فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

۱. تابع نمایی و ویژگی های آن

۲. تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

۳. نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: توابع نمایی

اولین تابعی است که متغیر در توان و عدد ثابت در پایه قرار دارد.

$y=(\text{عدد ثابت})^{\text{متغیر}}$

هر تابع با ضابطه $\boxed{y=f(x)=a^x}$ را که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک می باشد، تابع نمایی می گوییم. مثل $y=2^x$

$$\text{تابع نمایی است } y=a^x \iff a\in\mathbb{R}\,,\ a>0\,,\ a\neq 1$$

$$[\text{if}: a=1 \Rightarrow y=1^x=1=\text{تابع ثابت}\ \#]$$

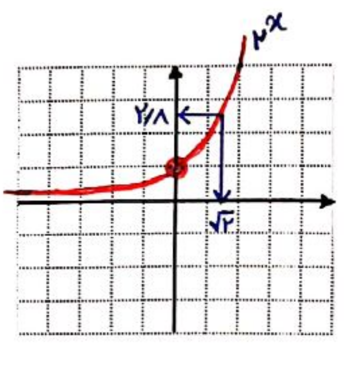
— اولین باری است که متغیر در توان قرار دارد. اینگونه توابع، جبری نیستند بلکه غیر جبری اند (متعالی اند!). به عبارتی متعالی تر از آنند که روش های جبری در موردشان کارساز باشد.

— در تابع نمایی $y=a^x$، عدد ثابت a پایه و توان متغیر است. اما در تابع $y=x^a$، پایه متغیر و توان عدد ثابت است.

$$a^0=1 \qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x} \qquad a^x\cdot a^y=a^{x+y} \qquad (a^x)^y=a^{xy} \qquad (ab)^x=a^x\cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x} \qquad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

مثال. نمودار تابع نمایی $y=2^x$ را رسم کنید و به کمک آن مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را حدس بزنید سپس این مقدار را به کمک ماشین حساب به دست آورید.



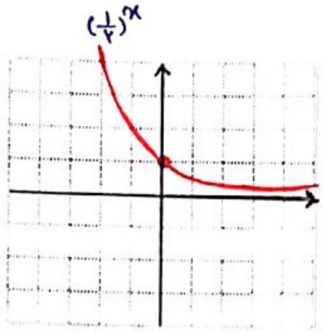
x	-۲	-۱	-۰/۵	۰	۱	۲	۲/۵
y	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۲	۴	۵/۶۶

$y=2^{-1}=\frac{1}{2}=۰/۵$

به کمک نمودار: $2^{\sqrt{2}}\simeq ۲/۸$

ماشین حساب: $2^{\sqrt{2}}\simeq ۲/۶۶۵۱۴۴...$

Scanned with CamScanner



مثال. نمودار تابع نمایی $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
y	8	4	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

ویژگی‌های تابع نمایی:

۱. دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

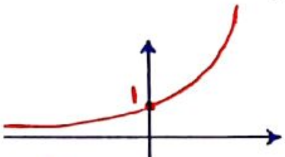
$$\mathbb{R} \longrightarrow \boxed{a^x} \longrightarrow (0,+\infty)$$

۲. همهٔ نمودارهای توابع نمایی از نقطه $(0,1)$ عبور می‌کنند.

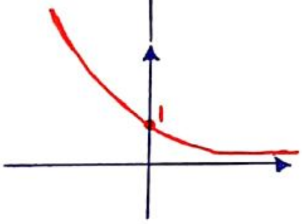
$$\text{if: } x=0 \Rightarrow y=a^0=1 \Rightarrow (0,1)\in f$$

۳. نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند. به عبارتی توابع نمایی همواره مثبت هستند زیرا نمودارشان بالای محور xها است.

