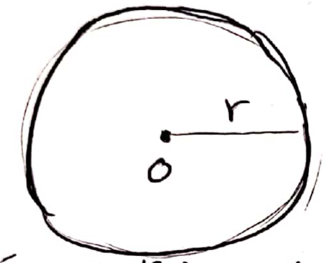
جزوه درس اول فصل دوم یازدهم تجربی

هندسه ۲ — ترسیم های هندسی

(۱)

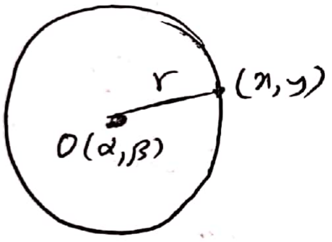
قبل از اینکه وارد این درس شویم دقت کنید که در ترسیم های هندسی فقط از خط کش و پرگار استفاده می کنیم.

مثال: یک نقطه ثابت در صفحه مانند O در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ی ثابت 2cm از آن هستند را در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟ دایره



دایره $C(O,r)$ (دایره به مرکز O و شعاع r)

تعریف دایره: مجموعه نقاطی در صفحه است که فاصله ی آن ها از یک نقطه ثابت، مقدار ثابتی باشد. نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره می نامیم.



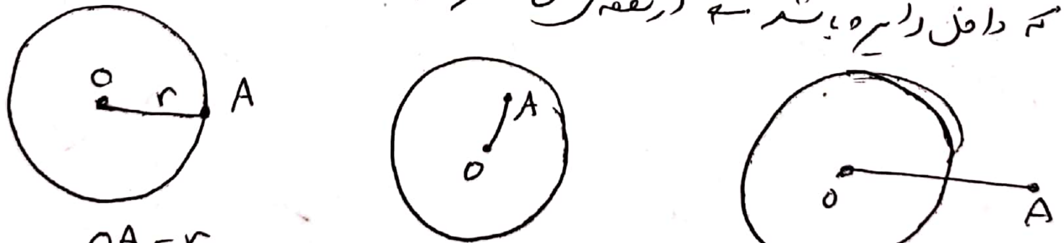
$r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ $\xrightarrow{\text{توان ۲}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ← معادله استاندارد دایره

نکته: هر نقطه روی دایره باشد ← از نقطه ی O به فاصله r است.

هر نقطه که بیرون دایره باشد ← از نقطه ی O بیشتر از r است.

هر نقطه که داخل دایره باشد ← از نقطه ی O کمتر از r است.

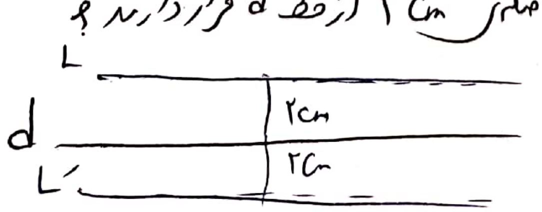


$OA=r$ — A روی دایره

$OA<r$ — A داخل دایره

$OA>r$ — A بیرون دایره

مثال: خط d را در نظر بگیرید. تمام نقاطی را بیابید که به فاصله ی 2cm از خط d قرار دارند؟



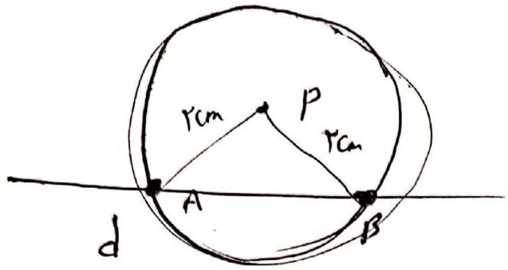
این نقاط چه شکل (های) را نشان می دهند.

دو خط L و L' که موازی d هستند.

