فصل چهارم: مثلثات

- درس ۱. واحدهای اندازه‌گیری زاویه
- درس ۲. رابطه‌های تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
- درس ۳. توابع مثلثاتی

درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

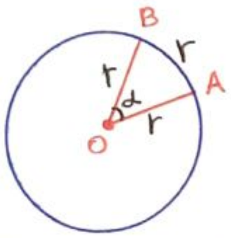
ریاضی مزخرفه تکثیر خندیدن است ... $\pi \simeq$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴

✓ یک درجه:

یک درجه که آن را به صورت 1° نشان می‌دهیم برابر با $\frac{1}{360}$ محیط دایره می‌باشد پس کل محیط دایره 360° است.

- واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه وجود دارد که رادیان نام دارد.

✓ رادیان:



دایره‌ای به شعاع r و مرکز O درنظر بگیرید. دو نقطه A و B را روی این دایره طوری مشخص کنید که طول $\widehat{AB}$ برابر اندازه شعاع دایره شود. اگر A و B را به مرکز دایره وصل کنیم آنگاه $A\hat{O}B$ را یک رادیان می‌گوییم.

- یک رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی در یک دایره به شعاع r که طول کمان روبه روی آن با شعاع دایره مساوی است.

✓ اندازه یک زاویه مرکزی برحسب رادیان (Rad)

نسبت طول کمان روبه روی یک زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ شعاع دایره، اندازهٔ آن زاویه برحسب رادیان می‌باشد.

اگر L طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه برحسب رادیان باشد آنگاه

$$\text{اندازه زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{L}{r}}$$

L و r هم واحدند.

مثال. دایره‌ای به شعاع ۱۰ مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{8}{10} = 0/8 \ \text{Rad}$$

مثال . اگر طول کمان روبه رو به زاویه ای ۵۰۰ سانتی متر و شعاع دایره ۵ متر باشد ، اندازه این زاویه را بر حسب رادیان بدست آورید.

$L = ۵۰۰\ cm \qquad r = ۵\ m = ۵۰۰\ cm$ L و r هم واحد هستند بنابراین:

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{۵۰۰}{۵۰۰} = ۱\ Rad$$

تمرین . جدول زیر را کامل کنید.

L		۹۰ cm	۵۰ m
r	۱۰ cm		۱۰ m
α	۱ Rad	۳ Rad	

✓ یادآوری :

نسبت محیط هر دایره به قطر آن ، ثابت است که آن را عدد پی می نامند و با نماد π نمایش می دهند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است.

✓ رابطه بین درجه و رادیان:

اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد آنگاه ، رابطه $\frac{D}{R} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲\pi}$ برقرار است که می توان با جابه جا کردن جملات این تناسب را بصورت $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$ نوشت.

سؤال : دلیل معادل بودن π با ۱۸۰° چیست؟ $\pi \overset{?}{\equiv} ۱۸۰^\circ$

دایره ای به شعاع ۱ واحد را در نظر بگیرید. محیط این دایره

(محیط دایره = قطر × ۳/۱۴) $P = ۲\pi(۱) = ۲\pi$

از طرفی محیط دایره ۳۶۰° است پس به هم ارز زیر می رسیم:

$$۲\pi \equiv ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \pi \equiv ۱۸۰^\circ$$

یک درجه = $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان

سؤال : یک رادیان معادل چند درجه است؟

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۴} \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱}{۳/۱۴} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۳/۱۴} \simeq ۵۷/۳$$

$$۱\ Rad \equiv ۵۷/۳\ D$$

- توجه کنید! اگر در محاسبات مقدار $\pi = ۳$ در نظر بگیریم آنگاه ، $۱\ Rad \equiv ۶۰\ D$ خواهد شد.

مثال . زاویه -۱۲° را به رادیان و زاویه $\frac{\pi}{۲۰}$ را به درجه تبدیل کنید.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \longrightarrow \frac{-۱۲^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = -\frac{\pi}{۱۵}$$

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \longrightarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{۲۰}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱}{۲۰} \rightarrow D = ۹^\circ$$

تذکر. برای تبدیل راحت‌تر رادیان به درجه، کافی است به جای π معادلش 180° را قرار دهیم. و برای تبدیل درجه به رادیان آن را در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب می‌کنیم.

$$R = \frac{\pi}{180^\circ} D$$

مثال. 24° معادل چند رادیان است؟ $\frac{\pi}{36}\text{Rad}$ معادل چند درجه است؟

$$D = 24^\circ \rightarrow R = \frac{\pi}{180^\circ} \times 24^\circ = \frac{2\pi}{15}$$

$$R = \frac{\pi}{36} \rightarrow R = \frac{180^\circ}{36} = 5^\circ$$

مثال. در دایره‌ای به شعاع ۴ متر، توسط زاویه α، کمانی به طول ۶ متر ایجاد می‌شود. با فرض اینکه $\pi \simeq 3$ باشد اندازهٔ زاویه α را برحسب درجه بیابید.