۴. تابع در دامنه‌اش، یک به یک است زیرا خط‌های افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

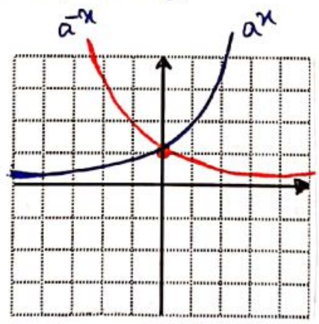


۵. اگر $a>1$ ، با افزایش x مقدار y نیز افزایش می‌یابد (صعودی) و نمودار به شکل روبه‌رو است:



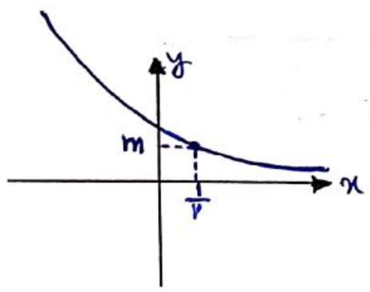
۶. اگر $0<a<1$ ، با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد (نزولی) و نمودار به شکل روبه‌رو است:

۷. نمودار توابع نمایی با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=(\frac{1}{a})^x=a^{-x}$ $(a>0 , a\neq 1)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.



تمرین. نمودار توابع $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را در یک دستگاه رسم کنید.

تمرین. نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ به صورت مقابل است. m چه عددی است؟



Scanned with CamScanner

۷ معادلهٔ نمایی:

معادله‌ای را که در آن مجهول در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامیم.

برای حل معادلهٔ نمایی از خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. یعنی

$$a^x = a^y \overset{a>0}{\underset{a\neq 1}{\Longleftrightarrow}} x = y$$

به عبارت دیگر اگر در معادلهٔ نمایی، پایهٔ دو طرف را یکسان کرد، می‌توان از مطالب فوق برای حل معادله استفاده کرد.

مثال. معادلهٔ نمایی زیر را حل کنید.

$$3^{x-1} = 27$$

$$3^{x-1} = 3^3 \Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \qquad 3^3 = 27$$

$$9^x = 3^{x^2-4x}$$

$$(3^2)^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \qquad 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 2x \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} = 3^{x-1}$$

$$(3^{-2})^{x+2} = 3^{x-1} \Rightarrow 3^{-2x-4} = 3^{x-1} \qquad \frac{1}{9} = 3^{-2}$$

$$\Rightarrow -2x - 4 = x - 1 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \times 4^x = (\sqrt{2})^x$$

$$(2^{-1})^{3x-2} \times (2^2)^x = (2^{\frac{1}{2}})^x \qquad \frac{1}{2} = 2^{-1} \text{ ، } \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 2^{-3x+2} \times 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow 2^{-3x+2+2x} = 2^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow -3x + 2 + 2x = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}x + x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

تذکر. در معادلهٔ نمایی پیچیده‌تر (در بعضی مواقع) می‌توان از تغییر متغیر استفاده کرد.

مثال. معادلهٔ نمایی زیر را حل کنید.

$$10^{2x} - 10^{x+1} + 24 = 0$$

$$(10^x)^2 - 10 \times (10^x) + 24 = 0 \qquad \text{تغییر متغیر: } 10^x = U$$

$$\xrightarrow{10^x = U} U^2 - 10U + 24 = 0 \rightarrow (U-4)(U-6) = 0 \begin{cases} U = 4 \rightarrow 10^x = 4 \\ U = 6 \rightarrow 10^x = 6 \end{cases}$$

معادله دارای ۲ ریشه است.

Scanned with CamScanner

$$3^{2x} - 5 \times 3^{x} = 36$$

تغییر متغیر: $3^x = t$

$$(3^x)^2 - 5(3^x) - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{3^x = t} t^2 - 5t - 36 = 0 \rightarrow (t-9)(t+4) = 0 \begin{cases} t = 9 \rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ t = -4 \rightarrow 3^x = -4 \quad \# \end{cases}$$

تابع نمایی همواره مثبت است!