Scanned with CamScanner

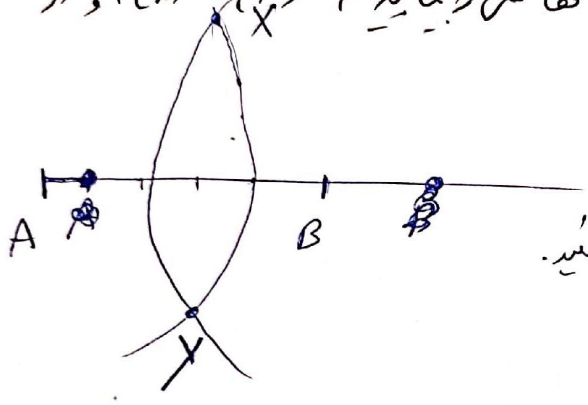
نکته : تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از یک خط مانند d قرار دارند ، دو خط موازی با خط d هستند.

مثال : نقطهٔ P به فاصلهٔ 1cm از خط d قرار دارد. نقاطی به فاصلهٔ 2cm از نقطهٔ P که روی خط d قرار دارند را مشخص کنید.



دایره‌ای به مرکز P و شعاع 2cm رسم می‌کنیم محل برخورد این دایره با خط d جواب مسئله است یعنی نقاط A و B.

مثال: طول پاره خط AB برابر 5cm است. نقاطی را بیابید که از A، 4cm و از B 3cm فاصله داشته باشند.



به مرکز A و به شعاع 4cm یک کمان رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B و شعاع 3cm یک کمان دیگر رسم کنید. تا دو کمان یکدیگر را در نقاط X و Y قطع کنند.

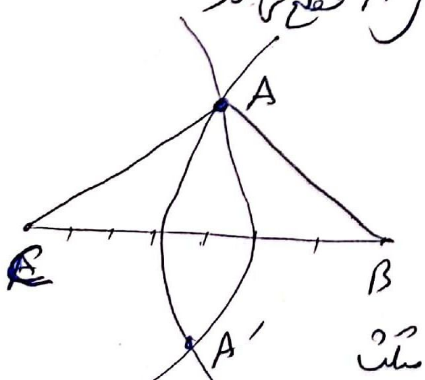
فاصله‌ی $AX = AY = 4cm$

$BX = BY = 3cm$

اگر از X به A و B وصل کنیم مثلث AXB رسم می‌شود. این مثال یک ایده برای رسم مثلث با داشتن ۳ ضلع آن به ما می‌دهد.

توضیح دهید که چگونه می‌توانید یک مثلث به اضلاع ۴، ۵ و ۷ رسم کنید.

ابتدا پاره خط BC به طول 7 cm را رسم می‌کنیم. به مرکز C کمانی به شعاع ۵ و با مرکز B کمانی به شعاع ۴ رسم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند.



از A به B و C وصل می‌کنیم و مثلث پدید می‌آید. دقت کنید می‌توانیم از A' به B و C وصل کنیم که مثلث دیگری ایجاد می‌شود. پس مسئله ۲ جواب دارد.

نکته : اگر a و b و c سه عدد مثبت باشند شرط اینکه تشکیل یک مثلث می‌دهند این است که مجموع هر دو تای آن‌ها از عدد سوم بزرگتر باشد،

$a+b>c$

$a+c>b$

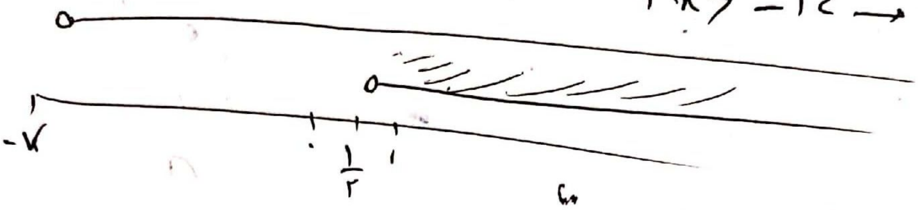
$c+b>a$

مثال: اگر طول اضلاع یک مثلث $2x$ ، $x+8$ و $3x+6$ باشد، محدوده x را بیابید.