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ Rad}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{1.5}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq 3} D = \frac{180^\circ \times 1.5}{3} = 90^\circ$$

[می‌دانیم با فرض اینکه $\pi = 3$، خواهیم داشت $1\text{Rad} \equiv 60^\circ$ لذا $1.5\text{ Rad} \equiv 1.5 \times 60^\circ = 90^\circ$]

مثال. در یک تراکتور شعاع چرخ جلو 40^{cm} و شعاع چرخ عقب 60^{cm} است. اگر چرخ جلو $\frac{\pi}{6}$ رادیان بچرخد، میزان چرخش چرخ عقب برحسب رادیان چقدر است؟

چرخ جلو یا عقب به هر میزان که بچرخد، زاویه ایجاد شده توسط آن‌ها متفاوت ولی مسافت طی شده توسط آن‌ها با هم برابر می‌باشد:

چرخ جلو: $\alpha = \frac{L}{r} \rightarrow L = r \cdot \alpha = 40 \times \frac{\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}$

چرخ عقب: $L = r \cdot \alpha \rightarrow \frac{20\pi}{3} = 60 \times \alpha \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}$ رادیان

✓ زاویه‌های معروف در دایرهٔ مثلثاتی برحسب درجه و رادیان:

$0^\circ = 2\pi$ ، $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ، $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ، $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ، $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ، $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ، $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$

$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ ، $180^\circ = \pi$ ، $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$ ، $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ ، $240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ ، $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ ، $300^\circ = \frac{5\pi}{3}$

$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$ ، $330^\circ = \frac{11\pi}{6}$

تمرین. زاویه $\hat{\theta} = \frac{6\pi}{5}$ درکدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

تمرین. طول برف پاک‌کنی 20^{cm} است و برف پاک‌کن در یک حرکت ۱۵۰ درجه را می‌پیماید. مسافتی که انتهای برف پاک‌کن طی می‌کند برحسب cm چقدر است؟ $(\pi = 3)$

درس ۲: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x\times\cot x=1 \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

در این قسمت می‌خواهیم روابطی را ارائه کنیم که با استفاده از آن‌ها بتوان نسبت های مثلثاتی برخی زوایا را برحسب نسبت های مثلثاتی زوایایی که مقدار آن‌ها را می‌دانیم به دست آوریم.

✓ نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه هم می‌گوییم. با توجه به اینکه $-\alpha=2\pi-\alpha$ است، زاویه $(-\alpha)$ در ربع چهارم قرار دارد و نسبت های مثلثاتی آن به صورت زیر قابل محاسبه است: (منفی از تمام نسبت های مثلثاتی به جز کسینوس عبور می‌کند.)

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

کسینوس منفی خوره !!!

مثال: $\sin(-30^\circ)\cdot\cos(-60^\circ)=-\sin 30^\circ\times\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

✓ دو زاویه مکمل

دو زاویه α و β را مکمل می‌گوییم هرگاه مجموع آن‌ها 180° یا π رادیان باشد. مانند 60° و 120° ($\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$)

✓ دو زاویه متمم

دو زاویه α و β را متمم گوییم هرگاه مجموع آن‌ها 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد. مانند 30° و 60° ($\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$)

− اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است.

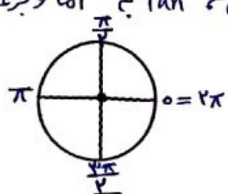
● محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های $-\alpha$ ، $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ، $\pi\pm\alpha$ ، $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ ، $2k\pi\pm\alpha$

[به طور خلاصه $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$]

در تمام زاویه های فوق، برای تعیین مقدار نسبت مثلثاتی زاویه بیان شده بر مبنای دو مطلب زیر عمل می‌کنیم:

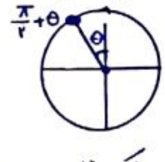
① ربع شناسی (تعیین ناحیه زاویه داده شده): ابتدا علامت نسبت را برحسب اینکه زاویه داده شده، در کدام ناحیه قرار دارد، معلوم می‌کنیم ← هستک

② تبدیل یا عدم تبدیل نسبت به متقابلش: اگر زاویه شامل $\frac{\pi}{2}$ (یعنی 90°) یا $\frac{3\pi}{2}$ (یعنی 270°) باشد، نسبت مثلثاتی به متقابل خود تبدیل می‌شود یعنی sin به cos و برعکس، tan به cot و برعکس. در غیراینصورت نسبت دست نخورده باقی می‌ماند.