تمرین . معادله‌ی نمایی زیر را حل کنید .

$$\underbrace{3^x + 3^x + \cdots + 3^x}_{\text{۹ تا}} = 9^x + 9^x + 9^x \qquad 2^{4x} = 4^{x-1}$$

$$2^{x^2} = \frac{1}{2^x} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} \times 64^{x+5} = (\sqrt[3]{4})^x$$

تمرین . اگر $f(x) = 5^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ حاصل $(f+g)(-2)$ را بدست آورید .

تمرین . نمودار توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = x^2$ را در یک دستگاه رسم کنید .

معادله‌ی $2^x = x^2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

Scanned with CamScanner

درس دوم : توابع لگاریتمی

Logaritm

همانطور که دیده‌ایم، تابع نمایی یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. همچنین اگر دو تابع f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند آنگاه

- دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} و برد تابع f با دامنه تابع f^{-1} برابر است. $D_f=R_{f^{-1}}$ $\quad D_{f^{-1}}=R_f$
- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$ $\quad (a,b)\in f \iff (b,a)\in f^{-1}$
- با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y=x$، نمودار f^{-1} به دست می‌آید.

✓ تابع لگاریتمی:

وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می‌گوییم. وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x)=a^x$ را به صورت $f^{-1}(x)=\log_a^x$ نشان می‌دهیم.

[$\log_a^x$ را می‌خوانیم: لگاریتم x در مبنای a] بنابراین:

$$f(x)=a^x \iff f^{-1}(x)=\log_a^x \qquad a>0\,,\ a\neq 1$$

تذکر: در حالت کلی برای تبدیل تساوی لگاریتمی به نمایی و نمایی به لگاریتمی، داریم:

$$\log_a^x=y \iff \underbrace{x}_{\text{عبارت جلو لگاریتم}}=\underbrace{a}_{\text{مبنا}}^{\overbrace{y}^{\text{جواب}}}$$

مثال.

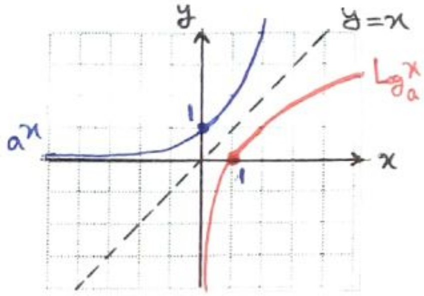
$$2^0=1 \iff \log_2^1=0$$
$$3^2=9 \iff \log_3^9=2$$
$$10^{-2}=0.01 \iff \log_{10}^{0.01}=-2$$
$$5^1=5 \iff \log_5^5=1$$
$$\left(\tfrac{1}{7}\right)^0=1 \iff \log_{\frac{1}{7}}^1=0$$

✓ ویژگی‌های تابع لگاریتمی:

۱. با شرط $a>1$، نمودار تابع $f(x)=\log_a^x$ با توجه به نمودار $f(x)=a^x$ و اینکه دو نمودار نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌باشند، به صورت زیر است:

Scanned with CamScanner

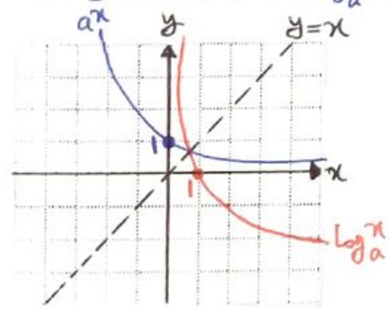
$f(x)=a^x$ $\quad (a>1)$ $\quad D=\mathbb{R}$ $\quad R=(0,+\infty)$



$f(x)=\text{Log}_a^x$ $\quad (a>1)$ $\quad D=(0,+\infty)$ $\quad R=\mathbb{R}$

۲. با شرط $0<a<1$ ، نمودار تابع $f(x)=\text{Log}_a^x$ به صورت زیر می باشد:

$f(x)=a^x$ $\quad (0<a<1)$ $\quad D=\mathbb{R}$ $\quad R=(0,+\infty)$



$f(x)=\text{Log}_a^x$ $\quad (0<a<1)$ $\quad D=(0,+\infty)$ $\quad R=\mathbb{R}$

۳. دیدیم که دامنه تابع $f(x)=\text{Log}_a^x$ برابر $D_f=(0,+\infty)$ است. این بدان معنی است که لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می شود.