شرط ۱ ← $2x + x+8 > 3x+6 \rightarrow \cancel{3x}+8 > \cancel{3x}+6 \rightarrow 8>6$ برقرار است

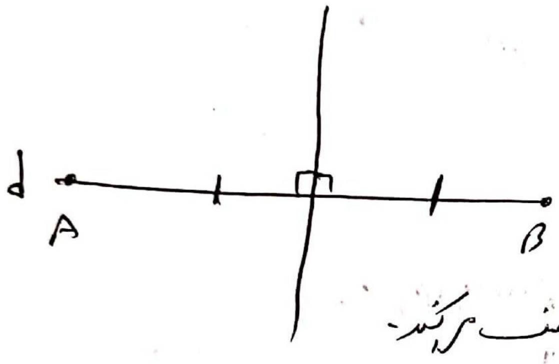
شرط ۲ ← $2x+3x+6 > x+8 \rightarrow 5x+6 > x+8 \rightarrow 4x > 2 \rightarrow x > \frac{1}{2}$

شرط ۳ ← $3x+6+x+8 > 2x \rightarrow 2x > -14 \rightarrow x > -7$



$x > \frac{1}{2}$

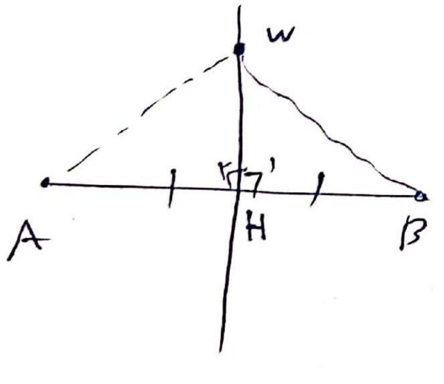
بحث خواص عمود منصف و ترسیم آن:



در شکل مقابل خط d عمود منصف پاره خط AB است ←
خط d بر پاره خط AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اثبات: فرض کنید نقطه W روی عمود منصف پاره خط AB باشد باید نشان دهیم W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است یعنی ← $\boxed{AW = WB}$ ← حکم



از W به A و B وصل می‌کنیم

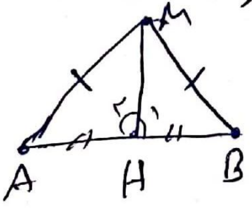
یکی از حالت‌های همنهشتی

$$\left\{\begin{array}{ll} H_1 = H_2 = 90 & \text{خواص عمود منصف} \\ AH = HB & \text{" "} \\ WH = WH & \text{ضلع مشترک} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle WHB \cong \triangle WHA$$

همنهشت

← تساوی اجزای متناظر ← $AW = WB$.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.



اثبات: پاره خط AB و نقطه M را طوری در نظر می‌گیریم که $MA = MB$.
باید ثابت کنیم اگر عمود منصف AB را رسم کنیم حتماً از نقطه M می‌گذرد.

برای اثبات از نقطه M به وسط پاره خط AB وصل می‌کنیم.

(۴)

$$\begin{cases} MA = MB \\ AH = BH \\ MH = MH \end{cases}$$ فرض $\xrightarrow{\text{ض ض ض}}$ $\overset{\triangle}{AMH} \cong \overset{\triangle}{MHB}$ $\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}}$

$\rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180 \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$$

پس MH عمودمنصف پاره خط AB است. پس M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

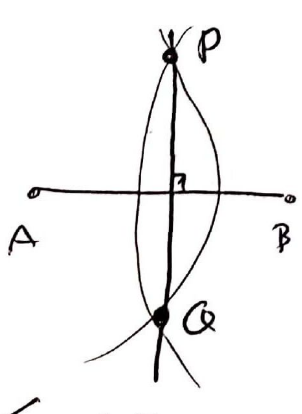
نکته: هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو نقطه به یک اندازه باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد و برعکس.

رسم عمودمنصف یک پاره خط:

برای رسم هر خط دو نقطه کافی است. پس برای رسم عمودمنصف یک پاره خط مانند AB اگر ۲ نقطه از آن را مشخص کنیم، می‌توان آن را رسم کرد.