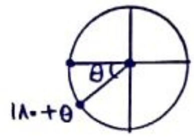
به عنوان مثال برای محاسبه $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$ ، می‌دانیم که زاویه $(\frac{\pi}{2}+\theta)$ در ناحیه دوم مثلثات قرار دارد (θ را همواره زاویه حاده فرض می‌کنیم) و $\cos$ در ربع دوم منفی است. چون نسبت شامل $\frac{\pi}{2}$ است لذا به متقابل خود تبدیل می‌شود، در نتیجه:

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$$



برای محاسبه $\tan(180^\circ+\theta)$ ابتدا ناحیه‌ای را که زاویه $(180^\circ+\theta)$ در آن قرار دارد، مشخص می‌کنیم که ربع سوم می‌باشد و $\tan$ در ناحیه سوم مقداری مثبت است. از طرفی دیگر چون زاویه شامل $(\pi=180^\circ)$ است، به متقابل خودش تبدیل نمی‌شود:

$$\tan(180^\circ+\theta) = +\tan\theta$$



– با توجه به دو نکته بیان شده به محاسبه تک‌تک نسبت‌های مثلثاتی زوایای بیان شده می‌پردازیم:

۱) $\frac{\pi}{2}-\alpha$

این زاویه در ناحیه اول قرار دارد پس تمام نسبت‌های آن مثبت بوده و چون شامل $\frac{\pi}{2}$ است پس تمام نسبت‌ها به متقابل خود تبدیل می‌شوند.

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

مثال: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

۲) $\frac{\pi}{2}+\alpha$

این زاویه در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد در نتیجه فقط $\sin$ آن مثبت و بقیه نسبت‌های مثلثاتی‌اش منفی می‌باشند و چون شامل $\frac{\pi}{2}$ است، نسبت‌ها به متقابل خود تبدیل می‌شوند.

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

مثال: $\tan 135^\circ = \tan(90^\circ+45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

۳) $\pi-\alpha$

این زاویه در ربع دوم قرار دارد و فقط $\sin$ آن مثبت است و چون فاقد $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ است، پس نسبت‌های آن تغییر نمی‌کند.

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

مثال: $\cos(\frac{3\pi}{4})=?$

$\frac{3\pi}{4}$ را می‌توان به صورت $\frac{4\pi-\pi}{4}$ نوشت یعنی $\frac{\cancel{4}\pi}{\cancel{4}}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \cos(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\pi-\frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴) $\pi+\alpha$

این زاویه در ربع سوم قرار دارد، بنابراین

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

مثال $\quad \cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)=?$

می‌توان نوشت: $\quad \frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cot\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

۵) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$

این زاویه در ربع سوم قرار دارد، پس

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=+\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=+\tan\alpha$

مثال $\quad \sin 240^\circ=?$

داریم: $240^\circ=270^\circ-30^\circ$ لذا

$$\Rightarrow \sin 240^\circ=\sin(270^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۶) $\frac{3\pi}{2}+\alpha$

این زاویه در ناحیه چهارم مثلثاتی واقع است، لذا

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

مثال $\quad \cos 300^\circ=?$

می‌دانیم $300^\circ=270^\circ+30^\circ$، پس

$$\Rightarrow \cos 300^\circ=\cos(270^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

تذکر. دو زاویه‌ی α و β را هم‌انتها گوییم هرگاه اضلاع انتهایی آن‌ها در دایره‌ی مثلثاتی، برهم منطبق باشند. اگر دو زاویه هم‌انتها باشند اختلاف آن‌ها مضرب زوجی از π رادیان (یا 180°) است.

$\alpha\equiv 2\pi+\alpha\equiv 2k\pi+\alpha$

نماد $\equiv$ نشان می‌دهد که زاویه‌های α، $2\pi+\alpha$ و $2k\pi+\alpha$ بر روی دایره مثلثاتی هم‌انتها می‌باشند. در واقع می‌توان دورهای کامل یعنی $2k\pi$ (مضارب زوج π) را معادل صفر قرار داد. پس آن‌ها را نادیده می‌گیریم.