– لگاریتم برای اعداد منفی و صفر بی معنا است.

$$(0,+\infty) \longrightarrow \boxed{\text{Log}_a^x} \longrightarrow \mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

۴. نمودار تابع $f(x)=\text{Log}_a^x$ از نقطه $(1,0)$ می گذرد. $\quad f(1)=\text{Log}_a^1=0 \Rightarrow a^0=1$

تذکر. لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی شود. مثلاً به جای Log_{10}^7 می نویسیم: $\text{Log}\,7$

۱۰ فرمان لگاریتم

کد گذاری	قانون	مثال
1 ضد لگاریتم	$a^b=c \Leftrightarrow \text{Log}_a^c=b$	$2^4=16 \Leftrightarrow \text{Log}_2^{16}=4$
2 فرمول های پایه	$\text{Log}_a^1=0 \quad \text{Log}_a^a=1 \quad \text{Log}_a^{\frac{1}{a}}=-1$	$\text{Log}_5^1=0 \quad \text{Log}_5^5=1 \quad \text{Log}_5^{\frac{1}{5}}=-1$
3 تبدیل ضرب درونی به جمع بیرونی	$\text{Log}_c^{a\cdot b}=\text{Log}_c^a+\text{Log}_c^b$	$\text{Log}_2^{3\times 5}=\text{Log}_2^3+\text{Log}_2^5$
4 تبدیل تقسیم درونی به منهای بیرونی	$\text{Log}_c^{\frac{a}{b}}=\text{Log}_c^a-\text{Log}_c^b$	$\text{Log}_{10}^{\frac{1}{10}}=\text{Log}_{10}^1-\text{Log}_{10}^{10}=0-1=-1$
5 توان پشت لگاریتم	$\text{Log}_c^{a^n}=n\cdot\text{Log}_c^a$	$\text{Log}_{10}^{10^2}=2\text{Log}_{10}^{10}=2\times1=2$
6 تعمیم قبلی	$\text{Log}_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\text{Log}_b^a$	$\text{Log}_{3^5}^{3^{10}}=\frac{10}{5}\times\text{Log}_3^3=2\times1=2$
7 چرخشی	$a^{\text{Log}_c^b}=b^{\text{Log}_c^a}$	$5^{\text{Log}_5^3}=3^{\text{Log}_5^5}=3^1=3$
8 تفکیک	$\text{Log}_b^a=\frac{\text{Log}_c^a}{\text{Log}_c^b} \quad c>0 , c\neq1$	$\text{Log}_8^{15}=\text{Log}_{10}^{15}/\text{Log}_{10}^8$
9 معکوس	$\text{Log}_b^a=\frac{1}{\text{Log}_a^b}$	$\text{Log}_3^{10}=\frac{1}{\text{Log}_{10}^3}$
10 حذف ضربی	$\text{Log}_b^a\times\text{Log}_c^b=\text{Log}_c^a$	$\text{Log}_7^4\times\text{Log}_{10}^7=\text{Log}_{10}^4$

Scanned with CamScanner

مثال . اگر $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 3 \simeq 0/4$ باشد مقدار تقریبی هر عبارت را به دست آورید.