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره خط داده شده:

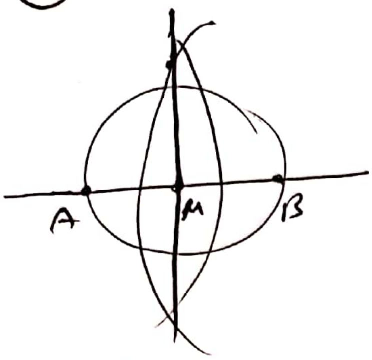
فرض کنید پاره خط AB را داریم و می‌خواهیم عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم.
دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول AB باز می‌کنیم یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B با همان شعاع کمان می‌زنیم تا این دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.
(این نقاط روی عمودمنصف پاره خط AB هستند چون از دو سر پاره خط به یک فاصله‌اند)
نقاط P و Q را به هم وصل می‌کنیم. خط گذرنده از P و Q همان عمودمنصف است.



مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن:

خط d و نقطه‌ی M روی آن مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطه‌ی M خطی عمود بر خط d رسم کنیم.
به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.
($MA = MB$ شعاع) اکنون عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.

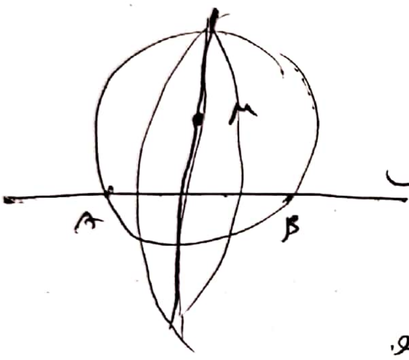
این عمود منصف بر خط d عمود است و از نقطه M می‌گذرد.



رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن :

خط d و نقطه M خارج از خط داده شده است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

برای این کار ابتدا به مرکز M و شعاعی بیش‌تر از فاصله M تا خط d دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.



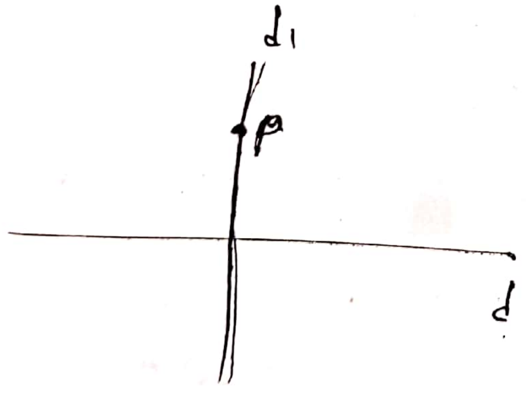
از طرفی فاصله M از نقاط A و B یکسان است پس M روی عمود منصف پاره خط AB است. پس عمود منصف AB را رسم می‌کنیم.

عمود منصف پاره خط AB بر خط d عمود است و از نقطه M می‌گذرد.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن :

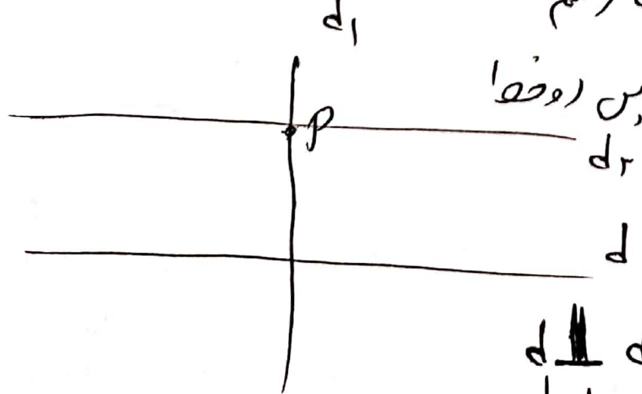
خط d و نقطه‌ای مانند P خارج آن را در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.



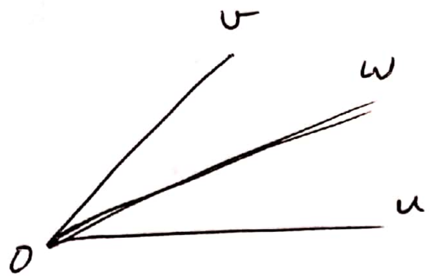
ابتدا از نقطه P خارج خط d، خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

سپس از نقطه P روی خط d_1، خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم. چون دو خط d_2 و d بر خط d_1 عمودند پس دو خط d و d_2 با هم موازی‌اند.