$2k\pi\equiv 0$ $\qquad$ $(2k+1)\pi\equiv\pi$

زوج πها $\rightarrow 0$ $\qquad$ فرد πها $\rightarrow \pi$

$2\pi\equiv 4\pi\equiv 6\pi\equiv\cdots\equiv 2k\pi\equiv 0$ $\qquad$ $3\pi\equiv 5\pi\equiv 7\pi\equiv\cdots\equiv(2k+1)\pi\equiv\pi$

$$⑦\ 2k\pi-\alpha \equiv 2\pi-\alpha \equiv -\alpha$$

این زاویه در ربع چهارم است، بنابراین

$$\sin(2k\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \tan(2k\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cot(2k\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال $\cos 660^\circ = ?$

$$\cos 660^\circ=\cos(720^\circ-60^\circ)=\cos(-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$(720^\circ = 4\pi)$$

$$⑧\ 2\pi k+\alpha \equiv 2\pi+\alpha \equiv \alpha$$

این زاویه در ناحیه اول مثلثاتی واقع است، پس

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

مثال $\cot 390^\circ = ?$

$$\cot 390^\circ=\cot(360^\circ+30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

تذکر. توجه شود که محاسبه نسبت‌های مثلثاتی تمام زاویه‌های $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$ بر مبنای دو نکته ۱. ربع‌شناسی (تعیین ناحیه) ۲. تبدیل یا عدم تبدیل نسبت به متقابلش صورت می‌گیرد و به هیچ عنوان نیازی به حفظ آن‌ها نیست.

مثال. حاصل عبارت $A=\sin(\frac{4\pi}{3})+\cos\frac{7\pi}{3}\cdot\tan\frac{10\pi}{3}$ را بیابید.

$$A=\sin(\frac{3\pi+\pi}{3})+\cos(\frac{6\pi+\pi}{3})\times\tan(\frac{9\pi+\pi}{3})=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})+\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})\times\tan(3\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$=-\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Rightarrow A=0$$

مثال. درستی تساوی روبه‌رو را ثابت کنید. $\sin(3\pi+x)\cdot\cos(\frac{5\pi}{2}+x)+\cos(17\pi-x)\cdot\sin(\frac{11\pi}{2}+x)=1$

طرف چپ تساوی: $\sin(\pi+x)\cdot\cos(2\pi+\frac{\pi}{2}+x)+\cos(\pi-x)\cdot\sin(6\pi-\frac{\pi}{2}+x)=(-\sin x)\cdot(-\sin x)+(-\cos x)\cdot(-\cos x)$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

تمرین. الف) حاصل عبارت $\cos(-720^\circ)+\cot(-600^\circ)+\tan(720^\circ)$ را به دست آورید.

ب) درستی تساوی $\sin 200^\circ\times\sin 340^\circ+\cos 160^\circ\times\cos 200^\circ=1$ را بررسی کنید.

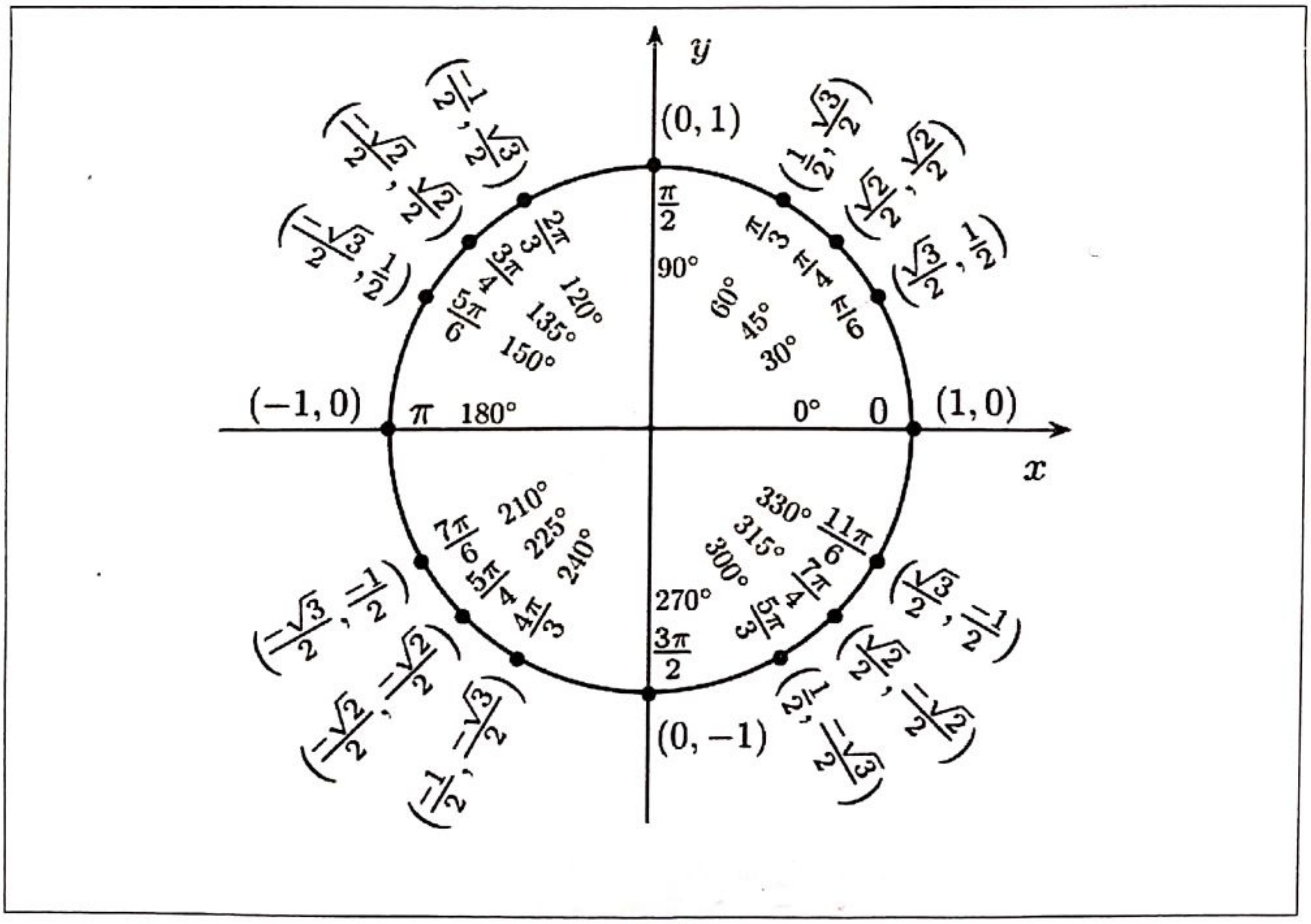
تمرین. اگر $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ و $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{7\pi}{2}-\alpha)$ را به دست آورید.