$A = \log 6 \rightarrow A = \log 2\times3 = \log 2 + \log 3 = 0/3 + 0/4 = 0/7$

$B = \log 9 \rightarrow B = \log 3^{2} = 2\log 3 = 2\times 0/4 = 0/8$

$C = \log 8 \rightarrow C = \log 2^{3} = 3\log 2 = 3\times 0/3 = 0/9$

$D = \log 72 \rightarrow D = \log 9\times8 = \log 9 + \log 8 = 0/8 + 0/9 = 1/7$

$E = \log \frac{3}{2} \rightarrow E = \log 3 - \log 2 = 0/4 - 0/3 = 0/1$

$F = \log \sqrt[4]{5} \rightarrow F = \log 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\times\log 5 = \frac{1}{4}\times\log\frac{10}{2} = \frac{1}{4}(\log 10 - \log 2)$

$= \frac{1}{4}(1 - 0/3) = \frac{1}{4}\times\frac{7}{10} = \frac{7}{40}$

دقت کنید که در F ما مقدار $\log 5$ را در صورت مسئله نداریم بنابراین به جای آن از $\log\frac{10}{2}$ استفاده کردیم.

مثال . اگر $\log_5 2 = 0/5$ مقدار $\log_5 16 = ?$

$\log_5 16 = \log_5 2^{4} = 4\times\underbrace{\log_5 2}_{0/5} = 4\times 0/5 = 2$

مثال . حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$A = 2^{1+\log_2 5}$

$A = 2^{1}\times 2^{\log_2 5} = 2\times 5^{\log_2 2} = 2\times 5^{1} = 10$

$B = \log_{\sqrt{2}} 0/25 + \log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{7}$

$\log_{\sqrt{2}} 0/25 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2} = \frac{-2}{\frac{1}{2}}\log_2 2 \qquad 0/25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$

$= -4\times 1 = -4$

$\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{7} = \log_{7^{-1}} 7^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{-1}\log_7 7 = \frac{-1}{3}\times 1 = \frac{-1}{3}$

$\Rightarrow B = (-4) + (-\frac{1}{3}) = -\frac{13}{3}$

$C = \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \cdots + \log\frac{99}{100}$

$C = \log\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{\cancel{99}}{100}\right) = \log\frac{1}{100} = \log 1 - \log 100$

$= 0 - \log 10^{2} = \log 10 = -2\times 1 = -2$

مثال . اگر $\log 3 = a$ آنگاه مقدار $\log_{30} 100$ برحسب a را بیابید.

$\log_{30} 100 = \frac{\log 100}{\log 30} = \frac{\log 10^{2}}{\log 3\times10} = \frac{2\log 10}{\log 3 + \log 10} \quad \frac{\log 10 = 1}{\log 3 = a} \quad \frac{2\times1}{a+1} = \frac{2}{a+1}$

Scanned with CamScanner

تمرین. مقدار هر عبارت را بیابید:

$$\log_{\frac{1}{4}}^{4\sqrt{2}} + \log_{7}^{\frac{1}{49}} =$$

$$\log_{4}^{3} \times \log_{5}^{4} \times \cdots \times \log_{27}^{26} =$$

تمرین. اگر $\log^{2} \simeq 0/3$ و $\log^{3} \simeq 0/48$ و $\log^{7} \simeq 0/8$ باشند، مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\log^{\frac{36 \times 49}{\sqrt{7}}}$$

$$\log^{\sqrt{14}} - \log^{21}$$

تمرین. اگر $\log^{2} = A$ و $\log^{3} = B$ باشند، $\log^{45}$ را برحسب A و B محاسبه کنید.

معادلات لگاریتمی:

برای حل معادلات لگاریتمی از ویژگی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد، از تساوی $\log_{a}^{x} = \log_{a}^{y}$ (با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی) می‌توان نتیجه گرفت: $x = y$

و برعکس اگر $x = y$ ($x, y > 0$) آنگاه $\log_{a}^{x} = \log_{a}^{y}$ یعنی می‌توان از طرفین مساوی $\log$ گرفت.

$$x = y \iff \log_{a}^{x} = \log_{a}^{y}$$

به زبان خودمانی می‌توان لگاریتم را از طرفین مساوی زد. (یعنی یک $\log$ بدون ضریب را در برابر یک $\log$ بدون ضریب دیگر ساده می‌کنیم!)