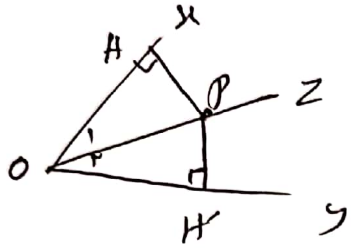
$$\begin{matrix} d \perp d_1 \\ d_2 \perp d_1 \end{matrix} \Rightarrow d \parallel d_2$$

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن :



در شکل مقابل OW نیمساز زاویه $u\hat{O}v$ است
زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

نتیجه ← هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



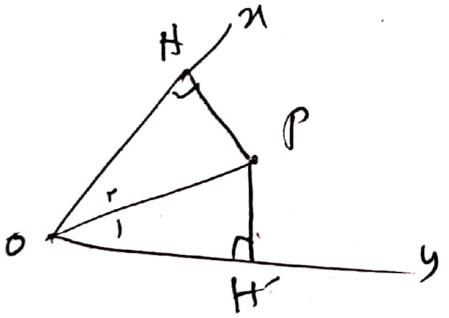
اثبات : در شکل مقابل OZ نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ است
نقطه‌ی P روی نیمساز در نظر گرفته‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم که فاصله‌ی
نقطه P از Ox و Oy یکسان است. یعنی :

حکم : $PH = PH'$

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OP = OP \\ H = H' = 90 \end{cases} \xrightarrow[\text{وتر و یک زاویه حاده}]{\text{وز}} \overset{\triangle}{OPH} \cong OPH' \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} PH = PH'$$

تعمیم : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد (به فاصله یکسان باشد) روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

اثبات : اگر نقطه‌ی P طوری باشد که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد می‌خواهیم ثابت کنیم
که نقطه‌ی P روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.



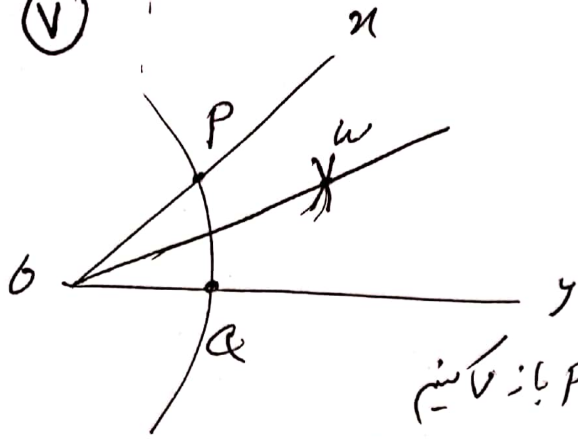
از P دو عمود بر خطوط Ox و Oy رسم می‌کنیم از P به O
وصل می‌کنیم باید ثابت کنیم $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\begin{cases} OP = OP \\ H = H' = 90 \\ PH = PH' \end{cases} \xrightarrow{\text{وض}} \overset{\triangle}{OPH} \cong OPH' \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

پس در حالت کلی داریم :

هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است
و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مراحل رسم نیمساز یک زاویه:

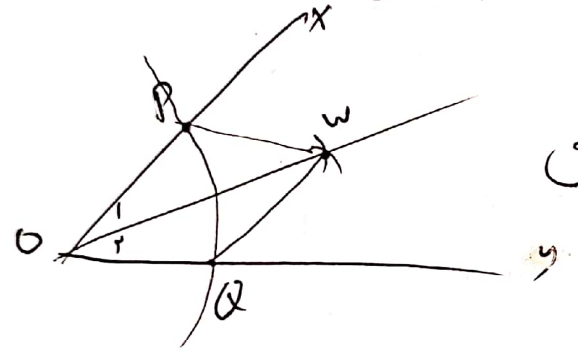


زاویه دلخواه $\hat{xOy}$ را در نظر بگیرید:

به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

دهانه‌ی پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز می‌کنیم و یک بار به مرکز P و یک بار به مرکز Q کمانی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ای W قطع کنند. از W به O وصل می‌کنیم که نیمساز زاویه xOy بدست می‌آید.