بطور خلاصه

برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای شامل π، 2π، $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

نوع زاویه	نحوه‌ی محاسبه
$\pi \pm \alpha$ ، $2\pi \pm \alpha$ یا $180^\circ \pm \alpha$ ، $360^\circ \pm \alpha$	با توجه به آن‌که زاویه در کدام ربع قرار دارد، به کمک قانون «هستک» علامت آن را می‌یابیم. **مثلاً**: $\sin(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{ربع سوم: سینوس منفی}}) = -\sin\alpha$
$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ، $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ یا $90^\circ \pm \alpha$ ، $270^\circ \pm \alpha$	مانند بالا عمل می‌کنیم، با این تفاوت که **پس از یافتن علامت**، sin بـه cos و tan بـه cot و بـرعکس تبدیل می‌شود. **مثلاً**: $\tan(\underbrace{270^\circ-\alpha}_{\text{ربع سوم: تانژانت مثبت}}) = +\cot\alpha$
$-\alpha$	منفی از تمام نسبت‌های مثلثاتی به‌جز کسینوس عبور می‌کند: cos منفی خوره !!! $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ، $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ، $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ ، $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
$(2k+1)\pi \pm \alpha$ ، $2k\pi \pm \alpha$	مضارب زوج π را حذف می‌کنیم و به جای مضارب فرد π، π قرار می‌دهیم. زوج πها $\to 0$ فرد πها $\to \pi$ **مثلاً**: $\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha) = \sin(\cancel{2\pi}+\frac{\pi}{2}+\alpha) = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{2}+\alpha}_{\text{ربع دوم: سینوس مثبت}}) = +\cos\alpha$

◀ **تذکر:** در حل این نوع مسائل، برای یافتن ربع موردنظر، همواره α را زاویه‌ای حاده در نظر می‌گیریم. این کار ایرادی در حل مسأله ایجاد نمی‌کند.



درس ۳ : توابع مثلثاتی

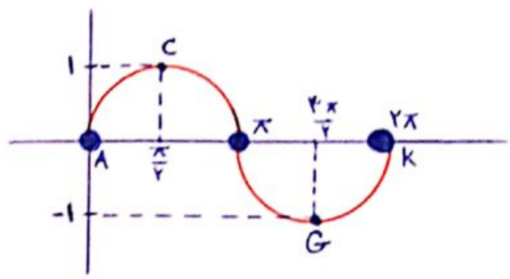
$f(x)=\cos x$ ، $f(x)=\sin x$

نمونه هایی از توابع مثلثاتی عبارتند از (تابع سینوس) $y=\sin x$ و (تابع کسینوس) $y=\cos x$ که در اینجا با آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱ رسم تابع سینوس $y=\sin x$

