تابع نمایی: هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$ و $a\neq 1$ باشد را تابع نمایی می‌گوییم
مثلاً توابع $y=3^x$ و $y=(\sqrt{2})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=(\frac{5}{2})^x$ هر کدام یک تابع نمایی می‌باشند.

توانهای حقیقی: همه‌ی قوانینی که در سال گذشته در مورد اعداد توان‌دار (با توانهای گویا و پایه‌های حقیقی مثبت) به کار می‌بردیم برای توانهای حقیقی نیز برقرارند بنابراین اگر r و s دو عدد حقیقی و x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند آنگاه داریم:

1) $x^0=1$ 2) $1^r=1$ 3) $x^{-r}=(\frac{1}{x})^r=\frac{1}{x^r}$ 4) $x^r\times x^s=x^{r+s}$ 5) $x^r\times y^r=(xy)^r$

6) $(x^r)^s=x^{r.s}=(x^s)^r$ 7) $x^r\div x^s=\frac{x^r}{x^s}=x^{r-s}$ 8) $x^r\div y^r=\frac{x^r}{y^r}=(\frac{x}{y})^r$

مثال: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

1) $2^{\sqrt{2}}\times 2^{3\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}=2^{4\sqrt{2}}$

2) $3^{1.5}\times\sqrt{3}=3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{4}{2}}=3^2=9$

3) $(2^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}=2^{3\times 2}=2^6=64$

4) $3^{(2-\sqrt{3})}\times 2^{(2-\sqrt{3})}=(3\times 2)^{(2-\sqrt{3})}=6^{(2-\sqrt{3})}$

5) $(5^{(\sqrt{3}-1)})^{(\sqrt{3}+1)}=5^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=5^{(3-1)}=5^2=25$

6) $((\sqrt{5})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}}=(\sqrt{5})^{\sqrt{36}}=(\sqrt{5})^6=5^3=125$

7) $((\frac{1}{2})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}=(\frac{1}{2})^{\sqrt{36}}=(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$

مزدوج

8) $[(\sqrt{2}-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}]^{(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})}=(\sqrt{2}-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})}=(\sqrt{2}-1)^{(25\times 2-4\times 5)}$
$=(\sqrt{2}-1)^{30}$

9) $(\sqrt{2}-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}\times(\sqrt{2}+1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}=[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}=(2-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}$
$=1^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}=1$

10) $[(\sqrt{3}+1)^{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}]^{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}\times[(\sqrt{3}-1)^{3\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+1)^{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}\times(\sqrt{3}-1)^{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$=(\sqrt{3}+1)^{(9\times 2-4\times 3)}\times(\sqrt{3}-1)^{3\times 2}=(\sqrt{3}+1)^6\times(\sqrt{3}-1)^6=[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)]^6=(3-1)^6=2^6=64$

11) $\frac{2^{\sqrt{3}}\times 2^{\sqrt{27}}}{2^{\sqrt{12}}\times 4^{\sqrt{3}}}=\frac{2^{\sqrt{3}}\times 2^{3\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}\times(2^2)^{\sqrt{3}}}=\frac{2^{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}\times 2^{2\sqrt{3}}}=\frac{2^{4\sqrt{3}}}{2^{4\sqrt{3}}}=1$

۱۲) $\left[(\sqrt[6]{3^5})^{(3-\sqrt3)}\right]^{(3+\sqrt3)} \div (3^{\sqrt5}\times 2^{\sqrt5})^{-\sqrt5} = (\sqrt[6]{3^5})^{(3-\sqrt3)(3+\sqrt3)} \div (6^{\sqrt5})^{-\sqrt5} =$

$(\sqrt[6]{3^5})^{9-3} \div 6^{-5} = (\sqrt[6]{3^5})^{6} \div \frac{1}{6^5} = 3^5\times 6^5 = 18^5$

۱۳) $(2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5+2}} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5+2}\times\frac{\sqrt5-2}{\sqrt5-2}}$

$=(2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{\left(\frac{\sqrt5-2}{5-4}\right)} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{(\sqrt5-2)}$

$=\left(\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}\right)^{(\sqrt5-2)} = \left(\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}\times\frac{2-\sqrt3}{2-\sqrt3}\right)^{(\sqrt5-2)} = \left(\frac{(2-\sqrt3)^2}{\cancel{4-3}\ 1}\right)^{(\sqrt5-2)} = (4-4\sqrt3+3)^{(\sqrt5-2)}$

یا $= (2-\sqrt3)^{(2\sqrt5-4)}$

$= (7-4\sqrt3)^{(\sqrt5-2)}$

۱۴) $(3-\sqrt[3]{26})^{2.5}(9+3\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26^2})^{2.5} = \left[(3-\sqrt[3]{26})(9+3\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26^2})\right]^{2.5} = (3^3-\sqrt[3]{26}^{\,3})^{2.5}$

$= (27-26)^{2.5} = 1^{2.5} = 1$

۱۵) $(2-\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5-2}} \div (2-\sqrt3)^{\sqrt5-2} = (2-\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5-2}\times\frac{\sqrt5+2}{\sqrt5+2}} \div (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)}$

$=(2-\sqrt3)^{\frac{\sqrt5+2}{5-4}} \div (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5+2)} \div (2-\sqrt3)^{\sqrt5-2} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5+2)-(\sqrt5-2)}$

$=(2-\sqrt3)^{(\sqrt5+2-\sqrt5+2)} = (2-\sqrt3)^4$

مسئله: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $x^{\sqrt3}-1=7 \xrightarrow{+1} x^{\sqrt3}=8 \Rightarrow (x^{\sqrt3})^{\sqrt3} = 8^{\sqrt3} \Rightarrow x^3=(2^3)^{\sqrt3} \Rightarrow x^3=(2^{\sqrt3})^3 \Rightarrow$

$x = 2^{\sqrt3}$

۲) $x^{\sqrt2}-2=2 \xrightarrow{+2} x^{\sqrt2}=4 \Rightarrow (x^{\sqrt2})^{\sqrt2} = 4^{\sqrt2} \Rightarrow x^2=(2^2)^{\sqrt2} \Rightarrow x^2=(2^{\sqrt2})^2 \Rightarrow$

$x = \pm 2^{\sqrt2} \Rightarrow x = 2^{\sqrt2}$

غ ق ق

۳) $x^{2\sqrt2}+1=626 \xrightarrow{-1} x^{2\sqrt2}=625 \Rightarrow (x^{2\sqrt2})^{\sqrt2}=(625)^{\sqrt2} \Rightarrow x^4=(5^4)^{\sqrt2} \Rightarrow x^4=(5^{\sqrt2})^4 \to$

$x = \pm 5^{\sqrt2} \Rightarrow x = 5^{\sqrt2}$

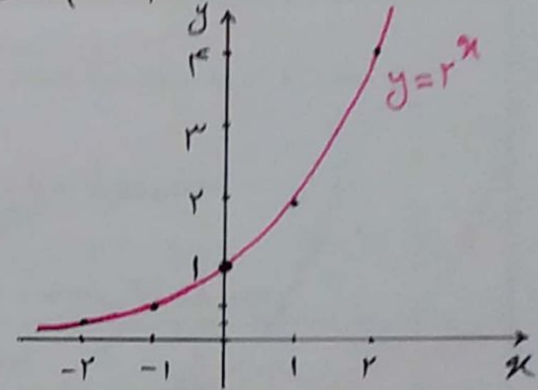
غ ق ق

رسم نمودار تابع نمایی: برای رسم نمودار تابع نمایی ابتدا به دو مثال زیر که از روش نقطه یابی استفاده کرده ام توجه کنید:

مثال ۱: نمودار تابع $y=2^x$ را رسم کنید.

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

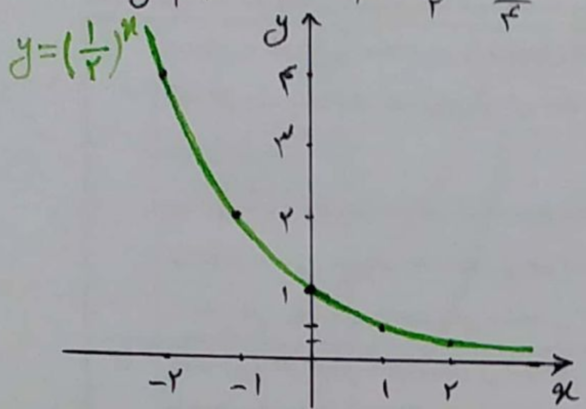


در این مثال همانطور که دیده می شود نمودار محور yها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند یعنی از نقطه ی $(0,1)$ می گذرد. همچنین این تابع همواره بالای محور xهاست و محور xها را قطع نمی کند ولی خیلی به آن نزدیک می شود اصطلاحاً می گوئیم محور xها «مجانب افقی» نمودار می باشد. همچنین با افزایش مقادیر x مقادیر y نیز افزایش می یابند اصطلاحاً می گوئیم تابع «اکیداً صعودی» است و بنابراین «یک به یک» می باشد. دامنه ی این تابع تمام اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن تمام اعداد حقیقی مثبت یعنی $(0,+\infty)$ می باشد.

مثال ۲: نمودار $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



در این مثال همانطور که دیده می شود نمودار، محور yها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند یعنی از نقطه ی $(0,1)$ می گذرد همچنین این تابع همواره بالای محور xهاست و محور xها را قطع نمی کند ولی خیلی به آن نزدیک می شود اصطلاحاً می گوئیم محور xها «مجانب افقی» نمودار می باشد. همچنین با افزایش مقادیر x مقادیر y مرتباً کاهش می یابند اصطلاحاً می گوئیم تابع «اکیداً نزولی» است و بنابراین «یک به یک» می باشد. دامنه ی این تابع تمام اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن تمام اعداد حقیقی مثبت یعنی $(0,+\infty)$ می باشد.

در حالت کلی در تابع نمایی $y=a^x$ چنانچه $a>1$ آنگاه نمودار تابع نمایی مشابه شکل مثال ۱ می باشد و اگر $0<a<1$ آنگاه نمودار تابع نمایی مشابه شکل مثال ۲ است. در حالتی که $a>1$ آنگاه هرچه a بزرگتر باشد سرعت رشد نمودار بیشتر خواهد بود و در حالتی که $0<a<1$ هرچه a کوچکتر باشد سرعت کاهش (نزول) نمودار بیشتر می باشد.

تذکر: همه‌ی قوانینی که برای انتقال نمودار توابع قبلاً گفته شد را برای تابع نمایی نیز می‌توانیم به کار ببریم.

مثال: نمودار هر یک از توابع داده شده را به روش انتقال رسم کنید:

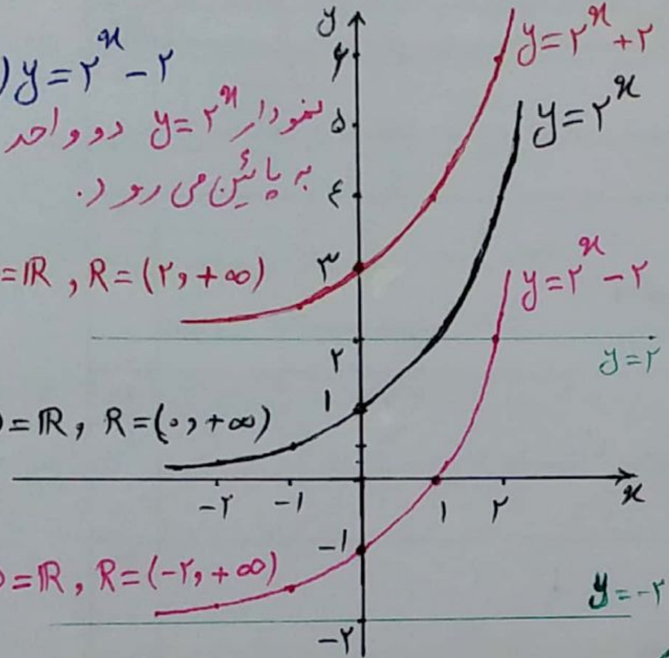
۱) $y=2^x+2$ نمودار $y=2^x$ دو واحد به بالا می‌رود

۲) $y=2^x-2$ نمودار $y=2^x$ دو واحد به پایین می‌رود.