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که چرا OW همان نیمساز زاویه $\hat{xOy}$ است.



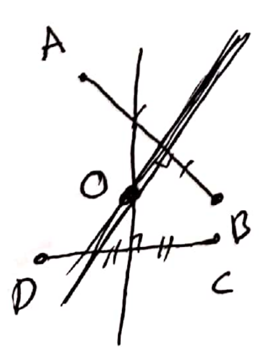
از W به P و Q وصل می‌کنیم. نشان می‌دهیم دو مثلث OWQ و OPW هم‌نهشت اند.

$$\begin{cases} OP = OQ \\ PW = WQ \\ OW = OW \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OPW \cong \triangle OWQ \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

پس W روی نیمساز $\hat{yOx}$ قرار دارد. یعنی OM نیمساز زاویه xOy است.

تمرینات درس:

۱- الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده است. نقطه‌ای را بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه‌ی C و D نیز به یک فاصله باشد.

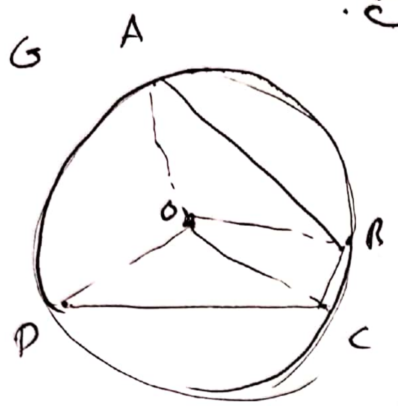


ب) نقطه‌ی مورد نظر در الف را O بنامید. آیا نقطه‌ی O روی عمودمنصف پاره‌خط BC می‌باشد؟ و C دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA باشد. رأس‌های چهارضلعی ABCD نسبت به دایره‌ی C چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۸

الف، برای اینکه نقطه‌ای پیدا کنیم تا از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد باید این نقطه روی عمود منصف آن پاره خط باشد.

پس کافی است عمود منصف‌های دو پاره خط AB و CD را رسم کنیم. محل برخورد عمود منصف‌های AB و CD جواب مسئله است که همان نقطه‌ی O است.



ب) چون نقطه‌ی O روی عمود منصف AB است ① $OA = OB$

چون نقطه‌ی O روی عمود منصف CD است ② $OC = OD$

چون بنابه فرض O روی عمود منصف پاره خط BC است. ③ $OB = OC$

$$\xrightarrow{①,③} \quad \begin{matrix} OA = OB \\ OC = OB \end{matrix} \longrightarrow OA = OC \quad ④$$

$$\xrightarrow{④,②} \quad \begin{matrix} OC = OD \\ OC = OA \end{matrix} \longrightarrow OA = OD$$

پس خواهیم داشت: $OA = OB = OC = OD$

پس فاصله‌ی نقاط B و C و D از نقطه‌ی O برابر شعاع دایره یعنی OA است.

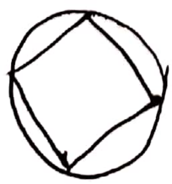
پس این نقاط روی دایره قرار دارند.

نکته: به دایره فوق دایره‌ی محیطی می‌گوییم و به چهارضلعی ABCD محاطی می‌گوییم.

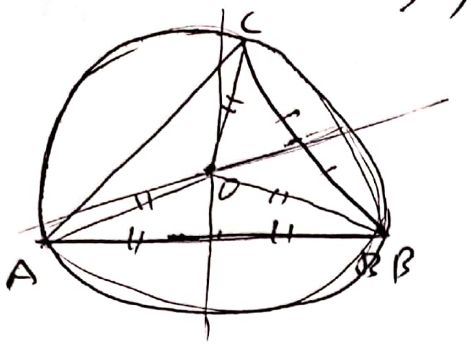
دایره‌ای که از راس‌های یک چندضلعی می‌گذرد

مرکز دایره‌ی محیطی محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع چندضلعی است.

