ریاضی الفبای زندگی است.

ریاضی (۲)

یازدهم تجربی

مصطفی حیدری طیب

فصل دوم : هندسه Geometry

علم اندازه گیری زمین

۱. ترسیم های هندسی
۲. استدلال و قضیه تالس
۳. تشابه مثلث ها

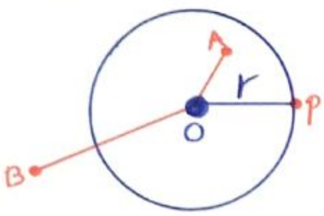
درس ۱. ترسیم های هندسی

خط‌کش و پرگار

رسم هندسی فقط به کمک خط‌کش و پرگار انجام می‌گیرد. از خط‌کش برای رسم خطی که از دو نقطه معلوم می‌گذرد و هم چنین برای رسم پاره‌خطی با طول مشخص استفاده می‌کنیم. از پرگار برای رسم دایره‌ای که مرکز و شعاع آن معلوم باشد، استفاده می‌کنیم.

دایره Circle

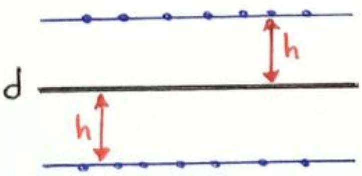
تمام نقاطی که به فاصله r از نقطه ثابت O قرار دارند شکلی را در صفحه پدید می‌آورند که آن را دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌نامیم و با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.



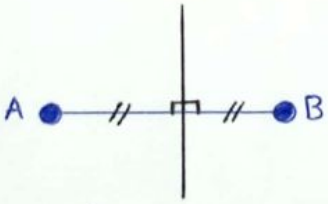
- بنابراین هر نقطه‌ای که از O به فاصله ثابت r باشد روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره باشد از نقطه O فاصله‌ای برابر r خواهد داشت.
- هر نقطه‌ای که درون دایره باشد، فاصله آن از مرکز دایره کمتر از شعاع است و هر نقطه که خارج از دایره باشد، فاصله آن از نقطه O بیشتر از شعاع است.

$OP=r$ روی دایره $OA<r$ درون دایره $OB>r$ بیرون دایره

تذکر. خطی مانند d را در نظر بگیرید. مجموعه نقاطی که از d به فاصله ثابت h هستند، دو خط موازی با d و در دو سوی آن و به فاصله h می‌باشند.



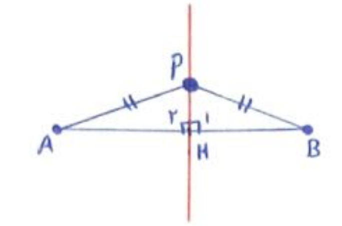
عمودمنصف



عمودمنصف پاره خط AB، خطی است که بر AB عمود است و از نقطه وسط آن می‌گذرد.

قضیه: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

اثبات قضیه:



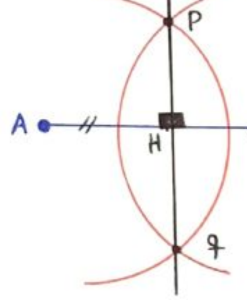
$$\begin{cases} PH = PH & \text{ضلع مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ & \text{زاویه} \\ HB = HA & \text{ضلع} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{BPH} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{APH}$$

از هم‌نهشتی این دو مثلث بنابر حالت دو ضلع و زاویه بین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$PA = PB$$

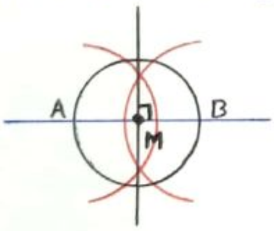
✓ روش رسم عمود منصف یک پاره خط

دهانه پرگار را بیش‌تر از نصف طول AB باز کرده، یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان می‌زنیم. دو کمان همدیگر را در دو نقطه P و q قطع می‌کنند. خط گذرا از این دو نقطه، عمود منصف AB است.

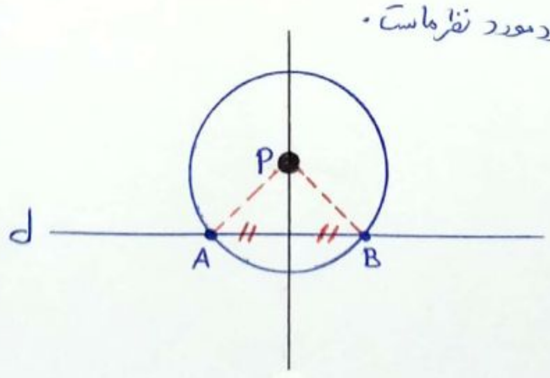


✓ روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه

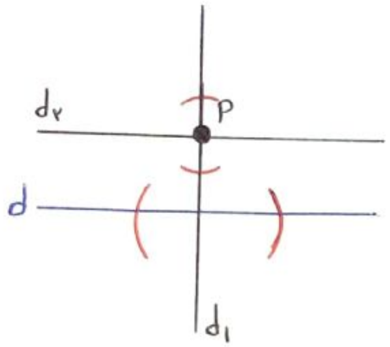
الف) نقطه روی خط باشد: فرض می‌کنیم خط d و نقطه M روی آن داده شده است. نخست به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا d را در نقاط A و B قطع کند. سپس به روش گفته شده، عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. چون MA = MB شعاع دایره است پس M روی عمود منصف AB قرار دارد و این همان مطلوب مسأله است.