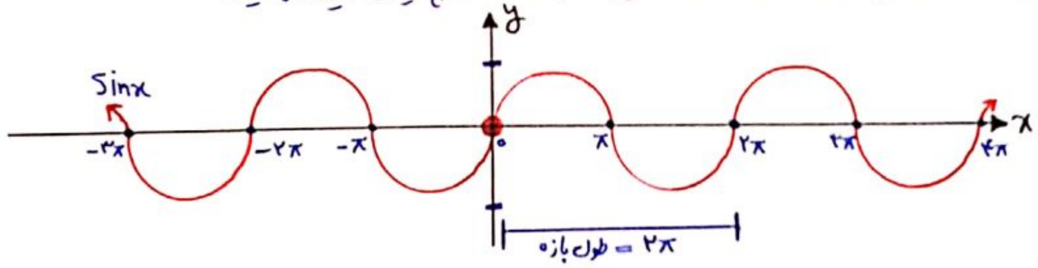
با تعیین مقدار تابع Sin در نقاط ساخته شده از بازهٔ $[0,2\pi]$ یعنی یک دور دایره مثلثاتی ، و به هم وصل کردن آن‌ها می‌توان نمودار تابع Sin را رسم کرد.

x طول نقطه	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y مقدار تابع Sin	0	$0/5$	1	$0/5$	0	$-0/5$	-1	$-0/5$	0
نام نقطه	A	B	C	D	E	F	G	H	K



$[0,\frac{\pi}{2}]$ افزایش ۰ به ۱ ، $[\frac{\pi}{2},\pi]$ کاهش ۱ به ۰ ، $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ کاهش ۰ به ۱- ، $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ افزایش ۱- به ۰

تذکر. نمودار تابع $y=\sin x$ بر روی کل محور اعداد حقیقی IR به صورت موج سینوسی زیر در می‌آید:



با توجه به تساوی $\sin(x+2\pi)=\sin x$ مقدار تابع سینوسی با اضافه کردن 2π به کمان آن تغییر نمی‌کند ، پس نمودار تابع در بازه‌های $[0,2\pi]$ ، $[2\pi,4\pi]$ و ... یکسان است. همچنین با توجه به تساوی $\sin(x-2\pi)=\sin x$ مقدار تابع سینوسی با کم کردن 2π را از کمان آن تغییر نمی‌کند در نتیجه نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌های $[0,2\pi]$ و $[-2\pi,0]$ و $[-4\pi,-2\pi]$ و ... یکسان است.

نمودار $y=\sin x$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود.

تذکر. با توجه به نمودار کلی $y=\sin x$ می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

۱. دامنه تابع $f(x)=\sin x$ برابر IR و برد آن $[-1,+1]$ می‌باشد.

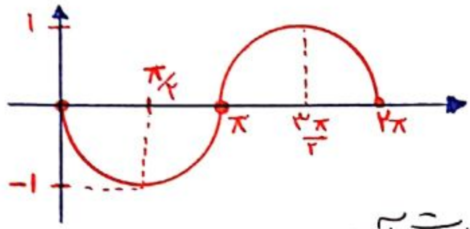
۲. حداکثر مقدار تابع برابر 1 می‌باشد و در نقاطی به طول‌های ...، $\frac{5\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{3\pi}{2}$ و $-\frac{5\pi}{2}$ و ... و در حالت کلی $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ این مقدار را اختیار می‌کند.

۳. حداقل مقدار تابع برابر ۱- است و در نقاطی به طول‌های ... و $\frac{7\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{5\pi}{2}$ و ... و در حالت کلی $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ این مقدار را اختیار می‌کند.

۴. مقدار تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول $x=k\pi$ برابر صفر است، بنابراین $x=k\pi$ ریشه‌های معادله $\sin x=0$ هستند. و این یعنی سینوس در مضارب صحیح π صفر می‌باشد.

مثال. نمودار تابع $y=-\sin x$ را به کمک $y=\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

می‌دانیم برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



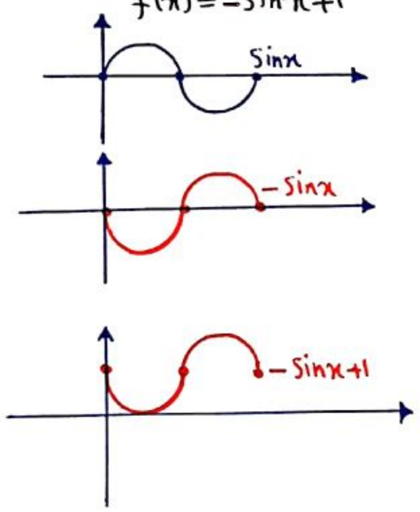
مثال. ضابطه تابع $f(x)=2\sin(x+\frac{17\pi}{3})-1$ داده شده است. مقدار تابع را در نقطه $x=\frac{\pi}{6}$ به دست آورید.