چندضلعی که همه‌ی رئوس آن بر یک دایره باشند.



۲) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن ها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



ادعا می کنیم نقاط B و C روی این دایره اند:

دلیل ادعا:

نقطه O روی عمود منصف AB قرار دارد پس:

$OA = OB$ (1)

نقطه O روی عمود منصف BC قرار دارد پس

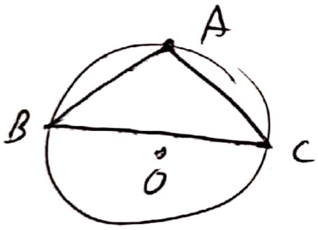
$OB = OC$ (2)

پس از (1) و (2) و (3) خواهیم داشت:

$\xrightarrow{(1),(2)} OA = OC$ (3)

$OA = OB = OC$

پس نقاط B و C نیز باید روی دایره به شعاع OA باشند.

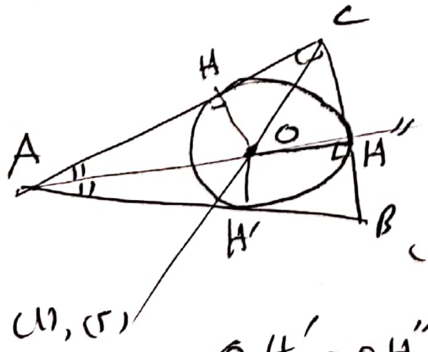


نکته: به دایره فوق دایره محیطی مثلث می گوییم.

دایره محیطی مثلث ← دایره ای که از سه راس مثلث می گذرد

مرکز دایره محیطی مثلث محل تلاقی عمود منصف های مثلث است.

۳) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمساز دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن ها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارد؟ چرا؟



← اضلاع مثلث بر دایره مماس اند. دلیل:

نقطه O روی نیمساز زاویه A قرار دارد. (1) $OH = OH'$

" " " " " C " . (2) $OH = OH''$

$\xrightarrow{(1),(2)} OH' = OH''$ ⟶ $OH' = OH = OH''$

پس نقاط H و H' و H'' روی دایره قرار دارند. چون OH و OH' و OH'' هم عمود بر اضلاع

پس اضلاع مثلث بر دایره مماس اند.

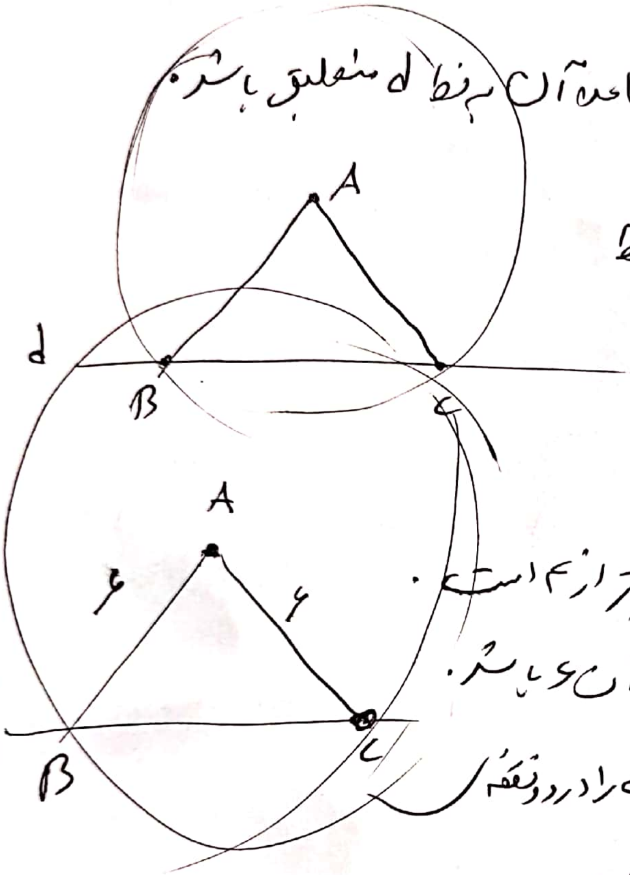
۴ به دایره‌ی فوق دایره‌ی محاطی می‌گوییم.