ب) نقطه بیرون خط باشد: خط d و نقطه P بیرون آن را در نظر بگیرید، نخست به مرکز P و شعاع بزرگ‌تر از فاصله P و d دایره‌ای می‌کشیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. حال به روش گفته شده، عمود منصف AB را رسم می‌کنیم. چون PA=PB شعاع دایره است پس P روی عمود منصف AB قرار دارد. یعنی عمود منصف همان عمود مورد نظر ماست.



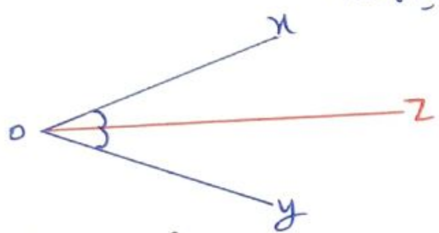
✓ رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای بیرون آن



خط d و نقطه P بیرون آن را در نظر بگیرید. به روش گفته شده خط d_1 را عمود بر خط d بکشید (رسم خط عمود از نقطه‌ای بیرون آن) سپس از P به روش گفته شده خط d_2 را عمود بر d_1 بکشید (رسم خط عمود از نقطه‌ای روی خط). خط d_2 از P می‌گذرد چون d و d_2 هردو بر d_1 عمودند (دو خط عمود بر یک خط، موازیند) بنابراین d_2 همان خط موازی مورد نظر است و هو المطلوب.

✓ نیم‌ساز

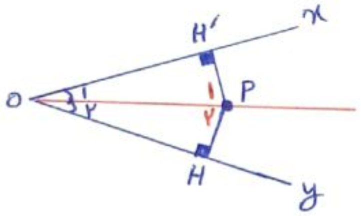
نیم‌ساز زاویه xoy نیم‌خطی است که آن را به دو زاویه برابر تقسیم می‌کند و از رأس زاویه می‌گذرد.



oz نیم‌ساز $\Rightarrow \quad x\hat{o}z = y\hat{o}z$

قضیه. هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیم‌ساز آن زاویه است.

اثبات قضیه.

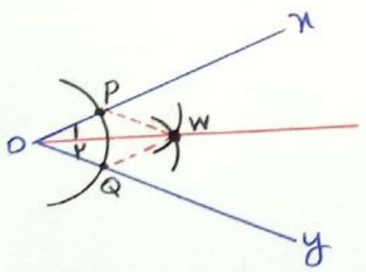


$$\left.\begin{array}{l}\hat{o}_1+\hat{H'}+\hat{P}_1=180^\circ\\ \hat{o}_2+\hat{H}+\hat{P}_2=180^\circ\end{array}\right. \rightarrow \hat{o}_1+\hat{H'}+\hat{P}_1=\hat{o}_2+\hat{H}+\hat{P}_2$$

$$\Rightarrow \hat{P}_1=\hat{P}_2$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\hat{o}_1=\hat{o}_2 & \text{ز}\\ oP=oP & \text{ض}\\ \hat{P}_1=\hat{P}_2 & \text{ز}\end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{oPH'} \overset{\text{زضز}}{\cong} \overset{\triangle}{oPH} \Rightarrow PH'=PH$$

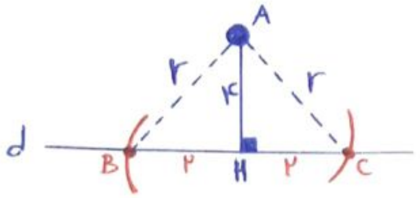
✓ روش رسم نیم‌ساز زاویه xoy



دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کنید و به مرکز o دایره‌ای بکشید تا دو ضلع زاویه را در P و Q قطع کند. حال دهانه پرگار را بیش‌تر از نصف PQ باز کرده و به مرکزهای P و Q دایره رسم کنید تا همدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. در اینصورت می‌توان به سادگی نشان داد که oW نیم‌ساز $x\hat{o}y$ است.

$$\overset{\triangle}{oPW} \cong \overset{\triangle}{oQW} \Rightarrow \hat{o}_1=\hat{o}_2$$

__مسأله__ • نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴^{cm} از خط d قرار دارد. مثلث متساوی الساقین با مساحت $۸^{cm^۲}$ رسم کنید که A یک رأس آن و رئوس دیگر آن روی خط d باشد (مراحل کار را با رسم شکل توضیح دهید)



دایره‌ای به مرکز A و شعاع r (بیش‌تر از ۴) می‌زنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است. زیرا $AB=AC=r$ پس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است. چون فاصلهٔ عمودی نقطهٔ A از d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است پس اگر بخواهیم مساحت آن $۸^{cm^۲}$ باشد باید قاعدهٔ آن ۴^{cm} باشد یعنی $BC=۴$.

$$S=\frac{۴\times \bigcirc}{۲}=۸ \qquad !?$$

بنابر رابطهٔ فیثاغورس داریم:

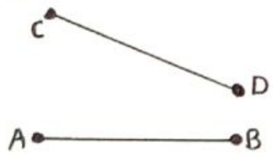
$$AB^۲=AH^۲+BH^۲$$

$$r^۲=۴^۲+۲^۲=۱۶+۴=۲۰ \rightarrow r=\sqrt{۲۰}$$

بنابراین باید از ابتدا دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲۰}$ رسم می‌کردیم.

$$AB=AC=\sqrt{۲۰} \qquad S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۴=۸$$

__تمرین__ • دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و هم‌چنین از نقاط C و D نیز به یک فاصله باشد.



__تمرین__ • نقطهٔ A به فاصلهٔ یک متری از خط d قرار دارد. چند نقطه یافت می‌شود که به فاصلهٔ دو متری از نقطهٔ A و یک متری از خط d قرار گرفته باشند؟

درس ۲: استدلال و قضیه تالس

بنده‌ی دلیل باشید!

در علوم تجربی، محققان در آزمایشگاه‌ها و ... با بررسی چندین آزمایش به مشاهدات خود نظم داده و با توجه به نظام حاکم بر آن‌ها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال، روش تجربی یا علمی و در ریاضی به آن استدلال استقرایی می‌گوییم.

✓ **استدلال استقرایی:**

روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گوییم.

- استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری از جزء به کل است. ← علم تولید می‌کند.

✓ **استدلال استنتاجی:**

به استدلالی که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه‌ی واقعیت‌هایی باشد که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی می‌گوییم.

- استدلال استنتاجی نتیجه‌گیری از کل به جزء است. به عنوان مثال؛ اهمیت قضیه فیثاغورس در این است که این قضیه برای تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه برقرار است و نه برای تعداد محدودی از آن‌ها.

__تذکر.__ نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که از استدلال استقرایی به دست آمده باشد، مطمئن بود. اما وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

✓ **قضیه:**

هر حکمی را که همیشه برقرار باشد، قضیه "theorem" می‌نامیم. اما ما به برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه می‌گوییم.

- هر قضیه دارای قسمت شرطی و نتیجه است. قسمت شرطی را "فرض قضیه" و نتیجه‌ی جمله را "حکم قضیه" می‌گوییم.

قضیه: $\underset{\text{فرض}}{p} \Rightarrow \underset{\text{حکم}}{q}$

✓ **عکس قضیه:**

اگر جای فرض و حکم را در یک قضیه عوض کنیم، حکمی به دست می‌آید که عکس آن قضیه نامیده می‌شود. (که می‌تواند درست یا نادرست باشد)

عکس قضیه: $\underset{\text{حکم}}{q} \Rightarrow \underset{\text{فرض}}{p}$

__مثال.__

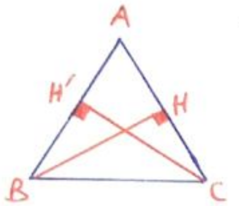
قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر یک چهارضلعی قطرهایش همدیگر را نصف کنند، آنگاه متوازی‌الاضلاع است.

✓ قضیه‌های دوشرطی :

گاهی عکس یک قضیه درست است. در این صورت عکس قضیه، خود نیز یک قضیه است. در این حالت قضیه و عکس قضیه را به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان می‌کنیم و با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهیم. (بخوانید: اگر و تنها اگر)

مثال. قضیه‌ی زیر یک قضیه دوشرطی است زیرا هم خودش و هم عکس آن درست است.



دو ضلع یک مثلث با هم برابرند، اگر و تنها اگر ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها با هم برابر باشند.

$$AB=AC \Longleftrightarrow BH=CH'$$

✓ بُرهان خُلف (اثبات غیرمستقیم) :

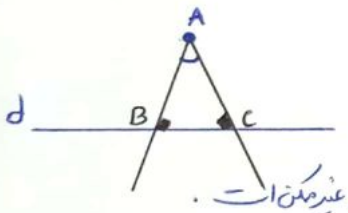
در این روش به جای آنکه به طور مستقیم، با آغاز از فرض، به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خُلف) و به یک تناقض یا نتیجه‌ی غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب می‌گوییم فرض خُلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

مراحل اثبات به روش بُرهان خُلف :

مسأله : A (فرض) $\Longrightarrow$ B (حکم)

A درست و B نادرست $\Big\}$ $\Longrightarrow \underset{\text{استدلال، منطق، حقایق}}{\ldots \Longrightarrow \ldots} \Longrightarrow$ $\Big\{$ A درست نیست # تناقض منطقی $\Longrightarrow$ حکم B درست است.

مثال. ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط، فقط یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد.



اثبات (برهان خلف): فرض کنید از نقطه A بتوانیم دو خط عمود بر خط d رسم کنیم.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+90^\circ+90^\circ=180^\circ+\hat{A}>180^\circ$$

و این یعنی در $\overset{\triangle}{ABC}$ مجموع زاویه‌های داخلی از 180° بیشتر است که به وضوح غیرممکن است.

بنابراین فرض خلف باطل و حکم محقق است.

✓ مثال نقض:

به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی همواره برقرار نیست (درست نیست) مثال نقض می‌گوییم.

- در واقع به کمک مثال نقض، یک حکم رد (نقض) می‌شود.
- برای نشان دادن درستی یک حکم ارائه یک مثال پذیرفته نیست! و باید اثبات ارائه کنیم امّا برای رد کردن یک حکم کافی است یک مثال نقض بیاوریم. (اثبات مثالی نداریم !!!)