بنابراین برای حل معادلات لگاریتمی از ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به یکی از دو صورت $\log_{b}^{f(x)} = a$ یا $\log_{b}^{f(x)} = \log_{b}^{g(x)}$ در می‌آوریم.

عدد = لگاریتم

$$\log_{b}^{f(x)} = a \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} f(x) = b^{a}$$

لگاریتم = لگاریتم

$$\log_{b}^{f(x)} = \log_{b}^{g(x)} \xrightarrow{(1-1)} f(x) = g(x)$$

- در معادلات لگاریتمی، باید جواب‌های آخر مسئله را در اصل معادله جایگذاری کنیم (بازگشت به عقب!). به عبارتی بعد از پیدا کردن ریشه‌ها باید آن‌ها را در معادله چک کنیم تا در دامنه حضور داشته باشند.

مثال. معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_{3}^{x-1} = 4$$

$$x - 1 = 3^{4} \Rightarrow x - 1 = 81 \Rightarrow x = 82 \checkmark$$

$$\left(\log_{3}^{82-1} = \log_{3}^{81} = \log_{3}^{3^{4}} = 4 \quad \text{زیرا} \quad \text{قابل قبول است}\ x = 82 \right)$$

Scanned with CamScanner

$$\text{Log}^{x^2-6} = \text{Log}^{x}$$

$$x^2-6=x \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \begin{cases} x=3 & \checkmark \\ x=-2 & \times \end{cases}$$

(فقط $x=3$ قابل قبول است زیرا با جایگذاری $x=-2$ در معادله داریم Log^{-2} که به وضوح تعریف نشده است)

$$\text{Log}_{2}^{(x+1)} + \text{Log}_{2}^{(x+4)} = 2$$

$$\text{Log}_{2}^{(x+1)\cdot(x+4)} = 2 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2+4x+1x+4=4 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0 \begin{cases} x=0 & \checkmark \\ x=-5 & \times \end{cases}$$

$$\text{Log}_{x}^{(2x^2-3x)} = 1 + \text{Log}_{x}^{x-1}$$

$$\text{Log}_{x}^{(2x^2-3x)} - \text{Log}_{x}^{x-1} = 1 \Rightarrow \text{Log}_{x}^{\frac{2x^2-3x}{x-1}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-3x}{x-1} = x^1 \qquad 2x^2-3x = x^2-x$$

$$\Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \begin{cases} x=0 & \times \\ x=4 & \checkmark \end{cases}$$

$$(\text{Log}_{2}^{x})^2 - 5(\text{Log}_{2}^{x}) + 4 = 0$$

با تغییر متغیر $\text{Log}_{2}^{x} = A$ داریم:

$$A^2 - 5A + 4 = 0$$

$$(A-4)(A-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=4 \Rightarrow \text{Log}_{2}^{x}=4 \Rightarrow x=2^4 \Rightarrow x=16 \\ A=1 \Rightarrow \text{Log}_{2}^{x}=1 \Rightarrow x=2^1 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

✓ اشتباهات لپی:

گاهی اوقات بچه ها این اشتباهات را مرتکب می شوند.

$$\text{Log}_{a}^{x} = 2\,\text{Log}_{a}^{y} \Rightarrow x=y \quad \times$$

$$\text{Log}_{a}^{x} = \text{Log}_{a}^{y} + \text{Log}_{a}^{z} \Rightarrow x=y+z \quad \times$$