$D=\mathbb{R}$, $R=(2,+\infty)$

$D=\mathbb{R}$, $R=(0,+\infty)$

$D=\mathbb{R}$, $R=(-2,+\infty)$



۳) $y=2^{x-2}$ نمودار $y=2^x$ دو واحد به راست می‌رود

۴) $y=2^{x+2}$ نمودار $y=2^x$ دو واحد به چپ می‌رود

۵) $y=-2^x$ نمودار $y=2^x$ نسبت به محور x ها قرینه می‌شود

$D=\mathbb{R}$

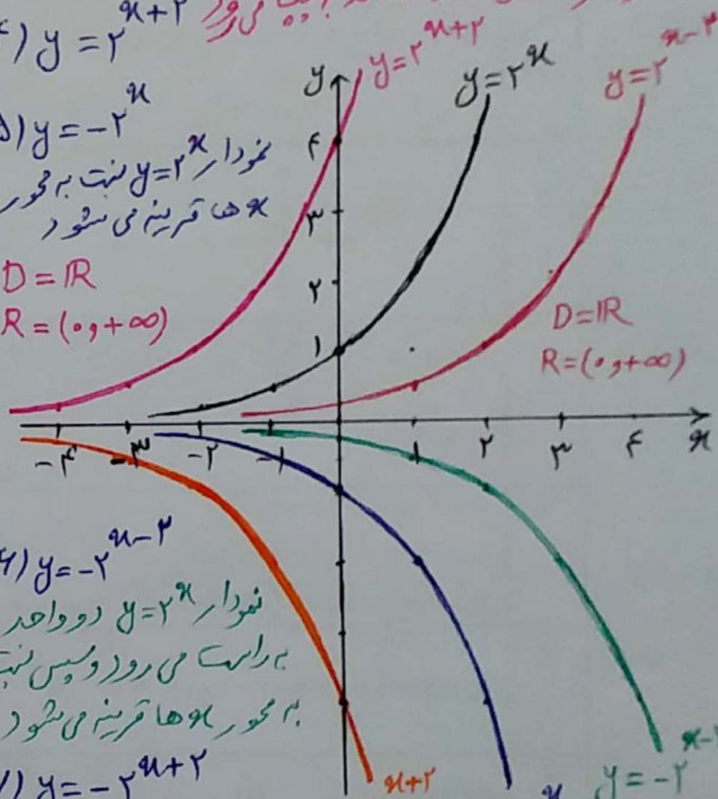
$R=(0,+\infty)$

$D=\mathbb{R}$

$R=(0,+\infty)$

۶) $y=-2^{x-2}$ نمودار $y=2^x$ دو واحد به راست می‌رود و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود

۷) $y=-2^{x+2}$ نمودار $y=2^x$ دو واحد به چپ می‌رود و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.



$y=-2^{x+2}$ $D=\mathbb{R}$ $R=(-\infty,0)$

$y=-2^x$ $D=\mathbb{R}$ $R=(-\infty,0)$

$y=-2^{x-2}$ $D=\mathbb{R}$ $R=(-\infty,0)$

تذکر: وقتی نمودار $y=2^x$ را منتقل می‌کنیم باید مجانب افقی آن را نیز به همان اندازه منتقل کنیم تا نمودار از آن پایین‌تر نیاید.

۸) $y=2^{-x}$ نمودار $y=2^x$ نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.

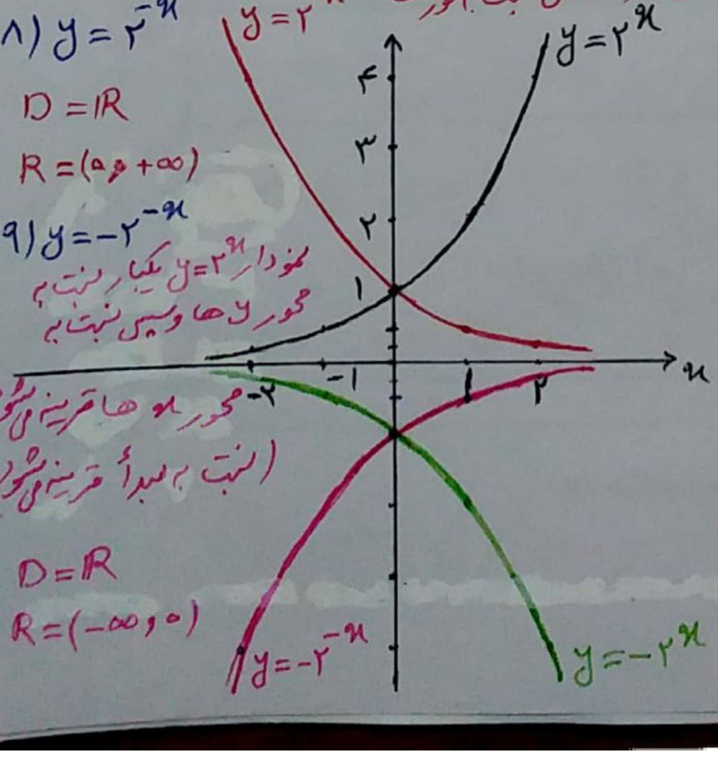
$D=\mathbb{R}$

$R=(0,+\infty)$

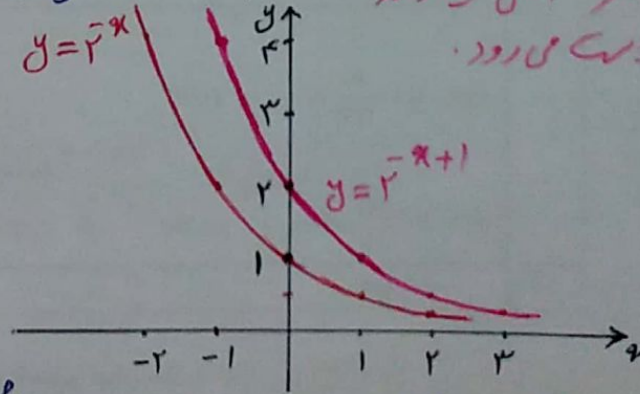
۹) $y=-2^{-x}$ نمودار $y=2^x$ یکبار نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود (نسبت به مبدأ قرینه می‌شود)

$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,0)$



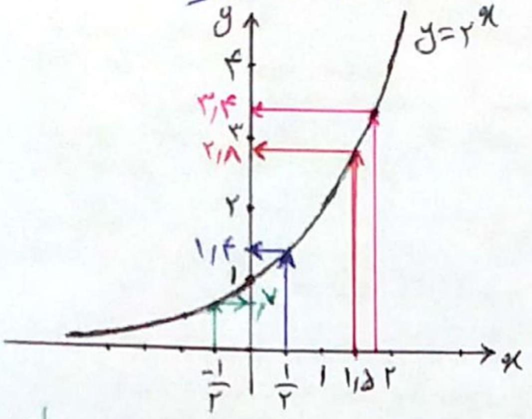
۱۰) $y=2^{-x+1}=2^{-(x-1)}$ نمودار $y=2^{-x}$ یک واحد به راست می‌رود.



تذکر: نمودار $y=2^{-x}$ همان نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ می‌باشد

زیرا: $a^{-n}=(\frac{1}{a})^n=\frac{1}{a^n}$, $a\neq 0$

مثال: با استفاده از نمودار $y=2^x$ مقدار تقریبی $2^{\frac{1}{2}}$ و $2^{1/5}$ و $2^{\sqrt{3}}$ و $2^{-\frac{1}{2}}$ را بیابید.



حل: نمودار $y=2^x$ را رسم می‌کنیم سپس نقاطی به طول‌های $\frac{1}{2}$ و ۱٫۵ و $\sqrt{3}$ و $-\frac{1}{2}$ را روی محور xها مشخص می‌کنیم و در این نقاط عمودهایی بر محور xها رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نمودار را قطع کند از محل‌های تقاطع، بر محور yها عمود می‌کنیم تا عرض این نقاط مشخص شود

با انجام این کار، مطابق شکل داریم:

$2^{\sqrt{3}} \simeq 3/4$ و $2^{1/5} \simeq 2/8$ و $2^{\frac{1}{2}} \simeq 1/4$ و $2^{-\frac{1}{2}} \simeq 0/7$

معادلات نمایی: معادلاتی هستند که مجهول آنها، در توان قرار داشته باشد. برای حل این گونه معادلات از این خاصیت استفاده می‌کنیم که: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد و $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس. این خاصیت در واقع همان خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی می‌باشد.

مثال: معادلات نمایی زیر را حل کنید:

۱) $2^{x-3}=16 \Rightarrow 2^{x-3}=2^4 \Rightarrow x-3=4 \xRightarrow{+3} \boxed{x=7}$

۲) $3^{x+1}=243 \Rightarrow 3^{x+1}=3^5 \Rightarrow x+1=5 \xRightarrow{-1} \boxed{x=4}$

۳) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}=8 \Rightarrow (2^{-1})^{3x-1}=2^3 \Rightarrow 2^{-3x+1}=2^3 \Rightarrow -3x+1=3 \xRightarrow{-1} -3x=2 \xRightarrow{\div(-3)} \boxed{x=\frac{-2}{3}}$

۴) $(\sqrt{3})^{2x+5}=9^{-x+2} \Rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^{2x+5}=(3^2)^{-x+2} \Rightarrow 3^{x+\frac{5}{2}}=3^{-2x+4} \Rightarrow x+\frac{5}{2}=-2x+4$

$\Rightarrow x+2x=\frac{4}{1}-\frac{5}{2} \Rightarrow 3x=\frac{3}{2} \xRightarrow{\div 3} \boxed{x=\frac{1}{2}}$

۵) $25^{2x-3}=125^{x+1} \Rightarrow (5^2)^{2x-3}=(5^3)^{x+1} \Rightarrow 5^{4x-6}=5^{3x+3} \Rightarrow 4x-6=3x+3$

$\Rightarrow 4x-3x=3+6 \Rightarrow \boxed{x=9}$

۶) $(\sqrt[3]{2})^x=\frac{1}{4} \Rightarrow (2^{\frac{1}{3}})^x=\frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{\frac{x}{3}}=2^{-2} \Rightarrow \frac{x}{3}=-2 \Rightarrow \boxed{x=-6}$

یادآوری: $a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ $(a>0)$ ، $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

$7)\ (\sqrt{3})^{x+2}=\frac{1}{27}\longrightarrow (3^{\frac{1}{2}})^{x+2}=(\frac{1}{3})^{3}\Rightarrow 3^{\frac{1}{2}x+1}=3^{-3}\Rightarrow \frac{1}{2}x+1=-3\xrightarrow{-1}\frac{1}{2}x=-4$

$\Rightarrow \boxed{x=-8}$

$8)\ (\sqrt[3]{9})^{x}=27^{x^2}\Rightarrow (9^{\frac{1}{3}})^{x}=(3^3)^{x^2}\Rightarrow (3^2)^{\frac{1}{3}x}=3^{3x^2}\Rightarrow 3^{\frac{2}{3}x}=3^{3x^2}\Rightarrow 3x^2=\frac{2}{3}x$

$\Rightarrow 3x^2-\frac{2}{3}x=0\xrightarrow{c=0}\begin{cases}x=0\\ x=\frac{-b}{a}=\frac{\frac{2}{3}}{3}\quad \frac{2}{9}\end{cases}$

$9)\ 49^{x^2}=7^{3x-1}\Rightarrow (7^2)^{x^2}=7^{3x-1}\Rightarrow 7^{2x^2}=7^{3x-1}\Rightarrow 2x^2=3x-1\Rightarrow 2x^2-3x+1=0$

$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$

$10)\ 25^{x}=(\frac{1}{5})^{-x^2+3}\Rightarrow (5^2)^{x}=(5^{-1})^{-x^2+3}\Rightarrow 5^{2x}=5^{x^2-3}\Rightarrow 2x=x^2-3\Rightarrow$

$-x^2+2x+3=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-1\\ x=\frac{-c}{a}=\frac{-3}{-1}=3\end{cases}$

مثال: کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $y=(\frac{1}{3})^{x}$ قرار دارند؟

الف) $A(0,1)$ $\quad x=0\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{0}=1\Rightarrow$ $A(0,1)$ روی نمودار تابع هست.

ب) $B(1,0)$ $\quad x=1\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{1}=\frac{1}{3}\neq 0\Rightarrow$ $B(1,0)$ روی نمودار تابع نیست

پ) $C(-1,3)$ $\quad x=-1\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{-1}=3\Rightarrow$ $C(-1,3)$ روی نمودار تابع هست

ت) $D(-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ $\quad x=\frac{-1}{2}\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow$ $D(-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ روی نمودار تابع هست

ث) $E(-2,4)$ $\quad x=-2\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{-2}=3^{2}=9\neq 4\Rightarrow$ $E(-2,4)$ روی نمودار تابع نیست

ج) $F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$ $\quad x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$ $F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$ روی نمودار تابع است

چ) $G(2,\frac{1}{9})$ $\quad x=2\xrightarrow{\text{در تابع}}y=(\frac{1}{3})^{2}=\frac{1}{9}\Rightarrow$ $G(2,\frac{1}{9})$ روی نمودار تابع است

ح) $H(-\frac{3}{2},27)$ $\quad x=\frac{-3}{2}\xrightarrow{\text{در تابع}}(\frac{1}{3})^{-\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^3}=\sqrt{27}\neq 27\Rightarrow$ $H(-\frac{3}{2},27)$ روی نمودار تابع نیست

مثال: مقدار k را طوری بیابید که تابع $y=(k-3)^x$ صعودی باشد. $(x>0)$

حل: برای اینکه تابع نمایی $y=a^x$ صعودی باشد باید $a>1$ پس داریم:

$$k-3>1 \Rightarrow k>3+1 \Rightarrow k>4$$

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید که تابع $y=(2k-7)^x$ نزولی باشد. $(x>0)$

حل: برای اینکه تابع نمایی $y=a^x$ نزولی باشد باید $0<a<1$ پس داریم:

$$0<2k-7<1 \xrightarrow{+7} 7<2k<8 \xrightarrow{\div 2} 3/5<k<4$$

نامعادله‌ی نمایی: نامعادله‌ای است که مجهول آن در توان قرار گیرد. برای حل نامعادله‌ی $a^{P(x)} \leq a^{Q(x)}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$1)\ a>1 \Rightarrow P(x) \leq Q(x)$ $2)\ 0<a<1 \Rightarrow P(x) \geq Q(x)$

مثال: نامعادله‌ی $3^{5x-1} \leq 3^{x+3}$ را حل کنید.