درسته که در زندگی با یک گل بهار نمیشه اما در ریاضی با یک گل بهار میشه چون خبر از رسیدن بهار میده

مثال. حکم‌های زیر را با یک مثال نقض، رد کنید.

۱. مجموع دو عدد گنگ همواره گنگ باقی می‌ماند.

۲. برای هر عدد طبیعی n مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.

$x=\sqrt{2}$ و $y=-\sqrt{2}$ اگر $\Rightarrow x+y=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ ✗

صفر عددی گویا است.

$n=41$ اگر $\Rightarrow (41)^2+41+41=41(41+1+1)=41\times 43$ ✗

41×43 عددی اول نیست.

تمرین. عکس هر یک از قضیه‌های زیر را بنویسید.

۱. اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشد آنگاه سه زاویه برابرند.

۲. مجموع زاویه‌های روبه‌رو در هر چهارضلعی محیطی برابرند.

تمرین. قضیه‌های زیر را به صورت یک قضیهٔ دوشرطی بنویسید.

۱. قضیه فیثاغورس

۲. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک اندازه است.

تمرین. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه واقع بر یک خط نمی‌توان دو عمود بر آن رسم کرد.

تمرین. برای رد حدس‌های کلی زیر، مثال نقض ارائه کنید.

- هر زاویه خارجی یک مثلث، از هر زاویه داخلی آن بزرگ‌تر است.
- ارتفاع‌های هر مثلث داخل مثلث است.
- به ازای هر عدد حقیقی x همواره داریم: $x^2>x$
- تمام اعداد اول، فرد هستند.
- حاصل‌ضرب دو عدد گنگ همیشه گنگ است.
- برای هر عدد حقیقی x داریم: $x\times\frac{1}{x}=1$
- به ازای هر عدد طبیعی n، عدد n^2+n+29 عددی اول است.

✓ نسبت و تناسب:

برای هر دو عدد حقیقی a و b که $b \neq 0$ باشد، کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت دو عدد می‌نامیم و تساوی بین دو نسبت را «تناسب» می‌گوییم.

برای نمونه $\frac{1}{2}$ یک نسبت و $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ یک تناسب است.

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، a و d را طرفین و b و c را وسطین می‌گوییم.

✓ ویژگی‌های تناسب:

اگر a و b و c و d اعداد حقیقی و b و $d \neq 0$ باشند آنگاه از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ داریم:

۱. طرفین وسطین $\quad ad = bc$

۲. معکوس کردن تناسب $\quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۳. تعویض جای طرفین وسطین $\quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

۴. ترکیب نسبت در صورت یا مخرج $\quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

۵. تفضیل نسبت در صورت یا مخرج $\quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ یا $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

۶. تبدیل حاصلضرب به تناسب $\quad$ اگر $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۷. $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

مثال. در مثلثی بین زاویه‌ها رابطه $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5}$ برقرار است. اندازه هر زاویه را به دست آورید.

(بنابر ویژگی ۷ ام) :

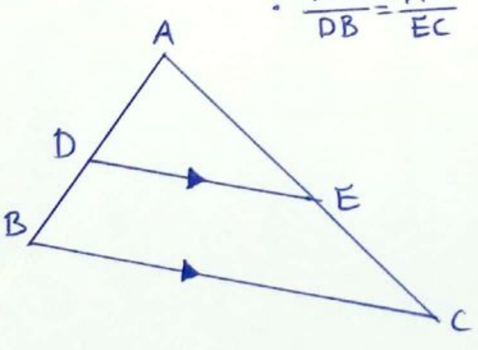
$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2+3+5} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ \Longrightarrow \begin{aligned} \hat{A} &= 2\times 18^\circ = 36^\circ \\ \hat{B} &= 3\times 18^\circ = 54^\circ \\ \hat{C} &= 5\times 18^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

تمرین. اگر $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$ باشد آنگاه نسبت $\frac{b}{a}$ را به دست آورید.

✓ قضیه تالس:

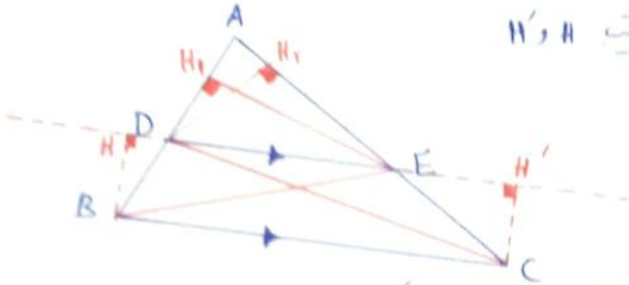
اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، روی آن اضلاع پاره‌خط‌های متناسبی پدید می‌آورد. به عبارتی:

در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی BC است در این صورت $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



$$\boxed{DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$$

اثبات قضیه تالس :



از نقاط B و C بر امتداد پاره‌خط DE عمود می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب H و H' می‌نامیم. چون HH' روی DE است پس $HH' \parallel BC$.
و لذا چهارضلعی $BHH'C$ متوازی‌الاضلاع است (چرا؟)

$$HH' = BC \quad , \quad BH = CH'$$

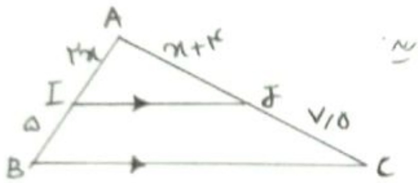
از D به C و از E به B وصل می‌کنیم. هم‌چنین عمودهای EH_1 و DH_2 را رسم می‌کنیم.

$$S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \frac{1}{2} DE \times CH' \qquad S_{\overset{\Delta}{DEB}} = \frac{1}{2} DE \times BH$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEB}}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times BD} = \frac{AD}{BD} \qquad \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEC}}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \blacksquare$$

توجه! رابطه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ را جزء به جزء می‌نامیم.