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{x=\frac{\pi}{6}} f(\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{17\pi}{3})-1=2\sin(\frac{35\pi}{6})-1=2\sin(\underbrace{6\pi}-\frac{\pi}{6})-1$$

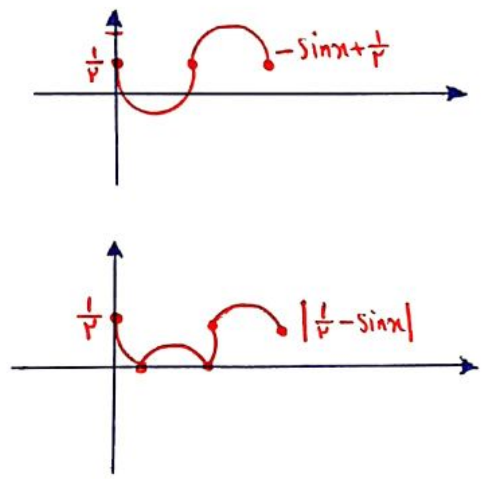
$$=2\sin(-\frac{\pi}{6})-1=-2\sin\frac{\pi}{6}-1=-2\times\frac{1}{2}-1=-2$$

مثال. به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

$f(x)=-\sin x+1$

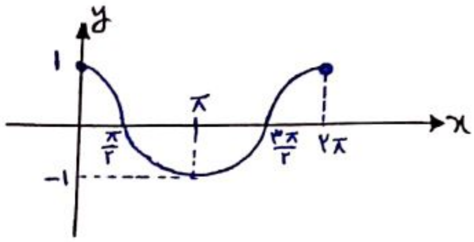


$g(x)=\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|$



تمرین. نمودار توابع $y=-2\sin x$ و $y=|\sin x|$ را با استفاده از انتقال رسم کنید.

۲ ● رسم تابع کسینوس $y=\cos x$

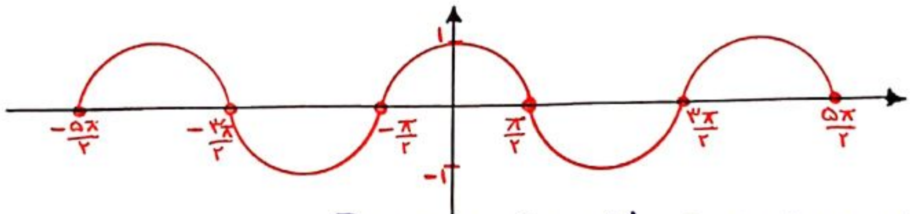


نمودار تابع $y=\cos x$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت مقابل است:

در بازه $[0,\pi]$ کاهشی و در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ افزایشی

-1 = کم‌ترین مقدار تابع 1 = بیش‌ترین مقدار تابع

تذکر. نمودار تابع $y=\cos x$ بر روی کل محور اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار خواهد شد و به صورت زیر در می‌آید



۱. دامنه تابع $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و بُرد آن بازهٔ $[-1,1]$ است.

۲. حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است و در نقاطی به طول ... و 2π و 0 و -2π و ... و در حالت کلی $x=2k\pi$ این مقدار را اختیار می‌کند

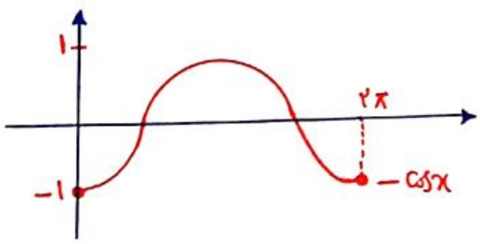
۳. حداقل مقدار تابع برابر -1 است و در نقاطی به طول $x=2k\pi+\pi$ اتفاق می‌افتد.

۴. مقدار تابع $y=\cos x$ در نقاطی به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ برابر صفر است. در واقع ریشه‌های معادله $\cos x=0$ عبارتند از

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

مثال. نمودار تابع $y=-\cos x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید (انتقال)

کافی است نمودار $y=\cos x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

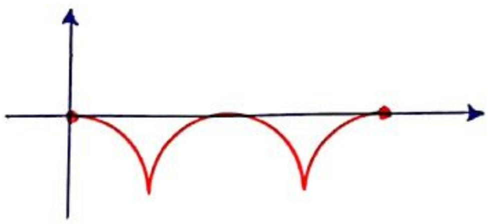


مثال. اگر $f(x)=-3\cos(x+\frac{11\pi}{6})$، مطلوب است محاسبه $f(\frac{\pi}{3})$.

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{x=\frac{\pi}{3}} f(\frac{\pi}{3})=-3\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6})=-3\cos(\frac{13\pi}{6})$$

$$=-3\cos(2\pi+\frac{\pi}{6})=-3\cos\frac{\pi}{6}=-3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال. نمودار تابع $y=|\cos x|-1$ را در یک دور دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.