حل: چون $a>1$ پس داریم: $5x-1 \leq x+3 \Rightarrow 5x-x \leq 3+1 \Rightarrow 4x \leq 4 \Rightarrow x \leq 1$

مثال: نامعادله‌ی $5^{x+2} < 5^{2x-6}$ را حل کنید.

حل: چون $a>1$ پس داریم: $x+2<2x-6 \Rightarrow x-2x<-6-2 \Rightarrow -x<-8 \Rightarrow x>8$

مثال: نامعادله‌ی $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+7}$ را حل کنید.

حل: چون $0<a<1$ پس داریم: $3x-1 \geq x+7 \Rightarrow 3x-x \geq 7+1 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$

مثال: نامعادله‌ی $(0/1)^{4x+3} < (0/1)^{-x+2}$ را حل کنید.

حل: چون $0<a<1$ پس داریم: $4x+3>-x+2 \Rightarrow 4x+x>2-3 \Rightarrow 5x>-1 \Rightarrow x>\frac{-1}{5}$

مثال: نامعادله‌ی $3^{x+2} \leq 3^{-x^2+4}$ را حل کنید.

حل: چون $a>1$ پس داریم:

$$x+2 \leq -x^2+4 \Rightarrow x^2+x-2 \leq 0 \longrightarrow -2 \leq x \leq 1$$

$$x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

مثال: با توجه به تعریف تابع نمایی و نمودار آن در مربع علامت < یا > یا = قرار دهید:

الف) $2^3 \boxed{>} 2^{\sqrt{3}}$ ب) $3^{\sqrt{2}} \boxed{<} 3^{1.5}$ پ) $(\frac{1}{5})^{\sqrt{5}} \boxed{>} (\frac{1}{5})^{2.5}$

ت) $2^4 \boxed{=} (\frac{1}{4})^{-2}$ ث) $(\frac{1}{3})^{2.1} \boxed{<} (\frac{1}{3})^{-0.7}$ ج) $\sqrt{2}^5 \boxed{=} (32)^{\frac{1}{2}}$

تذکر: در تابع نمایی اگر $x<y$ و $a>1$ آنگاه $a^x<a^y$ (چون تابع صعودی می باشد)
و اگر $x<y$ و $0<a<1$ آنگاه $a^x>a^y$ (چون تابع نزولی می باشد.

ت) $(\frac{1}{4})^{-2} = 4^2 = (2^2)^2 = 2^4$ ج) $(\sqrt{2})^5 = (2^{\frac{1}{2}})^5 = 2^{\frac{5}{2}} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = (32)^{\frac{1}{2}}$

مسئله: اگر $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ و $g(x)=3^x$ در این صورت موارد خواسته شده را بیابید:

الف) $f(0)+g(1) = (\frac{1}{2})^0 + 3^1 = 1+3 = 4$

ب) $f(-1)+g(0) = (\frac{1}{2})^{-1} + 3^0 = 2+1 = 3$

پ) $3f(-2) - g(2) = 3(\frac{1}{2})^{-2} - 3^2 = 3\times 2^2 - 9 = 12-9 = 3$

ت) $(f\times g)(0) = f(0)\times g(0) = (\frac{1}{2})^0 \times 3^0 = 1\times 1 = 1$

ث) $(\frac{f}{g})(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{(\frac{1}{2})^{-1}}{3^{-1}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$

ج) $f(g(0)) = f(3^0) = f(1) = (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$

چ) $g(f(0)) = g((\frac{1}{2})^0) = g(1) = 3^1 = 3$

ح) $(\frac{f}{g})(1) + g(f(-2)) = \frac{f(1)}{g(1)} + g((\frac{1}{2})^{-2}) = \frac{(\frac{1}{2})^1}{3^1} + g(2^2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{1}} + g(4) = \frac{1}{6} + 3^4 = \frac{1}{6} + \frac{81}{1}$
$= \frac{1+486}{6} = \frac{487}{6}$

خ) $\frac{(\frac{g}{f})(1) - 2f(-3)}{6g(-1)} = \frac{\frac{g(1)}{f(1)} - 2(\frac{1}{2})^{-3}}{6\times 3^{-1}} = \frac{\frac{3^1}{(\frac{1}{2})^1} - 2\times 2^3}{6\times\frac{1}{3}} = \frac{6-2\times 8}{2} = \frac{6-16}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

د) $\frac{g(2)\times f(-1)}{g(1)-f(-2)} = \frac{3^2\times(\frac{1}{2})^{-1}}{3^1-(\frac{1}{2})^{-2}} = \frac{9\times 2}{3-2^2} = \frac{18}{3-4} = \frac{18}{-1} = -18$

مثال: اگر $y=\sqrt{3}^{\,x}$ و نقاط زیر روی نمودار تابع باشند مختصات نقاط داده شده را کامل کنید:

الف) $A(\ \ ,1)$ ب) $B(1,\ \ )$ پ) $C(-1,\ \ )$ ت) $D(\ \ ,3)$

ث) $E(-2,\ \ )$ ج) $F(4,\ \ )$ چ) $G(\ \ ,3^{\sqrt{2}})$ ح) $H(\ \ ,\frac{1}{9})$

حل: می‌دانیم که $a^0=1$ پس $x=0$ یا

الف) $1=(\sqrt{3})^x \Rightarrow \sqrt{3}^{\,0}=(\sqrt{3})^x \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,1)$

می‌دانیم که $a^1=a$ پس $y=\sqrt{3}$ یا

ب) $y=(\sqrt{3})^1 \Rightarrow y=\sqrt{3} \Rightarrow B(1,\sqrt{3})$

می‌دانیم که $a^{-n}=(\frac{1}{a})^n$ پس $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا

پ) $y=(\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow C(-1,\frac{\sqrt{3}}{3})$

ت) $3=(\sqrt{3})^x \Rightarrow 3=(3^{\frac{1}{2}})^x \Rightarrow 3^1=3^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2}x=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(2,3)$

ث) $y=(\sqrt{3})^{-2} \Rightarrow y=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2=\frac{1}{3} \Rightarrow E(-2,\frac{1}{3})$

ج) $y=(\sqrt{3})^4 \rightarrow y=(3^{\frac{1}{2}})^4 \Rightarrow y=3^{\frac{4}{2}} \Rightarrow y=3^2 \Rightarrow y=9 \Rightarrow F(4,9)$

چ) $3^{\sqrt{2}}=(\sqrt{3})^x \Rightarrow 3^{\sqrt{2}}=(3^{\frac{1}{2}})^x \Rightarrow 3^{\sqrt{2}}=3^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2}x=\sqrt{2} \xRightarrow{\times 2} x=2\sqrt{2} \Rightarrow G(2\sqrt{2},3^{\sqrt{2}})$

ح) $\frac{1}{9}=(\sqrt{3})^x \Rightarrow \frac{1}{3^2}=(3^{\frac{1}{2}})^x \Rightarrow 3^{-2}=3^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2}x=-2 \xRightarrow{\times 2} x=-4 \Rightarrow H(-4,\frac{1}{9})$

مثال: اگر نقطه‌ی $A(-2,\frac{9}{4})$ روی تابع $f(x)=a^x$ باشد آنگاه مقادیر $f(2)$ و $f(-1)$ و $f(3)$ را بیابید.

حل: مختصات نقطه‌ی A را در تابع قرار می‌دهیم بنابراین داریم:

$\frac{9}{4}=a^{-2} \Rightarrow \frac{9}{4}=(\frac{1}{a})^2$

$\Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{1}{a^2} \Rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow \underset{\text{غ ق ق}}{a=\cancel{\pm}\frac{2}{3}} \Rightarrow f(x)=(\frac{2}{3})^x$

$f(2)=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$, $f(-1)=(\frac{2}{3})^{-1}=\frac{3}{2}$, $f(3)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

مثال: اگر $y=(2m-3)^x$ یک تابع نمایی باشد حدود m را طوری بیابید که:

الف - این تابع صعودی باشد ب - این تابع نزولی باشد.

حل: با توجه به تعریف تابع نمایی باید داشته باشیم:

الف) $a>1 \Rightarrow 2m-3>1 \xRightarrow{+3} 2m>4 \xRightarrow{\div 2} m>2$

ب) $0<a<1 \Rightarrow 0<2m-3<1 \xRightarrow{+3} 3<2m<4 \xRightarrow{\div 2} \frac{3}{2}<m<2$

تمرین ۱: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

الف) $\left[(\sqrt{3})^{(\sqrt{5}+2)}\right]^{(\sqrt{5}-2)}$

ب) $\left[(\sqrt{5})^{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}\right]^{(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

پ) $\left[(5-\sqrt{2})^{(\sqrt{2}-1)}\right]^{(\sqrt{2}+1)}$

ت) $(\sqrt{2}-1)^{3\sqrt{2}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}}$

ث) $(2-\sqrt[3]{7})^{\pi} \times (4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49})^{\pi}$

ج) $\left[(\sqrt[3]{3})^{(\sqrt{3}-3)}\right]^{(\sqrt{3}+3)}$

تمرین ۲: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $4^{2x-1}=8^{x+3}$

ب) $3^{2x+1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$

پ) $8^{2x-1}=2^{x^2+2}$

ت) $7^{x+2}-49^{x+5}=0$

ث) $25^{x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3}$

ج) $4^{x}+2^{x+1}=8$

تمرین ۳: نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $2^{3x+2}\leq 8$

ب) $27^{2x-1}>9^{x+2}$

پ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}\leq\left(\frac{1}{25}\right)^{1-x}$

ت) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}>\left(\frac{1}{8}\right)^{x+5}$

ث) $8^{\frac{2x}{3}+1}>(\sqrt[3]{2})^{5x}$

ج) $36^{x+2}<(\sqrt{6})^{2x^2+2}$

چ) $2^{3x+1}<2^{x^2-1}$

ح) $9^{3-x^2}\geq\frac{1}{3}$

تمرین ۴: فرض کنید تابع $y=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ محورهای xها و yها را به ترتیب در نقاطی به طول k و عرض m قطع کند در این صورت حاصل $(m+k)^{90}$ را بیابید.

تمرین ۵: ابتدا نمودار $y=3^{x}$ را رسم کنید سپس نمودار هر یک از توابع زیر را رسم نمائید:

الف) $y=-3^{x}$ ب) $y=3^{-x}$ پ) $y=-3^{-x}$ ت) $y=3^{x}+1$ ث) $y=3^{x}-1$

ج) $y=3^{x-1}$ چ) $y=3^{x+1}$ ح) $y=\frac{1}{2}\times3^{x}$ خ) $y=2\times3^{x}$ د) $y=-2\times3^{x}$

ذ) $y=-\frac{1}{2}\times3^{x}$ ر) $y=3^{x-1}+2$ ز) $y=3^{x+1}-2$ ژ) $y=\frac{1}{2}\times3^{x}-2$ س) $y=-2\times3^{x}+2$

تمرین ۶: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x)=\dfrac{1}{2^{x}-2^{3x+4}}$

ب) $f(x)=\sqrt{3^{2x+1}-3^{x}}$

پ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-2^{-x+1}}}$

« پیروز و سربلند باشید » خالقی

لگاریتم و خواص آن :

یکی از مواردی که در ریاضیات برای انجام محاسبات، به خصوص محاسباتی که در آنها اعداد بزرگ و توانهای بزرگ به کار رفته است ؛ مورد استفاده قرار می‌گیرد مفهومی به نام لگاریتم می‌باشد که اولین بار توسط ریاضیدان اسکاتلندی به نام «جان نپیر» مطرح شد؛ استفاده از اعداد توان دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات ، باعث بوجود آمدن مفهوم لگاریتم شده است . با استفاده از لگاریتم عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود .

تعریف لگاریتم : اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و b یک عدد حقیقی مثبت و c عددی حقیقی باشد که $a^c=b$ آنگاه c را لگاریتم b در مبنای a می‌گوئیم و آن را با نماد « $\log_a^b$ » نشان می‌دهیم

بنابراین با شرایط بالا داریم : $\boxed{a^c=b \Longleftrightarrow \log_a^b=c}$ یعنی لگاریتم گیری و توان رسانی دو عمل برعکس هم هستند.