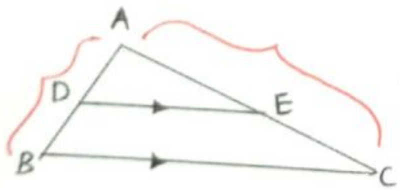
مثال. با توجه به شکل مقابل، مقدار x و اندازه پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{x+4}{7.5}$$

$$(2x)(7.5) = (5)(x+4)$$

$$\Rightarrow 15x = 5x + 20 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2 \begin{cases} AI = 2(2) = 4 \\ AJ = (2) + 4 = 6 \end{cases}$$

۲. تعمیم قضیه تالس:



در مثلث ABC پاره‌خط DE را موازی BC رسم می‌کنیم در این صورت

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{BC}$$

رابطه جزء به کل

۳. عکس قضیه تالس :

فرض کنید نقاط D و E روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری قرار گرفته باشند که $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. در این صورت $DE \parallel BC$.

اثبات: فرض کنید حکم درست نباشد (فرض خلف) یعنی $DE \nparallel BC$. از نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. بنابر قضیه تالس داریم: $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$. از مقایسه این رابطه با فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$$

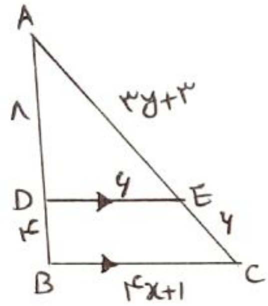
حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم:

$$\frac{AE}{AE+EC} = \frac{AE'}{AE'+E'C} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC} \Rightarrow AE = AE'$$

و این یعنی نقطه E' بر E منطبق است. بنابراین DE همان DE' است و این یک تناقض می‌باشد زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \nparallel BC$

بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد یعنی:

$$DE \parallel BC$$



مثال. در مثلث روبه‌رو $DE \parallel BC$ است. مقادیر مجهول x و y را بیابید.

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{3y+3}{6}$$

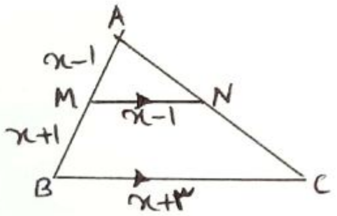
$$\Rightarrow 4(3y+3) = 8 \times 6 \Rightarrow 12y + 12 = 48$$

$$12y = 48 - 12 = 36 \Rightarrow y = 3$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{6}{4x+1}$$

$$\Rightarrow 8(4x+1) = 6 \times 12 \Rightarrow 32x + 8 = 72$$

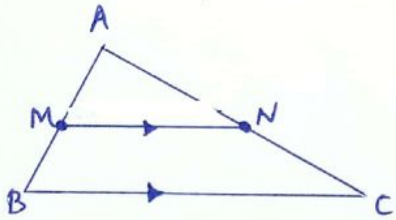
$$\Rightarrow 32x = 64 \Rightarrow x = 2$$



تمرین. در شکل مقابل $MN \parallel BC$ رسم شده است. مقدار x و اندازه DE را به دست آورید.

مسئله (میان‌خط در مثلث): ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

اثبات.



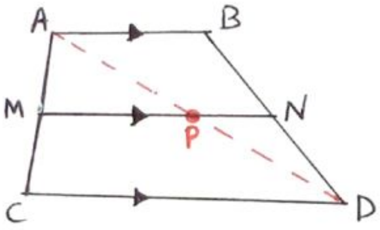
فرض $(AM = MB$ و $AN = NC) \Rightarrow$ حکم $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{1}{2}BC$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\frac{AB}{2}}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \quad (I)$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (II)$$

از I و II: $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$ ■



✓ قضیه تالس در ذوزنقه‌ها. در ذوزنقه مقابل اگر $MN \parallel DC$ باشد، ثابت کنید

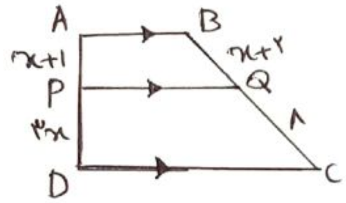
$$\frac{AM}{MC}=\frac{BN}{ND}$$

اثبات. قطر AD را رسم می‌کنیم. محل برخورد آن را با MN نقطه P می‌نامیم.

$$\overset{\triangle}{ACD}: \ MP \parallel CD \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PD} \qquad (1)$$

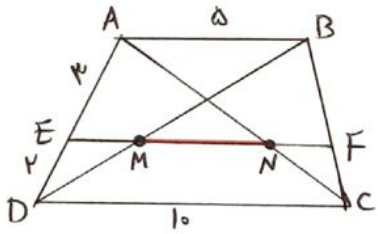
$$\overset{\triangle}{DAB}: \ PN \parallel AB \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{DP}{PA}=\frac{DN}{NB} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{عکس}} \frac{PA}{DP}=\frac{NB}{DN} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{۱ و ۲}} \frac{AM}{MC}=\frac{BN}{ND}$$



تمرین. در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.