تمرین. معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{Log}_{2}^{(3x+1)} + \text{Log}_{2}^{(x-3)} = 5$$

$$\text{Log}_{3}^{(3x-1)} = \text{Log}_{2}^{64} - \text{Log}_{7}^{343}$$

$$\text{Log}_{x}^{x^2+4} = 1 + \text{Log}_{x}^{5}$$

Scanned with CamScanner

درس ۲. کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

در حالت کلی یک تابع به صورت $f(x)=k\cdot a^x$ $(a>0 \,،\, a\neq 1)$ مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی، مهندسی و ... ظاهر می‌شود. به عنوان مثال نوعی باکتری به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به صورت تابع نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شوند. اندازهٔ هر تودهٔ باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(t)=100\times 2^{2t} \qquad 0\le t\le 16$$

مثال. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=5\times 2^x-1$

- مقدار $f(2)$ را به دست آورید.
- اگر $f(x)=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار x را بیابید.

$$\xrightarrow[\text{جاگذاری}]{x=2} f(2)=5\times 2^2-1=5\times 4-1=20-1=19$$

$$\xrightarrow[\text{جاگذاری}]{f(x)=\frac14} \frac{1}{4}=5\times 2^x-1 \Rightarrow 5\times 2^x=\frac14+1=\frac54 \Rightarrow 2^x=\frac{\frac54}{\frac51}=\frac14=2^{-2}\Rightarrow x=-2$$

مثال. نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a\times b^x-5$ از دو نقطهٔ $(1,7)$ و $(-1,-\frac{17}{4})$ می‌گذرد، مقادیر a و b را به دست آورید.

$$f(1)=7 \rightarrow a\times b^1-5=7 \rightarrow ab=12 \quad (1)$$

$$f(-1)=\frac{-17}{4} \rightarrow a\times b^{-1}-5=\frac{-17}{4} \rightarrow a\times b^{-1}=5-\frac{17}{4}=\frac{3}{4} \quad (2)$$

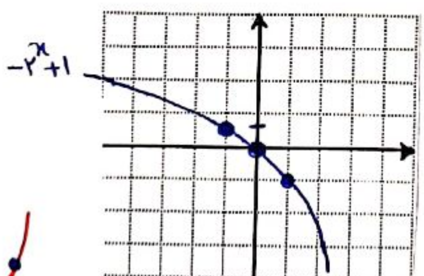
$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}\times b^{-1}}=\frac{12}{\frac34} \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$$

در تابع نمایی، پایه عددی مثبت و مخالف یک است پس $b=4$ قابل قبول است و داریم:

$$b=4 \xrightarrow[ab=12]{(1)} a\times 4=12 \Rightarrow a=3$$

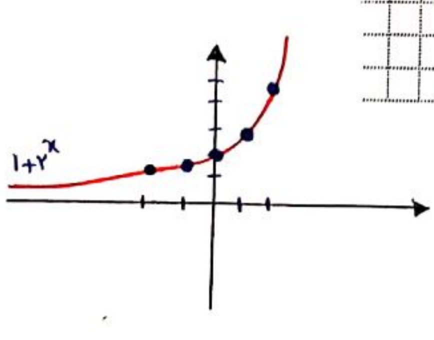
مثال. نمودار تابع نمایی $f(x)=-2^x+1$ را رسم کنید.

x	-1	0	1
y	$\frac12$	0	-1



مثال. نمودار تابع نمایی $g(x)=1+2^x$ را در بازهٔ $[-2,2]$ رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
y	۱/۲۵	۱/۵	۲	۳	۵



Scanned with CamScanner

تمرین. تابع نمایی $y=a+2^{x+b}$ از نقاط $A(0,2)$ و $B(1,3)$ عبور می‌کند. a و b را بیابید.

تمرین. نمودار توابع نمایی $f(x)=2^{-x}$ و $g(x)=|2^{-x}-2|$ را رسم کنید.

A از لگاریتم برای محاسبه شدت زلزله، ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن (آستانه شنوایی)، پیش‌بینی جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص، محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو و ... استفاده می‌شود. لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد و از خطاهای کوچک می‌گذرد.

زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزادشدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد. مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده را در زلزله نشان می‌دهد.
اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\log E = 11.8 + 1.5M}$$

مثال. بزرگی زلزله آبان ماه ۱۳۹۶ کرمانشاه ۷/۳ ریشتر بود. انرژی آزادشده آن چقدر بوده است؟

$$\log E = 11.8 + 1.5\times 7.3 = 22.75 \Rightarrow E = 10^{22.75}\ (\mathrm{Erg})$$

مثال. در تابع با ضابطه $f(x)=-5-\log_3(4x+1)$:

- مقدار $f(2)$ را به دست آورید. — اگر $f(x)=-3$ باشد، مقدار x را بیابید.

$$f(2) = -5-\log_3(4\times2+1) = -5-\log_3 9 = -5-\log_3 3^2 = -5-2\times\underbrace{\log_3 3}_{1}$$
$$= -5-2(1) = -7$$

$$-5-\log_3(4x+1) = -3 \Rightarrow \log_3(4x+1) = -2 \Rightarrow 4x+1 = 3^{-2}$$
$$\Rightarrow 4x = \frac{1}{9}-1 = \frac{-8}{9} \Rightarrow x = \frac{\frac{-8}{9}}{4} \Rightarrow x = \frac{-2}{9}$$

مثال. تابعی با ضابطه $f(x)=a+\log_2(bx-4)$ از نقاط $(2,6)$ و $(12,10)$ می‌گذرد. a را بیابید.

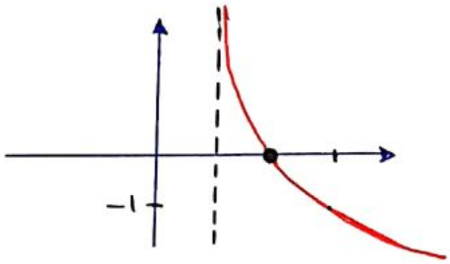
$$f(2)=6 \Rightarrow a+\log_2(2b-4)=6 \Rightarrow \log_2(2b-4)=6-a \Rightarrow 2b-4=2^{6-a} \quad (1)$$
$$f(12)=10 \Rightarrow a+\log_2(12b-4)=10 \Rightarrow \log_2(12b-4)=10-a \Rightarrow 12b-4=2^{10-a} \quad (2)$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{(1)}{(2)} \to \frac{2b-4}{12b-4} = \frac{2^{6-a}}{2^{10-a}} \Rightarrow \frac{2b-4}{12b-4} = 2^{6-a-10+a} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

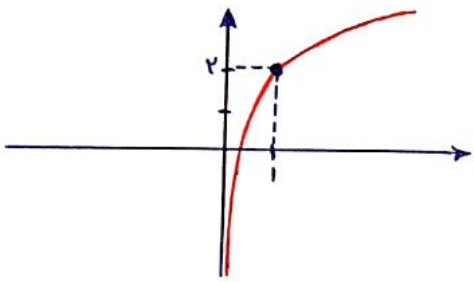
$$\Rightarrow 32b-64 = 12b-4 \Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b=3$$

$$\xrightarrow[b=3]{(1)} 2(3)-4 = 2^{6-a} \Rightarrow 2^1 = 2^{6-a} \Rightarrow 1 = 6-a \Rightarrow \boxed{a=5}$$



مثال. نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = -\log_2^{(x-1)}$ را رسم کنید.

$x-1=0 \to x=1$



مثال. نمودار تابع $f(x) = 2+\log^x$ را رسم کنید.

تمرین. نمودار تابع $f(x) = \log_a^x$ از نقطه $(3, -1)$ می‌گذرد. مقدار a را به دست آورید.

تمرین. نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

$f(x) = 1+\log^{(x-1)}$ $\qquad$ $g(x) = 2-\log_{0.2}^{(x-1)}$

Scanned with CamScanner