این رابطه بدان معناست که با داشتن شرایط بالا ، تساویهای توانی را می‌توان به صورت لگاریتمی نوشت و برعکس تساویهای لگاریتمی را می‌توان به صورت توانی تبدیل کرد .

مثال: تساویهای توانی زیر را به شکل لگاریتمی بنویسید :

۱) $۷^۲=۴۹ \Rightarrow \log_۷^{۴۹}=۲$

۲) $۲^۷=۱۲۸ \Rightarrow \log_۲^{۱۲۸}=۷$

۳) $۵^۳=۱۲۵ \Rightarrow \log_۵^{۱۲۵}=۳$

۴) $(\frac{۱}{۳})^۴=\frac{۱}{۸۱} \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۱}{۸۱}}=۴$

۵) $۱۰^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۰} \Rightarrow \log_{۱۰}^{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{۲}$

۶) $۸^{-۲}=\frac{۱}{۶۴} \Rightarrow \log_۸^{\frac{۱}{۶۴}}=-۲$

۷) $۱^{۱۷}=۱ \cancel{\Rightarrow} \log_۱^۱=۱۷$

۸) $(-۲)^۳=-۸ \cancel{\Rightarrow} \log_{(-۲)}^{(-۸)}=۳$

۹) $۹^۱=۹ \Rightarrow \log_۹^۹=۱$

۱۰) $۳^۰=۱ \Rightarrow \log_۳^۱=۰$

۱۱) $۲^{-۱}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_۲^{\frac{۱}{۲}}=-۱$

۱۲) $(\frac{۱}{۲})^{-۱}=۲ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}^۲=-۱$

تذکر: در شماره های ۷ و ۸ نتیجه گیری ممکن نیست زیرا شرایط گفته شده در تعریف را ندارند.

در بقیه ی مثالها ، می‌توان نتیجه گیریها را دوطرفه کرد و از طرف دوم به طرف اول برسیم یعنی لگاریتمها را به شکل توانی بنویسیم

مثال: تساویهای لگاریتمی زیر را به شکل توانی بنویسید :

۱) $\log_۲^{۳۲}=۵ \Rightarrow ۲^۵=۳۲$

۲) $\log_۵^{۶۲۵}=۴ \Rightarrow ۵^۴=۶۲۵$

۳) $\log_۷^{۳۴۳}=۳ \Rightarrow ۷^۳=۳۴۳$

۴) $\log_{۱۵}^۱=۰ \Rightarrow ۱۵^۰=۱$

۵) $\log_۶^{\sqrt[۳]{۶}}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۶^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۶}$

۶) $\log_۳^{\sqrt[۵]{۳^۲}}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow ۳^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۳^۲}$

۷) $\log_۴^{۲^{-۴}}=-۲ \Rightarrow ۴^{-۲}=۲^{-۴}$

۸) $\log_{\frac{۱}{۳}}^۳=-۱ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{-۱}=۳$

۹) $\log_{\frac{۷}{۳}}^{\frac{۳}{۷}}=-۱ \Rightarrow (\frac{۷}{۳})^{-۱}=\frac{۳}{۷}$

۱۰) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}=-۳ \Rightarrow ۱۰^{-۳}=۰/۰۰۱$

۱۱) $\log_{۶۴}^{۱۰۲۴}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow ۶۴^{\frac{۵}{۳}}=۱۰۲۴$

۱۲) $\log_{\sqrt{۵}}^{\sqrt{۵}}=۱ \Rightarrow \sqrt{۵}^۱=\sqrt{۵}$

در همه‌ی مثالهای بالا نیز می‌توان نتیجه ها را دوطرفه کرد یعنی تساویهای توانی را به شکل لگاریتمی نوشت .

یادآوری: قبلاً خوانده اید که: $a^1 = a$ و $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ و $a \neq 0 \Rightarrow a^{-n} = (\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$

نکته: با توجه به شرایطی که در تعریف گفته شد، لگاریتم برای اعداد منفی و صفر تعریف نمی‌شود.

تذکر: برای محاسبه ی لگاریتم از طریق تعریف، ابتدا لگاریتم داده شده را مساوی حرف دلخواهی مانند x قرار می دهیم و با استفاده از تعریف آن را به یک معادله ی توانی تبدیل می کنیم و آن را حل می کنیم

مثال: با استفاده از تعریف حاصل هر قسمت را بدست آورید:

۱) $\log_{3}81 = x \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \log_{3}81 = 4$

۲) $\log_{5}125 = x \rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \log_{5}125 = 3$

۳) $\log_{4}32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow (2^2)^x = 2^5 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_{4}32 = \frac{5}{2}$

۴) $\log_{\frac{1}{7}}49 = x \Rightarrow (\frac{1}{7})^x = 49 \Rightarrow (7^{-1})^x = 7^2 \Rightarrow 7^{-x} = 7^2 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{7}}49 = -2$

۵) $\log_{49}7 = x \Rightarrow 49^x = 7 \Rightarrow (7^2)^x = 7^1 \Rightarrow 7^{2x} = 7^1 \rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{49}7 = \frac{1}{2}$

۶) $\log_{5}\sqrt{5} = x \Rightarrow 5^x = \sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{5}\sqrt{5} = \frac{1}{2}$

۷) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3} = x \Rightarrow (\sqrt{3})^x = \frac{1}{3} \Rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^x = 3^{-1} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}x} = 3^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3} = -2$

۸) $\log_{0/1}1000 = x \Rightarrow (0/1)^x = 1000 \Rightarrow (10^{-1})^x = 10^3 \Rightarrow 10^{-x} = 10^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \log_{0/1}1000 = -3$

۹) $\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} = x \Rightarrow (\frac{3}{2})^x = \frac{2}{3} \Rightarrow (\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} = -1$

۱۰) $\log_{16}\sqrt{8} = x \rightarrow 16^x = \sqrt{8} \Rightarrow (2^4)^x = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{4x} = (2^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \rightarrow \log_{16}\sqrt{8} = \frac{3}{8}$

۱۱) $\log_{\frac{1}{27}}\sqrt[5]{3^2} = x \Rightarrow (\frac{1}{27})^x = \sqrt[5]{3^2} \Rightarrow (3^{-3})^x = 3^{\frac{2}{5}} \Rightarrow 3^{-3x} = 3^{\frac{2}{5}} \Rightarrow -3x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{-2}{15} \Rightarrow \log_{\frac{1}{27}}\sqrt[5]{3^2} = \frac{-2}{15}$

۱۲) $\log_{\frac{9}{4}}\frac{8}{27} = x \Rightarrow (\frac{9}{4})^x = \frac{8}{27} \Rightarrow ((\frac{3}{2})^2)^x = (\frac{2}{3})^3 \Rightarrow (\frac{3}{2})^{2x} = (\frac{3}{2})^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow \log_{\frac{9}{4}}\frac{8}{27} = \frac{-3}{2}$

۱۳) $\log_{6}1 = x \Rightarrow 6^x = 1 \Rightarrow 6^x = 6^0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \log_{6}1 = 0$

۱۴) $\log_{6}6 = x \Rightarrow 6^x = 6 \Rightarrow 6^x = 6^1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \log_{6}6 = 1$

۱۵) $\log_{7}(-7) = x \Rightarrow 7^x = -7$ غیر ممکن $\Rightarrow$ x وجود ندارد $\rightarrow$ $\log_{7}(-7)$ وجود ندارد

توجه کنید که: $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \times m}$

لگاریتم اعشاری: اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد به آن لگاریتم اعشاری می‌گوییم و در این حالت، مبنای لگاریتم را نمی‌نویسیم یعنی $\log_{10} x = \log x$.

لگاریتم طبیعی: اگر مبنای لگاریتم عدد ثابت $e \simeq 2{,}72$ (عدد نپر) باشد به آن لگاریتم نپرین یا لگاریتم طبیعی می‌گوییم و آن را با $\ln$ نشان می‌دهیم یعنی: $\log_e x = \ln x$

خواص لگاریتم (قضایای لگاریتم): در ادامه‌ی مبحث لگاریتم، به بیان ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم و سپس کاربرد آنها را در محاسبات، با مثال‌هایی بیان می‌کنیم در اینجا هدف اثبات این خواص نیست ولی با استفاده از تعریف لگاریتم، می‌توان آنها را ثابت کرد.

۱) $\log_a 1 = 0$ ۲) $\log_a a = 1$ ۳) $\log_{10} x = \log x$ ۴) $\log_e x = \ln x$

*۵) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ *۶) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *۷) $\log_a x^n = n \log_a x$

۸) $\log_a a^n = n$ *۹) $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$ ۱۰) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

۱۱) $\log_a \frac{x}{y} = -\log_a \frac{y}{x}$ ۱۲) $\log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log_a x$ ۱۳) $\log_a \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n}$

۱۴) $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$ *۱۵) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$ ۱۶) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

۱۷) $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$ ۱۸) $a^{\log_a x} = x$ *۱۹) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

۲۰) $\log_a x \times \log_b a = \log_b x$ ۲۱) $\log_a x \times \log_x a = 1$ ۲۲) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

۲۳) $\log_a x^n = \log_{\sqrt[n]{a}} x$ ۲۴) $\log_{\frac{1}{x}} x = -1$ ۲۵) $\log_x \frac{1}{x} = -1$

*۲۶) $\log_a x = \log_a y \implies x = y$

مثال: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

۱) $\log_7 1 = 0$ ۲) $\log_8 8 = 1$ ۳) $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$

۴) $\log_4 \frac{1}{4} = -1$ ۵) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$ ۶) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ ۷) $\log_8 128 = \log_{2^3} 2^7 = \frac{7}{3}$

۸) $\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$ ۹) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3^2} = \log_{3^{-1}} 3^{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{-1} = \frac{-2}{3}$

۱۰) $3^{\log_3 6} = 6$ ۱۱) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{8} = \log_{2^{-2}} \sqrt[5]{2^3} = \log_{2^{-2}} 2^{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{-2} = \frac{-3}{10}$

۱۲) $\log_{0.01}1000 = \log_{10^{-2}}10^3 = -\frac{3}{2}$

۱۳) $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{5^3}5^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

۱۴) $2^{\log_4 3} = 3^{\log_4 2} = 3^{\log_{2^2}2} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

۱۵) $5^{\log_{\sqrt{5}}4} = 4^{\log_{\sqrt{5}}5} = 4^{\log_{5^{\frac{1}{2}}}5^1} = 4^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = 4^2 = 16$

۱۶) $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6(3\times 2) = \log_6 6 = 1$

۱۷) $\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2\frac{16}{4} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

۱۸) $\log 25 + \log 4 = \log(25\times 4) = \log 100 = \log 10^2 = 2$

۱۹) $2\log 2 + \log 25 + \log 10 = \log 2^2 + \log(25\times 10) = \log 4 + \log 250 = \log(4\times 250) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

۲۰) $\log_4 96 - \log_4 3 = \log_4\frac{96}{3} = \log_4 32 = \log_{2^2}2^5 = \frac{5}{2}$

۲۱) $\log_8 3 \times \log_9 8 + \log_9 27 = \log_9 3 + \log_9 27 = \log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$

۲۲) $\log_4 5 + \log_4 8 - \log_4 10 = \log_4(5\times 8) - \log_4 10 = \log_4 40 - \log_4 10 = \log_4\frac{40}{10} = \log_4 4 = 1$

۲۳) $\left(\log_7 15 - \log_7 3\right)\times\log_{\frac{1}{5}}7 = \log_7\frac{15}{3}\times\log_{\frac{1}{5}}7 = \log_{\frac{1}{5}}5 = -1$

۲۴) $\left(2\log_7 2 + \frac{1}{\log_4 7}\right)\times\log_8 7 = \left(\log_7 2^2 + \log_7 4\right)\times\log_8 7 = \log_7 16\times\log_8 7 = \log_8 16 = \log_{2^3}2^4 = \frac{4}{3}$

۲۵) $\log_3 2\times\left(\log_8 6 - \log_8 2\right) = \log_3 2\times\log_8\frac{6}{2} = \log_3 2\times\log_8 3 = \log_8 2 = \log_{2^3}2^1 = \frac{1}{3}$

توجه کنید: $\log_a x + \log_a y \neq \log_a(x+y)$ و $\log_a x - \log_a y \neq \log_a(x-y)$

مثال: حاصل هر قسمت را به شکل یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید:

۱) $\log_4 8 + \log_4 2 + \log_4 x = \log_4(8\times 2\times x) = \log_4 16x$

۲) $2\log x - \log y = \log x^2 - \log y = \log\frac{x^2}{y}$

۳) $\log_{0.1}\sqrt[3]{4} + \log_{0.1}\sqrt[3]{10} + \log_{0.1}\sqrt[3]{25} = \log_{0.1}\left(\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{25}\right) = \log_{0.1}\sqrt[3]{1000} = \log_{0.1}10 = -1$