تمرین. در ذوزنقه ABCD پاره‌خط EF با AB موازی است. اندازه MN را بیابید.



درس ۳: تشابه مثلث ها

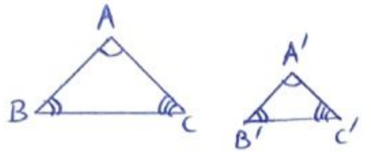
هر دو n ضلعی منتظم باهم متشابهند.

هر دو شکل هم نهشت باهم متشابه اند و نسبت تشابه برابر یک است.

دو مثلث ABC و A'B'C' را متشابه گوییم هرگاه:

۱. زاویه‌های متناظر آن‌ها باهم برابر باشند. ۲. نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد.

- به زبان ریاضی در شکل زیر داریم:



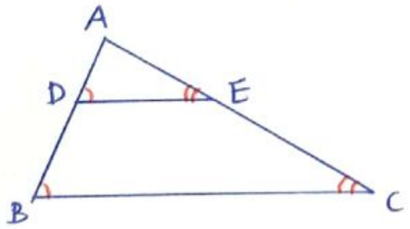
$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ و } \hat{B} = \hat{B'} \text{ و } \hat{C} = \hat{C'}$$

$$\text{نسبت اضلاع} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \iff \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

نسبت تشابه دو مثلث را با K نمایش می‌دهیم. $(K \neq 1 \text{ و } K > 0)$

✓ قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها:

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند آنگاه مثلث کوچکی که پدید می‌آید با مثلث اولیه متشابه است.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

<u>یادآوری</u>. اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث متشابهند.

- در قضیه فوق داریم:

$$DE \parallel BC \text{ ، } AB \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{D} = \hat{B} \quad \text{ز}$$

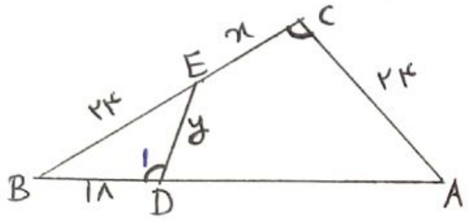
$$DE \parallel BC \text{ و } AC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{〃 〃 〃 〃}} \hat{E} = \hat{C} \quad \text{ز}$$

$$\hat{A} = \hat{A} \quad \text{زاویه مشترک}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \overset{\text{زز}}{\sim} \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow[\text{اضلاع}]{\text{نسبت}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۷) فرار از اشتباه: برای نوشتن اضلاع - برای جلوگیری از اشتباه - سفارش می‌کنیم به روش زیر عمل کنید

نام یکی از مثلث‌ها را به دلخواه بنویسید، سپس در نوشتن نام مثلث دوم، رأس‌ها را با همان ترتیبی که رأس‌های مثلث نخست را نوشته‌اید، بنویسید (به جای هر رأس، رأس نظیر در مثلث دوم را بگذارید) در پایان سه خط کسری بکشید و در صورت ضلع‌های یک مثلث و در مخرج ضلع‌های مثلث دیگر را با همان ترتیبی که رأس‌ها را نوشته‌اید پر کنید.



مثال. در شکل زیر $AB=۴۸$ و $\hat{C}=B\hat{D}E$. مقادیر مجهول را پیدا کنید.

$\hat{C}=\hat{D}_1$ فرض مسئله ز

$\hat{B}=\hat{B}$ مشترک ز

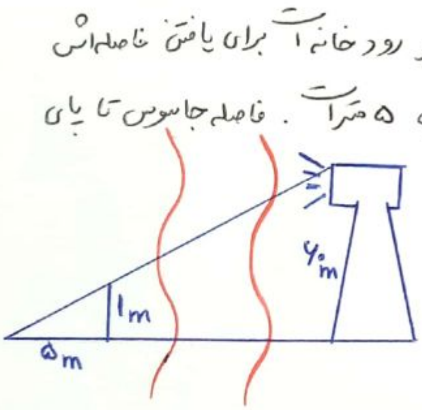
$\Rightarrow \overset{\triangle}{BAC} \overset{\text{زز}}{\sim} \overset{\triangle}{BED}$

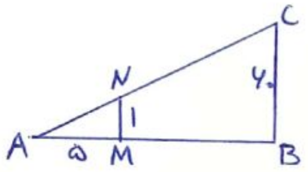
$$\Rightarrow \frac{BA}{BE}=\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{ED}$$

$$\Rightarrow \frac{۴۸}{۲۴}=\frac{۲۴+x}{۱۸}=\frac{۲۴}{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{۲۴\times۲۴}{۴۸}=۱۲ \Rightarrow y=۱۲ \\ ۲۴+x=\dfrac{۱۸\times۴۸}{۲۴} \Rightarrow x=۱۲ \end{cases}$$