دایره‌ای که بر سه ضلع مثلث مماس باشد.

مرکز دایره‌ی محاطی مثلث محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث است.

(۴) فرض کنید نقطه‌ی A به فاصله‌ی 4cm از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلث متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده‌ی آن بر خط d منطبق باشد.



به مرکز A و شعاع بیشتر از 4cm دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند.

شعاع دایره = AB = AC

پس مثلث متساوی‌الساقین است.

مسأله بی‌شمار جواب دارد چون شعاع عددی بیشتر از ۴ است.

ب) مثلثی که شرایط الف را داشته باشد و طول ساق آن ۶ باشد.

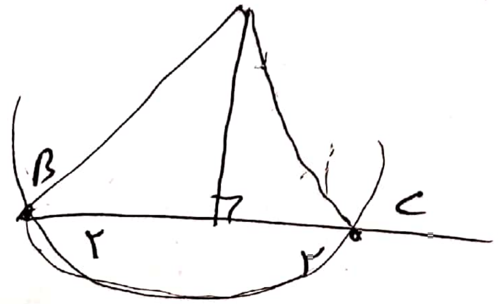
به مرکز A و شعاع 6cm دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

ج) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت الف را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.

$$S = \frac{1}{2} bh \longrightarrow 8 = \frac{1}{2} \times b \times 4 \Rightarrow 2b = 8 \rightarrow \boxed{b = 4}$$

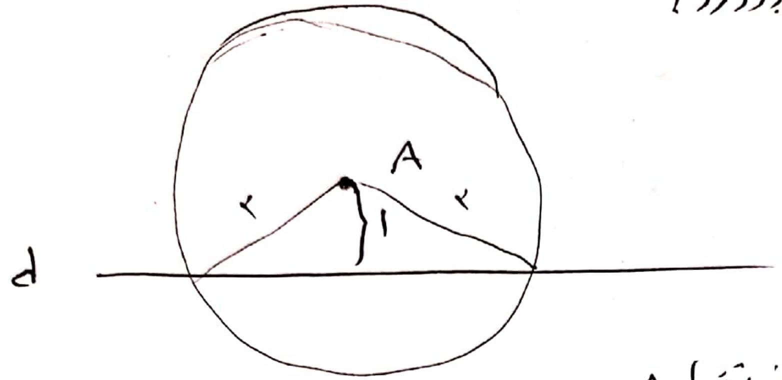
پس $BC = 4$ باشد.

(نکته: در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع، میانه بر هم منطبق‌اند) پس پای ارتفاع (H) وسط BC است. پس به مرکز H و شعاع 2cm کمانی می‌زنیم تا دو نقطه‌ی B و C روی خط d به دست آید. از A به B و C وصل می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله است.



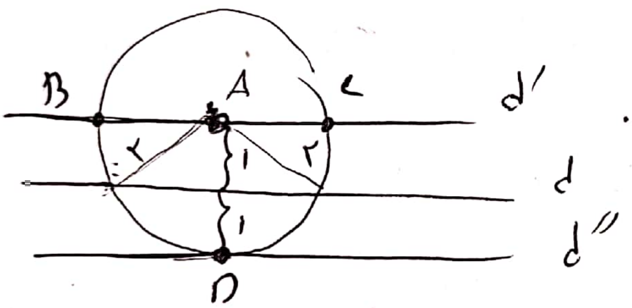
(۱۰)

نقطه‌ی A به فاصله‌ی یک متری از خط d در یک صفحه وجود دارد. چند نقطه در این صفحه به فاصله‌ی ۲ متری از نقطه‌ی A و یک متری از خط d وجود دارد؟



مجموعه نقاطی از صفحه که به فاصله‌ی ۲ متری از نقطه A وجود دارند همان نقاطی هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع 2m است.

از طرفی مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله‌شان تا خط d یک متر شد دو خط موازی با d است



که جواب مسأله ۳ نقطه‌ی B و C و D است.