۴) $\log x - 3\log y + 2\log z = \log x - \log y^3 + \log z^2 = \log\frac{x}{y^3} + \log z^2 = \log\frac{xz^2}{y^3}$

۵) $\log_{10}5\times\log_3 10 + \log_5 2\times\log_3 5 = \log_3 5 + \log_3 2 = \log_3 5\times 2 = \log_3 10$

۶) $\log_{10}5\times\log_3 10\times\log_2 3\times\log_5 2 = \log_3 5\times\log_5 3 = \log_5 5 = 1$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

مثال: اگر $\log 2 \simeq 0{,}3$ و $\log 3 \simeq 0{,}4$ آنگاه حاصل هر قسمت را بیابید:

1) $\log 6 = \log(2\times 3) = \log 2 + \log 3 \simeq 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

2) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 \simeq 3\times 0{,}3 = 0{,}9$

3) $\log \sqrt[3]{81} = \log \sqrt[3]{3^4} = \frac{4}{3}\log 3 \simeq \frac{4}{3}\times 0{,}4 = \frac{1{,}6}{3}$

4) $\log 72 = \log(8\times 9) = \log 8 + \log 9 = \log 2^3 + \log 3^2 = 3\log 2 + 2\log 3 \simeq 3\times 0{,}3 + 2\times 0{,}4 = 1{,}7$

5) $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

6) $\log 15 = \log\frac{30}{2} = \log 30 - \log 2 = \log(3\times 10) - \log 2 = \log 3 + \log 10 - \log 2 \simeq 0{,}4 + 1 - 0{,}3 = 1{,}1$

7) $\log\frac{1}{27} = -\log 27 = -\log 3^3 = -3\log 3 \simeq -3\times 0{,}4 = -1{,}2$

8) $\log\frac{45}{16} = \log\frac{90}{32} = \log 90 - \log 32 = \log(3^2\times 10) - \log 2^5 = \log 3^2 + \log 10 - 5\log 2 = 2\log 3 + 1 - 5\times 0{,}3$

$= 2\times 0{,}4 + 1 - 1{,}5 = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$

9) $\log\sqrt{12} = \frac{1}{2}\log 12 = \frac{1}{2}\log(2^2\times 3) = \frac{1}{2}(2\log 2 + \log 3) \simeq \frac{1}{2}(2\times 0{,}3 + 0{,}4) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

10) $\log\frac{2\sqrt{3}}{9} = \log 2\sqrt{3} - \log 9 = \log 2 + \log\sqrt{3} - \log 3^2 = 0{,}3 + \frac{1}{2}\log 3 - 2\log 3$

$\simeq 0{,}3 + \frac{1}{2}\times 0{,}4 - 2\times 0{,}4 = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}8 = -0{,}3$

11) $\log_3 2 = \log_{10} 2 \times \log_3 10 = 0{,}3 \times \frac{1}{\log_{10} 3} \simeq 0{,}3\times\frac{1}{0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$

12) $\log_9 8 = \log_{10} 8 \times \log_9 10 = \log_{10} 8 \times \frac{1}{\log_{10} 9} = \log 2^3 \times \frac{1}{\log 3^2} = 3\log 2\times\frac{1}{2\log 3} \simeq 3\times 0{,}3\times\frac{1}{2\times 0{,}4}$

$= \frac{0{,}9}{0{,}8} = \frac{9}{8}$

13) $\frac{1}{2}\log(7+2\sqrt{6}) + \log(\sqrt{6}-1) = \log\sqrt{7+2\sqrt{6}} + \log(\sqrt{6}-1) = \log\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} + \log(\sqrt{6}-1)$

$= \log(\sqrt{6}+1) + \log(\sqrt{6}-1) = \log(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1) = \log(6-1) = \log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$

$\simeq 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

دامنه‌ی تابع لگاریتمی: با توجه به تعریف لگاریتم اگر $f(x)=\log_{Q(x)} P(x)$ آنگاه باید داشته باشیم $P(x)>0$ و $Q(x)>0$ و $Q(x)\neq 1$. بنابراین

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid P(x)>0\ ,\ Q(x)>0\ ,\ Q(x)\neq 1\}$$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x)=\log(2x-3)$

حل: چون مبنای لگاریتم ۱۰ است پس باید $2x-3>0$ لذا $2x>3$ پس $x>\frac{3}{2}$.

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{3}{2}\}=(\frac{3}{2},+\infty)$$

۲) $f(x)=\log_4(1-3x)$

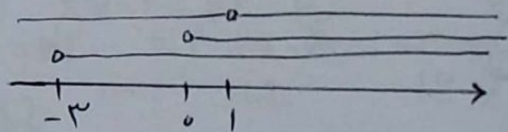
حل: چون مبنای لگاریتم عدد مثبت و مخالف ۱ است (عدد ۴) پس باید $1-3x>0$ بنابراین $1>3x$ لذا $\frac{1}{3}>x$ پس

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{1}{3}\}=(-\infty,\frac{1}{3})$$

۳) $f(x)=\log_x(x+3)$

حل: با توجه به شرایطی که در بالا گفته شد داریم:

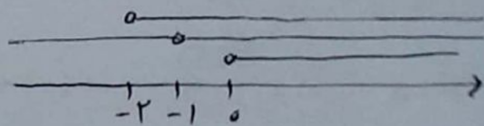
$$\begin{cases} x+3>0 \Rightarrow x>-3 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(0,+\infty)-\{1\}$$



۴) $f(x)=\log_{(x+2)}\frac{2}{x}$

حل: با توجه به شرایط دامنه‌ی تابع لگاریتمی داریم:

$$\begin{cases} \frac{2}{x}>0 \Rightarrow x>0 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ x+2\neq 1 \Rightarrow x\neq -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$$



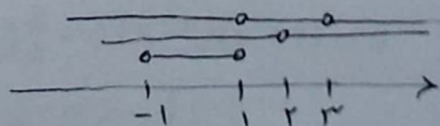
۵) $f(x)=\log_{|x-2|}(1-x^2)$

حل: با در نظر گرفتن شرایط دامنه‌ی تابع لگاریتمی داریم:

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1 \\ |x-2|>0 \Rightarrow x\neq 2 \\ |x-2|\neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq 1 \end{cases} \\ x-2\neq \pm 1 \end{cases}$$

$1-x^2=0 \Rightarrow 1=x^2 \Rightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	



$D_f=(-1,1)$

۶) $f(x)=\log_x\frac{x+2}{2-x}$

حل: اگر شرایط دامنه‌ی تابع لگاریتمی را به کار ببریم داریم:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2-x}>0 \Rightarrow -2<x<2 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(0,2)-\{1\}$$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+2}{2-x}$		$-$	0	$+$	ت‌ن	$-$	

معادلات لگاریتمی: برای حل معادلات لگاریتمی از قوانین زیر استفاده می‌کنیم و سپس جواب‌های بدست آمده را در معادله امتحان می‌کنیم که شرایط تابع لگاریتمی برقرار باشد. می‌توانیم بجای این کار ابتدا دامنه‌ی عبارت‌های لگاریتمی را بیابیم و سپس جواب‌های بدست آمده که در دامنه هستند را به عنوان مجموعه‌ی جواب معادله، انتخاب کنیم.

$1)\ \log_a P(x) = \log_a Q(x) \Rightarrow P(x) = Q(x)$

$2)\ \log_a P(x) = b \Rightarrow a^b = P(x)$ $\qquad$ $3)\ \log_a b = P(x) \Rightarrow a^{P(x)} = b$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$1)\ \log_3 (x+2) = 1 \Rightarrow x+2 = 3^1 \Rightarrow x = 3-2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ ج م $=\{1\}$

روش دیگر: $\log_3 (x+2) = \log_3 3 \Rightarrow x+2 = 3 \Rightarrow x = 3-2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ ج م $=\{1\}$

$2)\ \log_{\frac{1}{2}} 16 = x+1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 16 \Rightarrow (2^{-1})^{x+1} = 2^4 \Rightarrow 2^{-x-1} = 2^4 \Rightarrow -x-1 = 4 \Rightarrow$

$-x = 4+1 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow$ ج م $=\{-5\}$

$3)\ \log_6 (2x+1) = \log_6 (x^2+2x) \Rightarrow 2x+1 = x^2+2x \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \underset{\text{غ ق ق}}{\pm 1} \Rightarrow$ ج م $=\{1\}$

$x=-1$ غیرقابل قبول است زیرا اگر به جای x قرار دهیم عبارت $2x+1$ برابر -1 می‌شود که لگاریتم آن تعریف نشده است. یا اگر دامنه‌ی عبارت طرف اول را بیابیم $2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow D_1 = (-\frac{1}{2}, +\infty)$ و $-1 \notin D_1$.

$4)\ \log_5 (x-2) + \log_5 (x+2) = 1 \Rightarrow \log_5 (x-2)(x+2) = \log_5 5 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 5$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 5 \Rightarrow x^2 = 5+4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \underset{\text{غ ق ق}}{\pm 3} \Rightarrow$ ج م $=\{3\}$

$5)\ 3\log_8 x = -\log_8 125 \Rightarrow \log_8 x^3 = \log_8 125^{-1} \Rightarrow x^3 = 125^{-1} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{125} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

$\Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow$ ج م $=\{\frac{1}{5}\}$

$6)\ \log_4 \sqrt{8} = x-2 \Rightarrow 4^{x-2} = \sqrt{8} \Rightarrow (2^2)^{x-2} = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2x-4} = (2^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2x-4} = 2^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow 2x-4 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} + \frac{4}{1} \Rightarrow 2x = \frac{11}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{4} \Rightarrow$ ج م $=\{\frac{11}{4}\}$

۷) $2\log_2 x - \log_2(x+\frac{3}{2}) = 1 \Rightarrow \log_2 x^2 - \log_2(x+\frac{3}{2}) = \log_2 2 \Rightarrow \log_2 \frac{x^2}{x+\frac{3}{2}} = \log_2 2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x+\frac{3}{2}} = \frac{2}{1} \Rightarrow x^2 = 2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \text{ غ ق ق} \\ x=\frac{-c}{a}=3 \end{cases} \Rightarrow$ ج م $=\{3\}$

۸) $\log_2 x^2 - \log_2(x+\frac{3}{2}) = 1 \Rightarrow \log_2 \frac{x^2}{x+\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+\frac{3}{2}} = 2^1 \Rightarrow x^2 = 2x+3$

$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-c}{a}=3 \end{cases} \Rightarrow$ ج م $=\{-1,3\}$

۹) $\log_3(x^2+2) = \log_3(-2x+1) \Rightarrow x^2+2 = -2x+1 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0$

$x=-1 \Rightarrow$ ج م $=\{-1\}$

۱۰) $\log_2 x^2 + \log_2 \sqrt{x} = 5 \Rightarrow \log_2 x^2\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x^2\cdot\sqrt{x} = 2^5 \Rightarrow x^2\cdot x^{\frac{1}{2}} = 2^5 \Rightarrow x^{\frac{5}{2}} = 2^5$

$\Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^5 = 2^5 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=4 \Rightarrow$ ج م $=\{4\}$

۱۱) $\log_2 x + \log_8 x = 2\log_2 x \cdot \log_8 x \ ; \ x>1 \xrightarrow{\div \log_2 x \cdot \log_8 x} \frac{1}{\log_8 x} + \frac{1}{\log_2 x} = 2 \Rightarrow \log_x 8 + \log_x 2 = 2$

$\Rightarrow \log_x(8\times 2) = 2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x=\pm 4 \xrightarrow{x>1} x=4 \Rightarrow$ ج م $=\{4\}$

۱۲) $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3 \Rightarrow (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$

$\log_3 x = t \Rightarrow t^2-2t-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{-c}{a}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \Rightarrow x=3^{-1} \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ \log_3 x = 3 \Rightarrow x=3^3 \Rightarrow x=27 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ج م $=\{\frac{1}{3}, 27\}$

مسئله: اگر $4^x = 4\sqrt{2}$ و $\log y = 1+\log\sqrt{x+1}$ آنگاه مقدار y را بیابید.

حل: $4^x = 4\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^x = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{4}} \Rightarrow \log y = 1+\log\sqrt{\frac{5}{4}+1}$

$\Rightarrow \log y - \log\sqrt{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow \log y - \log\frac{3}{2} = 1 \Rightarrow \log\frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{2y}{3} = 10 \Rightarrow 2y = 30$

$\Rightarrow \boxed{y=15}$

مسئله: اگر $\log_3 2 = m$ آنگاه حاصل $\log_4 27$ را بیابید.