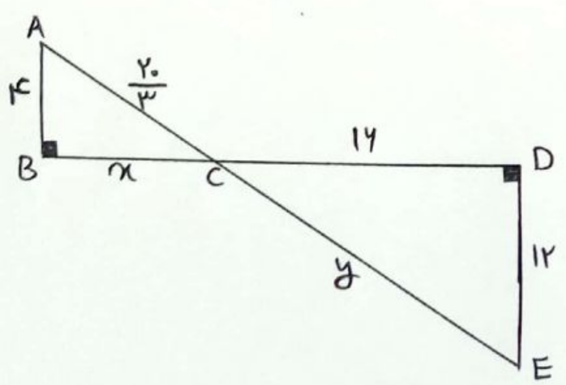
مثال. روی دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر قرار گرفته است. جاسوسی که در سوی دیگر رود خانه است برای یافتن فاصله‌اش تا پای نورافکن، چوبی به اندازهٔ یک متر را روی زمین می‌گذارد و می‌بیند که طول سایهٔ چوب ۵ متر است. فاصله جاسوس تا پای نورافکن را به دست آورید.





$$\overset{\triangle}{AMN} \overset{\text{زز}}{\sim} \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{AB}=\frac{۱}{۶۰} \Rightarrow AB=۳۰۰\,m$$

$$MB=AB-AM=۳۰۰-۵=۲۹۵\,m$$



تمرین. الف) ثابت کنید $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CDE}$

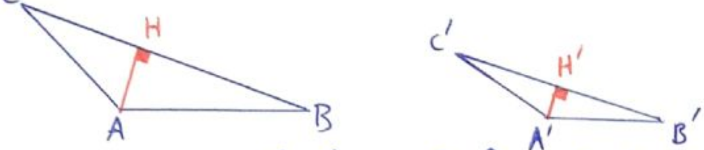
ب) طول x و y را پیدا کنید.

✓ قضیه (تناسب بین اجزای نظیر).

فرض کنید $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ و نسبت تشابه آن‌ها K است، یعنی $K=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$

در این صورت ارتفاع‌های نیم‌سازها، میانه‌ها و محیط‌های این دو مثلث نیز با همین نسبت یعنی K متناسب هستند اما مساحت‌های آن‌ها با مجذور K (K^2) متناسب است.

اثبات برای ارتفاع‌ها ←



$$\hat{A}=\hat{A}' \qquad \hat{B}=\hat{B}' \qquad \hat{C}=\hat{C}'$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}' , \hat{H}=\hat{H}' \Rightarrow \overset{\triangle}{ABH} \overset{زز}{\sim} \overset{\triangle}{A'B'H'}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=K$$

اثبات برای محیط‌ها ←

$$\frac{P_{\overset{\triangle}{ABC}}}{P_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}}=\frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\frac{KA'B'+KB'C'+KA'C'}{A'B'+B'C'+A'C'}=\frac{K\cancel{(A'B'+B'C'+A'C')}}{\cancel{A'B'+B'C'+A'C'}}=K$$

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=K \to AB=K\times A'B' \text{ و } \frac{BC}{B'C'}=K \to BC=K\times B'C' \text{ و } \frac{AC}{A'C'}=K \to AC=K\times A'C'\right)$$

اثبات برای مساحت‌ها ←

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times AH\times BC}{\cancel{\frac{1}{2}}\times A'H'\times B'C'}=\underbrace{\frac{AH}{A'H'}}_{K}\times\underbrace{\frac{BC}{B'C'}}_{K}=K\times K=K^2$$

اثبات برای نیم‌سازها و میانه‌ها مشابه بالا است.

✓ بطور خلاصه:

اگر S و S' مساحت‌های دو مثلث متشابه، P و P' محیط‌ها، m و m' میانه‌ها، d و d' نیم‌سازها، h و h' ارتفاع‌ها باشند خواهیم داشت:

a و b و c اضلاع مثلث اول

a' و b' و c' اضلاع مثلث دوم

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{h}{h'}=\frac{d}{d'}=\frac{m}{m'}=\frac{P}{P'}=K \quad \overset{\text{آنگاه}}{\equiv} \quad \frac{S}{S'}=K^2$$

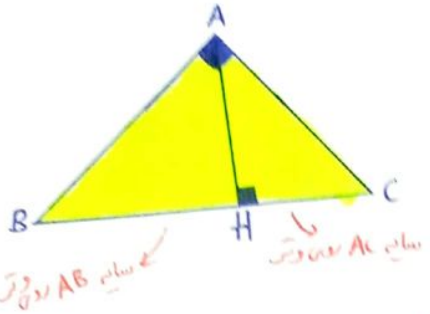
مثال. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{81}{121}$ است. نسبت محیط‌ها را پیدا کنید.

$$\frac{S}{S'}=K^2 \Rightarrow \frac{S}{S'}=\left(\frac{9}{11}\right)^2 \Rightarrow K=\frac{9}{11}$$

$$K=\frac{P}{P'}=\frac{9}{11}$$

✓ روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :

فرض کنید AH ارتفاع وارد بر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) باشد ، در این صورت



۱. ارتفاع وارد بر وتر دو مثلث قائم الزاویه پدید می آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه اند.