تمرین. با استفاده از انتقال نمودار توابع زیر را در $[0,2\pi]$ رسم کنید.

$y=|2\cos x+1|$ $y=-1+\cos x$

زاویه برحسب درجه	زاویه برحسب رادیان	سینوس	کسینوس	تانژانت
0°	0.000	0.000	1.000	0.000
1°	0.017	0.017	1.000	0.017
2°	0.035	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.070	0.998	0.070
5°	0.087	0.087	0.996	0.087
6°	0.105	0.105	0.995	0.105
7°	0.122	0.122	0.993	0.123
8°	0.140	0.139	0.990	0.141
9°	0.157	0.156	0.988	0.158
10°	0.175	0.174	0.985	0.176
11°	0.192	0.191	0.982	0.194
12°	0.209	0.208	0.978	0.213
13°	0.227	0.225	0.974	0.231
14°	0.244	0.242	0.970	0.249
15°	0.262	0.259	0.966	0.268
16°	0.279	0.276	0.961	0.287
17°	0.297	0.292	0.956	0.306
18°	0.314	0.309	0.951	0.325
19°	0.332	0.326	0.946	0.344
20°	0.349	0.342	0.940	0.364
21°	0.367	0.358	0.934	0.384
22°	0.384	0.375	0.927	0.404
23°	0.401	0.391	0.921	0.424
24°	0.419	0.407	0.914	0.445
25°	0.436	0.423	0.906	0.466
26°	0.454	0.438	0.899	0.488
27°	0.471	0.454	0.891	0.510
28°	0.489	0.469	0.883	0.532
29°	0.506	0.485	0.875	0.554
30°	0.524	0.500	0.866	0.577
31°	0.541	0.515	0.857	0.601
32°	0.559	0.530	0.848	0.625
33°	0.576	0.545	0.839	0.649
34°	0.593	0.559	0.829	0.675
35°	0.611	0.574	0.819	0.700
36°	0.628	0.588	0.809	0.727
37°	0.646	0.602	0.799	0.754
38°	0.663	0.616	0.788	0.781
39°	0.681	0.629	0.777	0.810
40°	0.698	0.643	0.766	0.839
41°	0.716	0.656	0.755	0.869
42°	0.733	0.669	0.743	0.900
43°	0.750	0.682	0.731	0.933
44°	0.768	0.695	0.719	0.966
45°	0.785	0.707	0.707	1.000
46°	0.803	0.719	0.695	1.036
47°	0.820	0.731	0.682	1.072
48°	0.838	0.743	0.669	1.111
49°	0.855	0.755	0.656	1.150
50°	0.873	0.766	0.643	1.192
51°	0.890	0.777	0.629	1.235
52°	0.908	0.788	0.616	1.280
53°	0.925	0.799	0.602	1.327
54°	0.942	0.809	0.588	1.376
55°	0.960	0.819	0.574	1.428
56°	0.977	0.829	0.559	1.483
57°	0.995	0.839	0.545	1.540
58°	1.012	0.848	0.530	1.600
59°	1.030	0.857	0.515	1.664
60°	1.047	0.866	0.500	1.732
61°	1.065	0.875	0.485	1.804
62°	1.082	0.883	0.469	1.881
63°	1.100	0.891	0.454	1.963
64°	1.117	0.899	0.438	2.050
65°	1.134	0.906	0.423	2.145
66°	1.152	0.914	0.407	2.246
67°	1.169	0.921	0.391	2.356
68°	1.187	0.927	0.375	2.475
69°	1.204	0.934	0.358	2.605
70°	1.222	0.940	0.342	2.747
71°	1.239	0.946	0.326	2.904
72°	1.257	0.951	0.309	3.078
73°	1.274	0.956	0.292	3.271
74°	1.292	0.961	0.276	3.487
75°	1.309	0.966	0.259	3.732
76°	1.326	0.970	0.242	4.011
77°	1.344	0.974	0.225	4.331
78°	1.361	0.978	0.208	4.705
79°	1.379	0.982	0.191	5.145
80°	1.396	0.985	0.174	5.671
81°	1.414	0.988	0.156	6.314
82°	1.431	0.990	0.139	7.115
83°	1.449	0.993	0.122	8.144
84°	1.466	0.995	0.105	9.514
85°	1.484	0.996	0.087	11.43
86°	1.501	0.998	0.070	14.301
87°	1.518	0.999	0.052	19.081
88°	1.536	0.999	0.035	28.636
89°	1.553	1.000	0.017	57.290
90°	1.571	1.000	0.000	∞