حل: $\log_4 27 = \log_{2^2} 3^3 = \frac{3}{2}\log_2 3 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\log_3 2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{m} = \frac{3}{2m}$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

تمرین ۱ : تساوی‌های توانی زیر را به شکل لگاریتمی بنویسید:

۱) $3^5=243$ ۲) $2^{10}=1024$ ۳) $(0.1)^2=0.01$ ۴) $5^{-3}=\frac{1}{125}$

۵) $(\frac{2}{9})^2=\frac{4}{81}$ ۶) $11^{\frac{1}{2}}=\sqrt{11}$ ۷) $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{25}$ ۸) $(\frac{1}{7})^{-3}=343$

۹) $(\frac{1}{3})^{-\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{81}$ ۱۰) $(0.01)^{-3}=1000000$ ۱۱) $9^{-2}=\frac{1}{81}$ ۱۲) $(\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{3}$

تمرین ۲ : تساوی‌های لگاریتمی زیر را به صورت توانی بنویسید:

۱) $\log 10000=4$ ۲) $\log_4 2=\frac{1}{2}$ ۳) $\log_{\sqrt{7}} 49=4$ ۴) $\log_{\frac{1}{13}} 13=-1$

۵) $\log_{15} \frac{1}{15}=-1$ ۶) $\log_{49} \sqrt{7}=\frac{1}{4}$ ۷) $\log_{0.1} \sqrt{10}=-\frac{1}{2}$ ۸) $\log_{100} 0.001=\frac{-3}{2}$

۹) $\log_{32} 1024=2$ ۱۰) $\log_{125} 625=\frac{4}{3}$ ۱۱) $\log_{\sqrt{125}} \frac{1}{5}=\frac{-2}{3}$ ۱۲) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}=-6$

تمرین ۳ : با استفاده از تعریف حاصل هر قسمت را بیابید:

۱) $\log_4 512$ ۲) $\log_{27} 729$ ۳) $\log_7 \sqrt[3]{7}$ ۴) $\log_{\sqrt{5}} 25$ ۵) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ ۶) $\log_{\sqrt{8}} 32$

۷) $\log_{121} \frac{1}{11}$ ۸) $\log_{27} \sqrt[5]{32}$ ۹) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{625}$ ۱۰) $\log_{\sqrt{10}} 0.00001$ ۱۱) $\log_{0.01} \sqrt{10}$ ۱۲) $\log_9 3\sqrt{3}$

تمرین ۴ : حاصل هر قسمت را بدست آورید:

۱) $\log_{16} 128$ ۲) $\log_{0.5} \sqrt[3]{16}$ ۳) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$ ۴) $\log \sqrt[5]{1000}$ ۵) $3^{(\log_3 2+\log_3 5)}$

۶) $7^{(\log_7 5-\log_7 10)}$ ۷) $\log_3 75-2\log_3 5$ ۸) $\log 20+\log\frac{1}{2}-\log 5$ ۹) $3\log 2+4\log 5-\log\frac{1}{2}$

۱۰) $\log_{30} \sqrt{3}+\log_{30} \sqrt{2}+\log_{30} \sqrt{5}$ ۱۱) $\frac{2}{3}\log_3 5+\log_3 \sqrt[3]{5}+\log_3 \frac{3}{5}$ ۱۲) $3\log 5+4\log 2-\log 100-\log 20$

تمرین ۵ : اگر $\log 2=k$ و $\log 3=m$ و $\log 7=n$ حاصل هر قسمت را بدست آورید:

۱) $\log 14$ ۲) $\log 42$ ۳) $\log 35$ ۴) $\log\sqrt{45}$ ۵) $\log\frac{8}{15}$

۶) $\log\sqrt[3]{72}$ ۷) $\log\frac{\sqrt{6}}{7}$ ۸) $\log\frac{12}{49}$ ۹) $\log\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ۱۰) $\log\frac{5}{56}$

۱۱) $\log 50$ ۱۲) $\log 3\sqrt{40}$ ۱۳) $2\log 81-3\log\sqrt{32}$ ۱۴) $\log 25+2\log\sqrt{7}$

تمرین ۶: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $\log_{6} x + \log_{6} 2 = \log_{6} 18$

۲) $3\log x = \log \frac{1}{64}$

۳) $\log x + \log(x+3) = 1$

۴) $2\log_{3} x + \log_{3} 4 = \log_{3} 36$

۵) $\log_{2} 3x - \log_{2}(x+1) = 1$

۶) $2\log_{9} x - \log_{9}(2-x) = 0$

۷) $\log(1-x) - \log 5 = \log 2$

۸) $\ln(x-2) = 3$

۹) $\log_{9}(x-7) + \log_{9}(x+7) = 1$

۱۰) $\log_{9}(x-\sqrt{7}) + \log_{9}(x+\sqrt{7}) = 1$

۱۱) $\log(x+15) + \log x = 2$

۱۲) $\log_{8}(x-2) + \log_{8}(x+3) = \log_{8} 14$

۱۳) $\log_{\sqrt{5}} 125 = 2x$

۱۴) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = x-2$

۱۵) $(\log_{2} x)^2 + 5\log_{2} x = 6$

۱۶) $(\log_{7} x)^2 = \log_{7} x + 12$

تمرین ۷: اگر $9^x = 3\sqrt{3}$ آنگاه حاصل هر قسمت را بیابید:

۱) $\log_{x} \frac{9}{16}$

۲) $\log_{\frac{4}{3}} x$

۳) $\log_{x} \frac{256}{81}$

۴) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{x}$

تمرین ۸: اگر $\log_{a} b = 4$ آنگاه حاصل عبارت زیر را بیابید:

$\log_{\sqrt{b}} a + \log_{\sqrt{a}} b$

تمرین ۹: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(2-3x)$

۲) $f(x) = \log(x^2-x-6)$

۳) $f(x) = \log_{(x+1)}(x^2+4)$

۴) $f(x) = \log_{2x}(x^2-2x)$

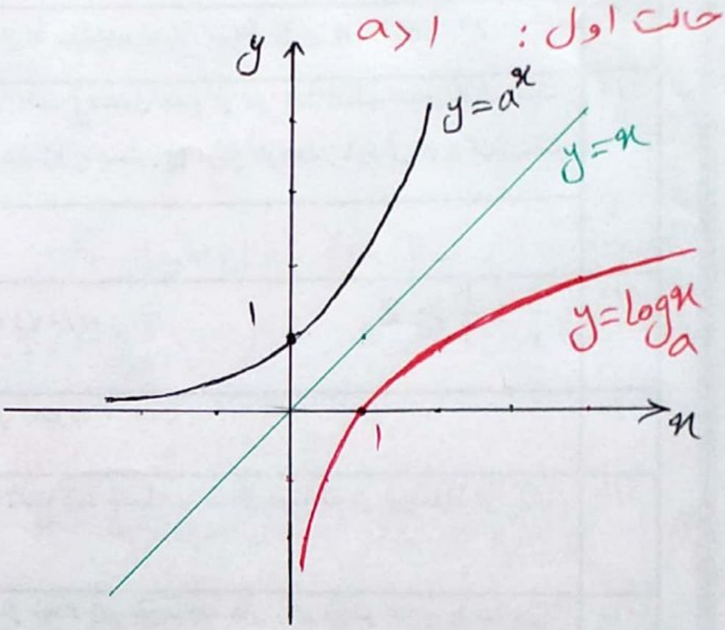
۵) $f(x) = \dfrac{1}{1-\log(3x-2)}$

۶) $f(x) = \log_{(x-2)} \dfrac{x+3}{x}$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

نمودار تابع لگاریتمی : قبلاً گفتیم که تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است بنابراین برای رسم نمودار تابع $y=\log_a^x$ کافیست نمودار $y=a^x$ را رسم کنیم و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به خط $y=x$ بدست آوریم بنابراین برحسب اینکه $a>1$ یا $0<a<1$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

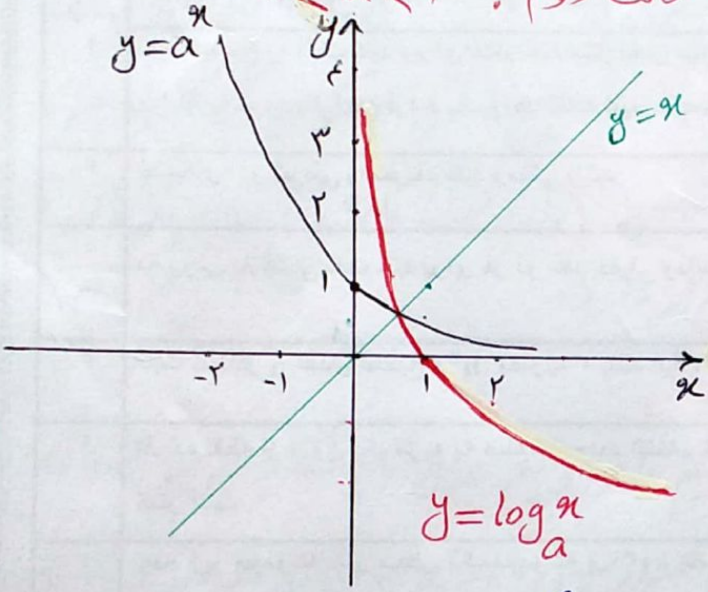
حالت اول : $a>1$



همانطور که می‌بینید در این حالت که تابع نمایی صعودی است و نمودار تابع لگاریتمی نیز صعودی است ضمناً دامنه‌ی تابع لگاریتمی $(0,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد ضمن اینکه نمودار این تابع از نقطه‌ی $(1,0)$ می‌گذرد و محور y ها را قطع نمی‌کند یعنی محور y ها «مجانب قائم» آن می‌باشد. بنابراین همانطور که قبلاً گفتیم لگاریتم برای اعداد منفی و صفر تعریف نشده است و لگاریتم 1 نیز برابر صفر است.

در این حالت وقتی $x\in(0,1)$ لگاریتم منفی و وقتی $x\in(1,+\infty)$ لگاریتم عددی مثبت می‌باشد.

حالت دوم : $0<a<1$



همانطور که دیده می‌شود در این حالت تابع نمایی نزولی است و نمودار تابع لگاریتمی نیز نزولی است درضمن دامنه‌ی تابع لگاریتمی $(0,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد همچنین نمودار این تابع از نقطه‌ی $(1,0)$ می‌گذرد یعنی لگاریتم 1 برابر صفر است این نمودار محور y ها را قطع نمی‌کند یعنی محور y ها «مجانب قائم» آن می‌باشد پس همانطور که قبلاً گفتیم لگاریتم برای اعداد منفی و صفر تعریف نشده است.

در این حالت وقتی $x\in(0,1)$ لگاریتم عددی مثبت و وقتی $x\in(1,+\infty)$ لگاریتم عددی منفی می‌باشد.

تذکر ۱: اگر $a>1$ آنگاه با توجه به صعودی بودن $y=a^x$ و $y=\log_a x$ داریم:

$$a^x > a^y \Rightarrow x>y \quad , \quad \log_a x > \log_a y \Rightarrow x>y$$

تذکر ۲: اگر $0<a<1$، آنگاه با توجه به نزولی بودن $y=a^x$ و $y=\log_a x$ داریم:

$$a^x > a^y \Rightarrow x<y \quad , \quad \log_a x > \log_a y \Rightarrow x<y$$

تذکر ۳: با توجه به اینکه دو تابع $y=a^x$ و $y=\log_a x$ معکوس یکدیگرند پس اگر نقطه‌ی (x_1, y_1) روی نمودار تابع $y=a^x$ قرار داشته باشد آنگاه نقطه‌ی (y_1, x_1) روی نمودار تابع $y=\log_a x$ قرار دارد.

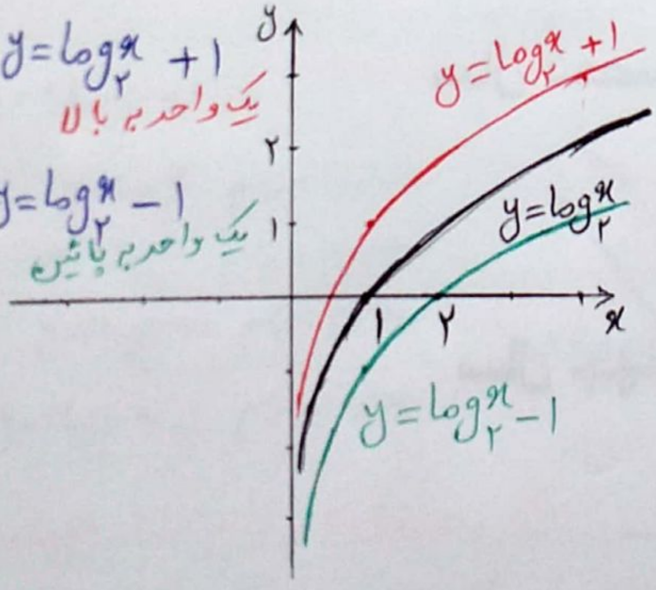
رسم نمودار برخی از توابع لگاریتمی به روش انتقال:

همه‌ی قوانینی که برای انتقال نمودارها قبلاً گفتیم را می‌توانیم برای تابع لگاریتمی نیز استفاده کنیم.