۲. از تناسب اضلاع در مثلث های متشابه می توان نتیجه گرفت :

فیثاغورس $BC^2 = AB^2 + AC^2$

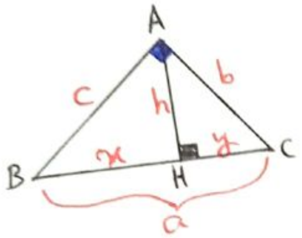
$$\boxed{AH^2 = BH \times CH} \qquad \boxed{AB^2 = BH \times BC} \qquad \boxed{AC^2 = CH \times BC}$$

سایه AB روی وتر — سایه AC روی وتر — سایه AB روی وتر — وتر — سایه AC روی وتر — وتر

$$\boxed{AH \times BC = AB \times AC}$$

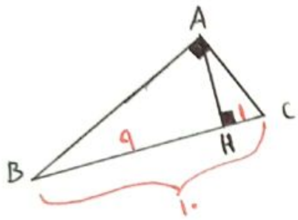
اثبات رابطه آخر :

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \times AC \\ S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} AH \times BC \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$



__توجه.__ اگر ضلع ها را با حروف کوچک نمایش دهیم ، آنگاه روابط بالا بصورت زیر خلاصه می شوند

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad h^2 = x \times y \qquad c^2 = x \times a \qquad b^2 = y \times a \qquad h \cdot a = b \cdot c$$



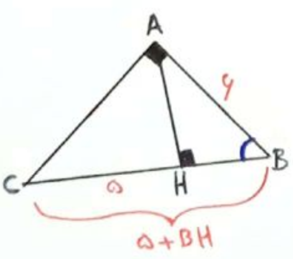
__مثال.__ در مثلث قائم الزاویه روبه رو ؛ $BC=10$ و $BH=9$ مطلوب است

محاسبه AH ، AC و AB .

$$AH^2 = BH \times HC = 9 \times 1 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH = 3$$

$$AB^2 = BH \times BC = 9 \times 10 = 90 \xrightarrow{\sqrt{\ }} AB = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 1 \times 10 = 10 \xrightarrow{\sqrt{\ }} AC = \sqrt{10}$$



__مثال.__ در شکل مقابل $AB=6$ و $CH=5$ می باشد.

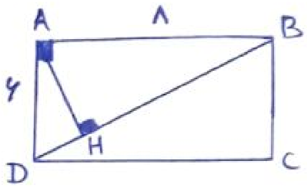
– چرا $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHC}$ – $AH=?$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \;; \\ \hat{C} = \hat{C} \;; \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{زز}}{\sim} \overset{\triangle}{AHC}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow (6)^2 = BH(BH + \underset{5}{HC}) \Rightarrow 36 = BH^2 + 5BH$$

$$\Rightarrow BH^2 + 5BH - 36 = 0 \Rightarrow (BH+9)(BH-4) = 0 \left\{\begin{array}{l} BH = -9 \;\;\#\\ BH = 4 \;\;✓ \end{array}\right.$$

$$AC^2 = HC \times BC = 5 \times 9 = 45 \rightarrow AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



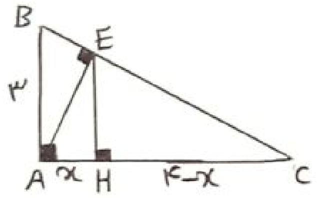
مثال . ابعاد مستطیلی ۶ و ۸ متر می‌باشد . فاصلهٔ رأس مستطیل تا قطر را بدست آورید .

$AH = ?$

$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \rightarrow BD = ۱۰$

$AH \times BD = AB \times AD \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۸ \times ۶$

$\Rightarrow AH = \frac{۴۸}{۱۰} \Rightarrow AH = ۴/۸\ m$



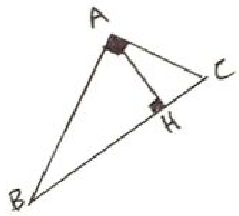
مثال . در شکل زیر ارتفاع هر دو مثلث رسم شده است . اندازهٔ x چقدر است ؟

$AC = AH + HC = x + ۴ - x = ۴$

$AB = ۳ \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{} BC = ۵$

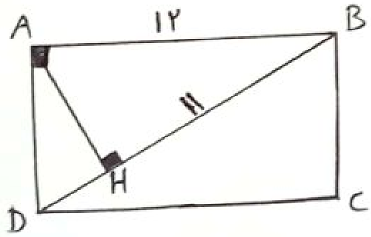
$AB \times AC = AE \times BC \rightarrow ۳ \times ۴ = AE \times ۵ \rightarrow AE = \frac{۱۲}{۵}$

$AE^۲ = AH \times AC \Rightarrow (\frac{۱۲}{۵})^۲ = x \times ۴ \Rightarrow x = \frac{\frac{۱۴۴}{۲۵}}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱۴۴}{۱۰۰} = ۱/۴۴$



تمرین . در شکل مقابل اگر $AC = ۵$ و $CH = ۲$ مقادیر خواسته شده را بیابید .

$BC = ?$ $\quad AH = ?$ $\quad AB = ?$



تمرین . در شکل روبه‌رو ؛ $AH = ?$ $\quad BD = ?$ $\quad AD = ?$