مثال: ابتدا نمودار تابع $y=\log_2 x$ را رسم کنید و سپس با استفاده از آن نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

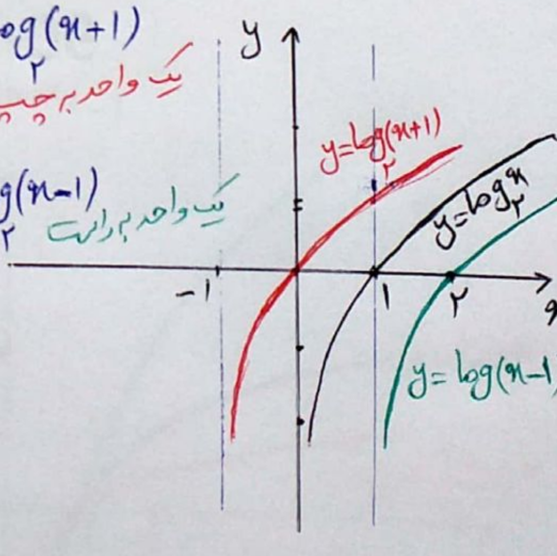
۱) $y=\log_2 x + 1$ یک واحد به بالا

۲) $y=\log_2 x - 1$ یک واحد به پائین



۳) $y=\log_2(x+1)$ یک واحد به چپ

۴) $y=\log_2(x-1)$ یک واحد به راست



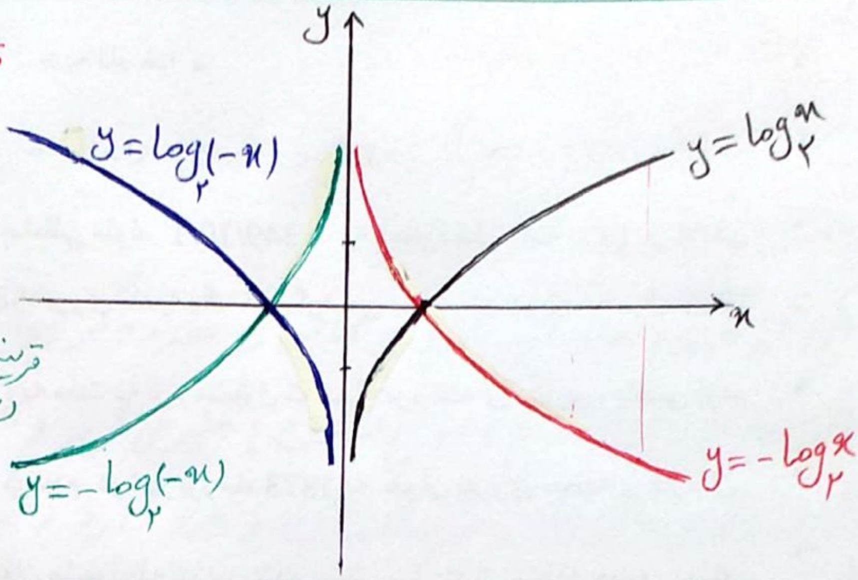
تذکر: در انتقال نمودار تابع لگاریتمی به چپ یا به راست، بایستی مجانب قائم نمودار را هم، به چپ یا راست منتقل کنیم تا دامنه‌ی تابع، به درستی مشخص شود و نمودار تابع به شکل صحیح رسم شود.

«توابع نمایی و لگاریتم»

۵) $y=-\log_2 x$ قرینه نسبت به محور xها

۶) $y=\log_2(-x)$ قرینه نسبت به محور yها

۷) $y=-\log_2(-x)$ قرینه نسبت به محور xها و سپس نسبت به محور yها (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)

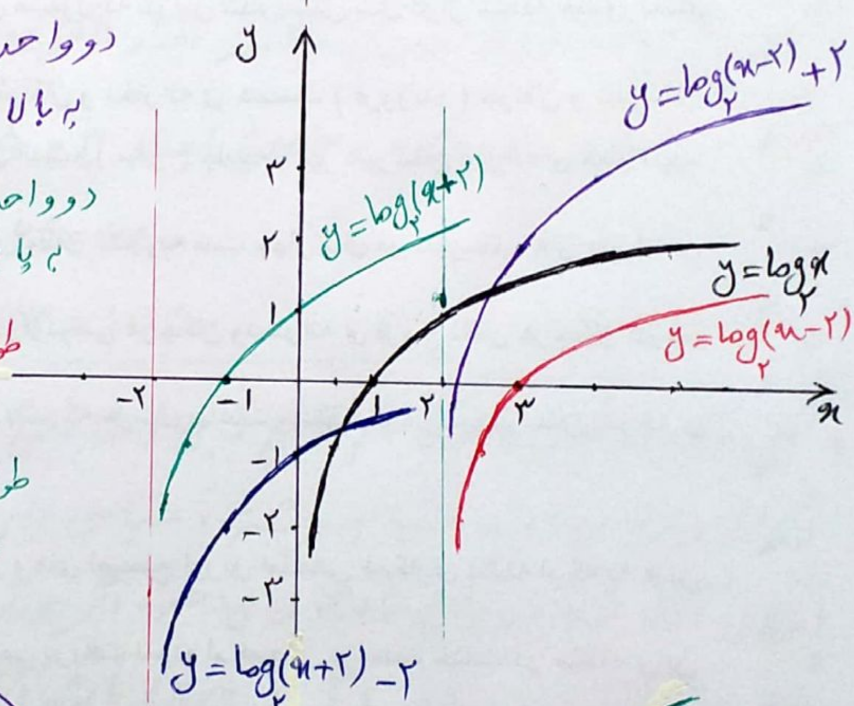


۸) $y=\log_2(x-2)+2$ دو واحد به راست و دو واحد به بالا می رود.

۹) $y=\log_2(x+2)-2$ دو واحد به چپ و دو واحد به پائین می رود.

۱۰) $y=\frac{1}{2}\log_2 x$ طول نقاط ثابت می ماند ولی عرض نقاط نصف می شود.

۱۱) $y=2\log_2 x$ طول نقاط ثابت می ماند ولی عرض نقاط دو برابر می شود.



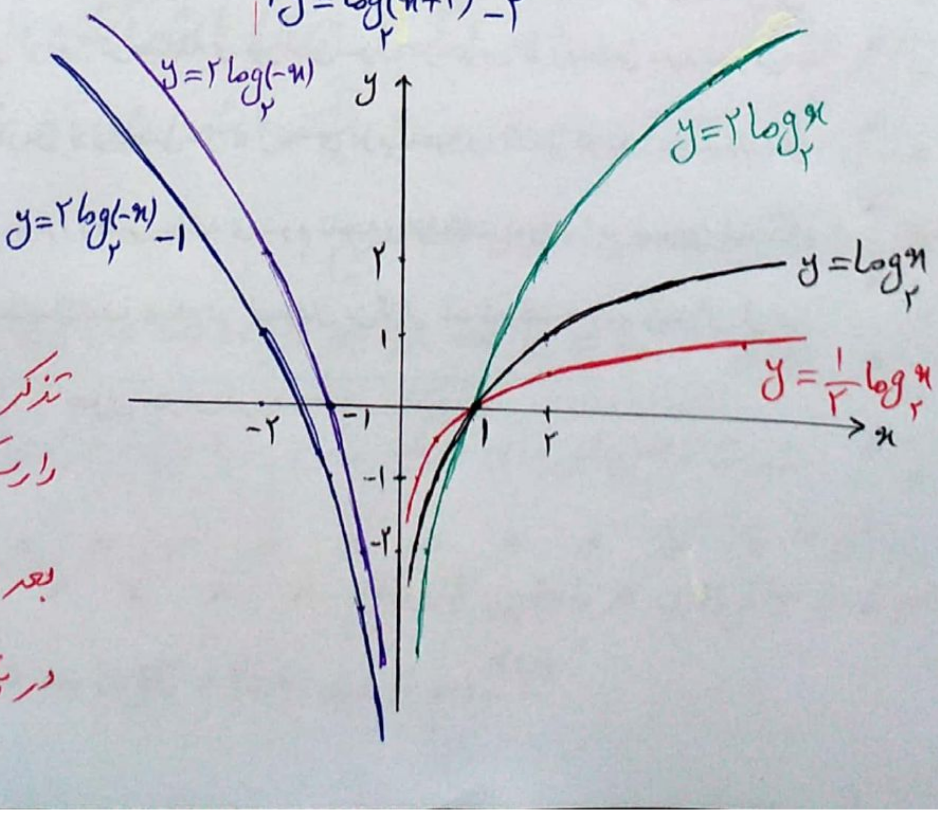
۱۲) $y=2\log_2(-x)-1$

مرحله اول: رسم $y=\log_2 x$

مرحله دوم: رسم $y=2\log_2 x$

مرحله سوم: رسم $y=2\log_2(-x)$

مرحله چهارم: رسم $y=2\log_2(-x)-1$



تذکر: در مثال ۱۲ می توانیم ابتدا $y=\log_2 x$ را رسم کنیم سپس $y=\log_2(-x)$ را بیابیم و بعد نمودار $y=2\log_2(-x)$ را رسم کنیم و در پایان $y=2\log_2(-x)-1$ را مشخص کنیم

کاربرد توابع نمایی و لگاریتم:

هر تابع به شکل $f(x)=ka^x$ $(a>0$ و $a\neq 1)$ رفتار نمایی دارد. این تابع در بسیاری از مسائل مهندسی و اقتصاد کاربرد دارد.

* یکی از کاربردهای این تابع، محاسبه‌ی تعداد باکتری‌ها، در مسائل مربوط به کشت باکتری‌ها می‌باشد. باکتری‌ها به روش تقسیم (دو نیم شدن) تکثیر می‌شوند و تکثیر آنها به صورت نمایی است.

مثال: نوعی باکتری در بدن انسان وجود دارد که تعداد باکتری‌ها پس از t ساعت از رابطه‌ی $P(t)=100\times 2^{2t}$ بدست می‌آیند. تعداد باکتری‌ها را پس از گذشت ۳ و ۵ ساعت بدست آورید.

حل: در رابطه‌ی داده شده به جای t اعداد ۳ و ۵ را قرار می‌دهیم پس داریم:

$$P(3)=100\times 2^{2\times 3}=100\times 2^6=100\times 64=6400$$

$$P(5)=100\times 2^{2\times 5}=100\times 2^{10}=100\times 1024=102400$$

* یکی دیگر از کاربردهای مهم توابع نمایی و لگاریتمی، در محاسبه‌ی شدت زلزله و انرژی آزاد شده در اثر زلزله می‌باشد. مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زمین لرزه را M در مقیاس ریشتر و E انرژی آزاد شده‌ی آن در واحد ارگ (Erg) باشد آنگاه داریم: $\boxed{\log E=11/8+1/5M}$.

مثال: اگر بزرگی یک زمین لرزه ۶ ریشتر باشد انرژی آزاد شده‌ی این زمین لرزه را محاسبه کنید.

حل: با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\log E=11/8+1/5\times 6=11/8+9=20/8\Rightarrow \log E=20/8\Rightarrow E=10^{20/8}\ (Erg)$$

مثال: شدت زمین لرزه‌ای در یک زلزله ۷/۲ ریشتر گزارش شده است میزان انرژی آزاد شده در این زلزله را بیابید.

حل: با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\log E=11/8+1/5\times 7/2=11/8+10/8\rightarrow \log E=22/6\Rightarrow E=10^{22/6}$$

مثال: اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله تقریباً $10^{23/8}$ ارگ باشد شدت این زلزله در مقیاس ریشتر را بدست آورید.

حل: با جاگذاری در فرمول مربوطه داریم:

$$\log E = 11/8 + 1/5M$$

$$\Rightarrow \log 10^{23/8} = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 23/8 = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 23/8 - 11/8 = 1/5M \Rightarrow 12 = 1/5M$$

$$\Rightarrow M = \frac{12}{1/5} \Rightarrow M = 8$$ ریشتر

مثال: اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله تقریباً $10^{20/05}$ Erg باشد شدت این زلزله را برحسب ریشتر بیابید.

حل: با جایگذاری در فرمول مربوطه داریم:

$$\log E = 11/8 + 1/5M$$

$$\Rightarrow \log 10^{20/05} = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 20/05 = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 20/05 - 11/8 = 1/5M \Rightarrow 8/25 = 1/5M$$

$$\Rightarrow M = \frac{8/25}{1/5} \Rightarrow M = 5/5$$ ریشتر

* از دیگر کاربردهای لگاریتم در شیمی، محاسبه‌ی PH یک محلول است که میزان اسیدی یا بازی یا خنثی بودن محلول را نشان می دهد که از رابطه‌ی $\boxed{PH = -\log[H^+]}$ بدست می آید و در آن $[H^+]$ غلظت یون هیدرونیوم برحسب $\frac{mol}{lit}$ می باشد.

مثال: PH محلولی را تعیین کنید که در آن داشته باشیم $[H^+] = 0/1$.

حل: با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$PH = -\log[H^+]$$

$$\Rightarrow PH = -\log 0/1 = -\log 10^{-1} = -(-1) = 1$$

مثال: اگر غلظت یون هیدرونیوم در یک محلول ۰/۰۰۰۱ مول بر لیتر باشد PH این محلول را بیابید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم:

$$PH = -\log[H^+]$$

$$\Rightarrow PH = -\log 0/0001 = -\log 10^{-4} = -(-4) = 4$$

تذکر: اگر $PH = 7$ آنگاه محیط، خنثی است اگر $PH > 7$ آنگاه محیط، بازی است و اگر $PH < 7$ آنگاه محیط، اسیدی می باشد.

مثال: اگر PH یک محلول برابر ۸ باشد آنگاه میزان غلظت یون هیدرونیوم این محلول را بدست آورید.

حل: با جایگذاری در رابطه‌ی مربوط داریم: $PH=-\log[H^+]$

$$\Rightarrow 8=-\log[H^+] \Rightarrow \log_{10}[H^+]=-8 \rightarrow [H^+]=10^{-8} \Rightarrow [H^+]=0/00000001 \ \frac{mol}{lit}$$

مثال: اگر PH یک محلول برابر ۵ باشد آنگاه میزان غلظت یون هیدرونیوم این محلول را بیابید.

حل: با استفاده از فرمول گفته شده داریم: $PH=-\log[H^+]$

$$\Rightarrow 5=-\log[H^+] \Rightarrow \log_{10}[H^+]=-5 \Rightarrow [H^+]=10^{-5} \Rightarrow [H^+]=0/00001 \ \frac{mol}{lit}$$

مثال: در محلول خنثی $PH=7$ مقدار غلظت یون هیدرونیوم در محلول خنثی را بیابید.

حل: با جایگذاری در فرمول مربوط داریم: $PH=-\log[H^+]$

$$\Rightarrow 7=-\log[H^+] \Rightarrow \log_{10}[H^+]=-7 \Rightarrow [H^+]=10^{-7} \Rightarrow [H^+]=0/0000001$$

---

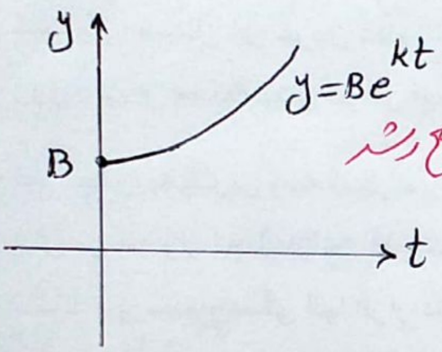
* از جمله مواردی که در آن از لگاریتم استفاده می‌شود «تراز شدت صوت» است و داریم: $\beta=\log\frac{I}{I_0}$ که در آن β تراز شدت صوت است که واحد آن «دسی بل» می‌باشد و I «شدت صوت» و I_0 «شدت صوت مبنا» است. همچنین رابطه‌ی محاسبه‌ی فشار هوای اتمسفر به صورت زیر است: $a=15500(5-\log_{10}P)$ که در آن a ارتفاع برحسب متر و P فشار برحسب پاسکال می‌باشد.

برای محاسبه‌ی شوری آب اقیانوس‌ها هم از لگاریتم استفاده می‌شود بدین ترتیب که از رابطه‌ی $S(x)=31/5+1/1\log(x+1)$ کمک می‌گیریم که در آن x نشان دهنده‌ی عمق برحسب متر و $S(x)$ نشان دهنده‌ی مقدار گرم نمک موجود در هر کیلوگرم آب اقیانوس می‌باشد.

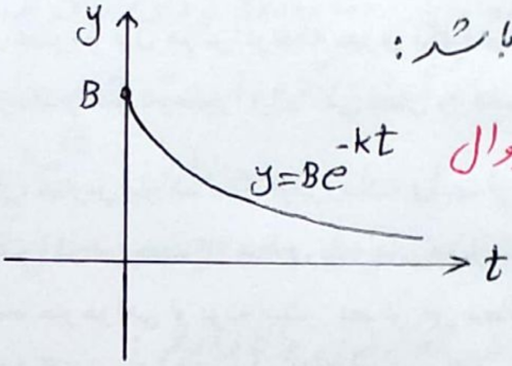
همچنین برای تعیین نیم عمر عناصر در باستان‌شناسی، میزان رشد جمعیت، میزان سود یا ضرر در سرمایه‌گذاری‌ها و ... از توابع نمایی و لگاریتمی استفاده می‌شود.

تابع رشد و زوال نمایی: در بسیاری از شاخه‌های علمی با مدل های ریاضی که شامل توان‌هایی از e (عدد نپر) هستند سروکار داریم بعضی از این مدل ها، تابع رشد (زوال) نمایی نامیده می‌شوند

هر معادله به شکل $f(t)=Be^{kt}$ (B و k اعدادی ثابت و مثبت هستند و $t\geq 0$) تابعی با رشد نمایی را نشان می دهد. و در صورتی که: $f(t)=Be^{-kt}$ (با شرایط بالا) آنگاه این تابع یک تابع زوال نمایی را نشان می دهد تابع رشد نمایی صعودی و تابع زوال نمایی، نزولی می باشند در هر دو تابع مذکور t بیانگر زمان بوده و $f(0)=B$ پس شکل این دو تابع به صورت زیر می باشد:



تابع رشد



تابع زوال

مثال: در کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t از مدل $V(t)=Be^{2t}$ پیروی می کند که در آن B مقدار ثابت مثبتی می باشد هرگاه در لحظه‌ی شروع آزمایش، ۱۰۰۰ باکتری کشت داده شود پس از ۲ ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟

حل: می دانیم که $B=1000$ پس با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم: $V(t)=1000e^{2t}$

$$\Rightarrow V(2)=1000e^{2\times 2}=1000e^{4}\simeq 1000\times 54.6=54600$$

یعنی پس از ۲ ثانیه بعد از شروع کشت تقریباً ۵۴۶۰۰ باکتری وجود دارد.

مثال: قیمت یک محصول صنعتی پس از گذشت t سال از رابطه‌ی $V(t)=Be^{-0.2t}$ محاسبه می‌شود اگر قیمت این محصول در ابتدا ۱۰۰۰۰۰۰ تومان باشد قیمت آن بعد از ۲ سال چقدر می‌شود؟

حل: می دانیم که $V(0)=B=1000000$ پس با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$V(t)=1000000e^{-0.2t}\Rightarrow V(2)=1000000e^{-0.2\times 2}\Rightarrow V(2)=1000000e^{-0.4}$$

$$\rightarrow V(2)\simeq 1000000(0.670320)\Rightarrow V(2)\simeq 6703200$$

تومان قیمت آن بعد از دو سال

مثال: فرض کنیم تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت پس از گذشت t دقیقه از معادله‌ی $f(t)=1500e^{0.04t}$ بدست آید پس از چند دقیقه تعداد باکتری‌ها ۳۰۰۰۰ می‌شود؟ ($\ln 20 \simeq 2.9975$)

حل: با جایگذاری در معادله‌ی بالا داریم:

$$f(t)=1500e^{0.04t}$$

$$\Rightarrow 30000=1500e^{0.04t} \Longrightarrow 20=e^{0.04t} \Longrightarrow \ln 20 = 0.04t \Rightarrow t=\frac{\ln 20}{0.04} \simeq \frac{2.9975}{0.04}=74.9$$

یعنی باید تقریباً ۷۵ دقیقه بگذرد تا تعداد باکتری‌ها به ۳۰۰۰۰ برسد.

مثال: فردی مبلغ ۲۰۰۰۰۰۰ تومان را در یک حساب پس‌انداز با نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کرده است چه مدت طول می‌کشد که سرمایه‌ی او دو برابر شود؟
(سود و سرمایه پس از t سال از معادله‌ی $f(t)=Pe^{it}$ بدست می‌آید که در آن P سرمایه‌ی اولیه و i درصد سود مرکب پیوسته و t زمان برحسب سال است) ($\ln 2 \simeq 0.693$)

حل: با جایگذاری در معادله‌ی بالا داریم:

$$f(t)=Pe^{it}$$

$$\Rightarrow 4000000=2000000e^{0.1t} \Rightarrow 2=e^{0.1t} \Rightarrow \ln 2=\ln e^{0.1t} \Rightarrow \ln 2 = 0.1t$$

$$\Rightarrow t=\frac{\ln 2}{0.1} \simeq \frac{0.693}{0.1} \Rightarrow t \simeq 6.93$$

یعنی تقریباً ۷ سال باید بگذرد تا سرمایه‌ی او دو برابر شود.

مثال: جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگ ۶ درصد متناسب با جمعیت افزایش می‌یابد اگر جمعیت بعد از t سال از رابطه‌ی $P(t)=10000e^{0.06t}$ بدست آید چند سال طول می‌کشد تا جمعیت این شهر ۲۵۰۰۰ نفر شود؟ ($\ln 2.5 \simeq 0.93$)

حل: با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی بالا داریم:

$$P(t)=10000e^{0.06t} \Rightarrow 25000=10000e^{0.06t} \Rightarrow 2.5=e^{0.06t} \Longrightarrow \ln 2.5=\ln e^{0.06t}$$

$$\Rightarrow \ln 2.5 = 0.06t \Rightarrow t=\frac{\ln 2.5}{0.06} \simeq \frac{0.93}{0.06} \Rightarrow t \simeq 15.5$$

یعنی پانزده سال و نیم طول می‌کشد تا جمعیت این شهر به ۲۵۰۰۰ نفر برسد.

تمرین ۱: با استفاده از نمودار $y=3^x$ نمودار $y=\log_3^x$ را رسم کنید همچنین مقدار تقریبی $3^{1/5}$ و $\log_3^2$ را از روی نمودارها پیدا بیابید.

تمرین ۲: نمودار $y=\log_{\frac{1}{2}}^x$ را رسم نموده و به روش انتقال نمودار هر یک از توابع زیر را بیابید:

۱) $y=2+\log_{\frac{1}{2}}^x$ ۲) $y=-2+\log_{\frac{1}{2}}^x$ ۳) $y=-\log_{\frac{1}{2}}^x$

۴) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ ۵) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ ۶) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

۷) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+2$ ۸) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-2$ ۹) $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

۱۰) $y=-2\log_{\frac{1}{2}}^x$ ۱۱) $y=\frac{-1}{2}\log_{\frac{1}{2}}^x$ ۱۲) $y=2\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)-1$

تمرین ۳: در یک زلزله که در آن اتفاق افتاد حدود $10^{23/2}$ ارگ انرژی آزاد شد شدت این زلزله در مقیاس ریشتر را حساب کنید.

تمرین ۴: شدت زمین لرزه‌ای ۶/۸ ریشتر گزارش شده است، میزان انرژی آزاد شده در این زلزله را برحسب ارگ بدست آورید.

تمرین ۵: اگر غلظت یون هیدرونیوم در یک محلول ۰/۰۰۱ مول بر لیتر باشد، PH این محلول را بدست آورید.

تمرین ۶: PH یک محلول برابر ۱۰ می باشد، غلظت یون هیدرونیوم این محلول را محاسبه کنید.

تمرین ۷: مقدار غلظت یون هیدرونیوم در یک محلول برابر ۰/۰۰۰۰۰۱ می‌باشد، PH این محلول را بیابید.

تمرین ۸: در یک نوع کشت، تعداد ۲۰۰۰ باکتری وجود دارد و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری بدست می‌آید که در آن $f(t)=2000\,e^{0/3t}$. چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟ ($\ln 5 \simeq 1/62$)

تمرین ۹: قیمت فروش یک وسیله، t سال پس از خرید، $f(t)$ تومان است. اگر بدانیم $f(t)=1200+8000\,e^{-0/25t}$ ، چند سال پس از خرید، قیمت فروش این وسیله ۲۰۰۰ تومان می‌شود؟ ($\ln 0/1 \simeq -2/4$)

تمرین ۱۰: کارایی کارگر عادی در یک کارخانه با تابع $f(t)=100-80\,e^{-0/24t}$ داده می‌شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال، می‌تواند روزانه $f(t)$ واحد کار را کامل کند، بعد از چند ماه تجربه‌ی کاری، انتظار می‌رود که کارگر روزانه ۶۰ واحد را کامل کند؟ ($\ln 0/5 \simeq -0/69$)

تمرین ۱۱: جمعیت یک شهر در حال کاهش می‌باشد اگر جمعیت این شهر پس از t سال از رابطه‌ی $f(t)=20000-6000\,e^{0/35t}$ بدست آید پس از چند سال جمعیت این شهر به ۸۰۰۰ نفر می‌رسد؟ ($\ln 2 \simeq 0/693$)

تمرین ۱۲: هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه‌گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد چند سال طول می‌کشد تا سرمایه‌ای، ۳ برابر شود؟ چند سال طول می‌کشد تا سرمایه‌ای چهار برابر شود؟ (محاسبه کنید) ($\ln 3 \simeq 1/04$ و $\ln 4 \simeq 1/4$)

«پیروز و سربلند باشید» خالقی