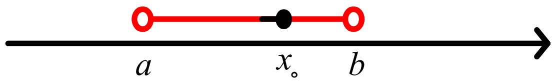
فصل ششم

حد و پیوستگی

همسایگی :

فرض کنید $x_\circ$ یک عدد حقیقی باشد . هربازه باز شامل $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می گویند .



به نقطه $x_\circ$ نقطه درونی این همسایگی گویند .

بنابراین اگر $x_\circ \in (a,b)$ باشد ، بازه (a,b) یک همسایگی $x_\circ$ گفته و $x_\circ$ نقطه درونی این بازه است .

مثال :

بازه های $(-۳,۴)$ و $(۱/۹,۲/۱)$ و $(۰,۵)$ و $(-۱,۳)$ همگی همسایگی عدد ۲ هستند .

مثال۱ :

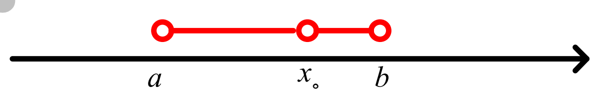
چند همسایگی برای عدد -۳ بنویسید.

مثال۲ :

حدود m را طوری بیابید که بازه $(۲m-۲,۴m+۲)$ یک همسایگی عدد ۶ باشد .

همسایگی محذوف :

اگر نقطه $x_\circ$ را از بازه ی (a,b) حذف کنیم . به مجموعه $(a,b)-\{x_\circ\}$ یک همسایگی محذوف $x_\circ$ گویند .



مثال۳ :

بازه $(۲,۵)-\{۴\}$ یک همسایگی محذوف عدد ۴ است .

مثال۴ :

اگر $(۳,n-۲m)\cup(۴n+۱,۸)$ یک همسایگی محذوف ۵ باشد . مقدار m و n را بیابید.

توجه :

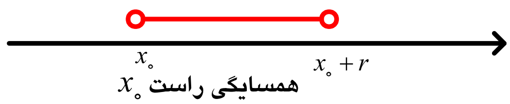
۱- مجموعه جواب نامعادله $|x-x_\circ|<k$ یک همسایگی $x_\circ$ است .

۲- همسایگی های محذوف $x_\circ$ را به صورت های زیر نمایش می دهند .

الف) $(a,x_\circ)\cup(x_\circ,b)$ ب) $(a,b)-\{x_\circ\}$ ج) $۰<|x-x_\circ|<k$

همسایگی راست و همسایگی چپ :

فرض کنید $x_\circ$ و $r > \circ$ دو عدد حقیقی باشند . در این صورت بازه $(x_\circ , x_\circ + r)$ را همسایگی راست $x_\circ$ و بازه $(x_\circ - r , x_\circ)$ را همسایگی چپ $x_\circ$ می نامند .



مثال۵ :

نمودار تابعی رسم کنید که در همسایگی چپ $x = ۳$ تعریف شده ولی در همسایگی راست و نیز خود $x = ۳$ تعریف نشده باشد .

مثال۶ :

نمودار تابعی رسم کنید که در همسایگی راست $x = -۱$ وهم در خود $x = -۱$ تعریف شده باشد ولی همسایگی چپ تعریف نشده باشد .

مثال۷ :

نمودار تابعی رسم کنید که فقط در همسایگی $x = ۲$ وهم در خود $x = ۲$ تعریف شده باشد .

مثال۸ :

تابع $f(x) = \dfrac{x+۳}{۲x+۴}$ در همسایگی چه نقاطی تعریف شده است؟در چه نقطه ای تعریف نشده است ؟

میل کردن (نزدیک شدن) :

فرض کنید که $x_{\circ}$ یک عدد حقیقی و x یک متغیر باشد . منظور از میل کردن یا نزدیک شدن x به $x_{\circ}$ که باعلامت $x \to x_{\circ}$ نمایش می دهند . این است که فاصله x از $x_{\circ}$ از هر عدد حقیقی مثبتی کم و کم تر می شود . یا به عبارت $|x - x_{\circ}| \to \circ$.

میل کردن از راست :

گوئیم x از سمت راست به $x_{\circ}$ میل می کند و می نویسند $x \to x_{\circ}^{+}$، هرگاه x از سمت مقادیر بیشتر از $x_{\circ}$ به آن میل کند .

میل کردن ازچپ :

گوئیم x از سمت چپ به $x_{\circ}$ میل می کند و می نویسند $x \to x_{\circ}^{-}$، هرگاه x از سمت مقادیر کمتر از $x_{\circ}$ به آن میل کند .

مثال۹ :

در هر مورد ، دنباله اعداد داده شده به چه عددی نزدیک می شود؟

الف) ۲/۱ , ۲/۰۱ , ۲/۰۰۱ , ۲/۰۰۰۱ , ...

ب) ۱/۹ , ۱/۹۹ , ۱/۹۹۹ , ۱/۹۹۹۹ , ...

مفهوم حد:

این بحث را با یک مثال آغاز می کنیم .

تابع $f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۱}{x - ۱}$ را در نظر بگیرید . می خواهیم ببینیم وقتی $x \to ۱$ میل می کند . $f(x)$ چه رفتاری دارد یا به عبارت به چه عددی میل می کند؟

دامنه این تابع $R - \{۱\}$ است . میخواهم رفتار تابع در همسایگی محذوف $x = ۱$ ببینیم .

با دادن مقادیر مختلف به عدد $x = ۱$ نزدیک و نزدیک تر می شویم و مقادیر تابع $f(x)$ را محاسبه می کنیم .

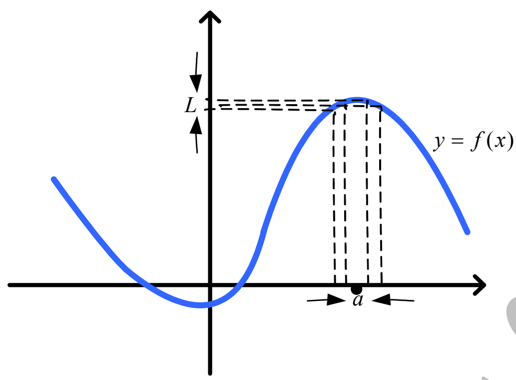
x	...	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	...					...	تعریف نشده	...			

با توجه به این جدول :

اگر x به عدد یک نزدیک شود $f(x)$ به عدد .... نزدیک می شودو این یعنی وقتی x به عدد یک نزدیک شود حد تابع $f(x)$ برابر با .... می باشد و به صورت $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) =$ می نویسند.

تعریف حد :

فرض کنید $y=f(x)$ در همسایگی a (همسایگی راست و همسایگی چپ) یا همسایگی محذوف a تعریف شده باشد .
می گوئیم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند برابر عدد حقیقی L است ، هرگاه $x \to a$ می کند $f(x)$ به
عدد حقیقی L نزدیک و نزدیک تر شود و می نویسند : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. به L حد تابع f در نقطه $x_\circ$ گویند .



مثال ۱۰:

با تکمیل جدول های زیر ، حد هر تابع را در نقطه ی داده شده به دست آورید .

الف) $f(x)=۲x-۵$

x	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	→	−۱	←	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹
$f(x)$				→	?	←			

$\lim\limits_{x \to -۱} f(x) =$

ب) $f(x)=x^۲-۱$

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$				→	?	←			

$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) =$

ج) $f(x)=\dfrac{x+۲}{۲x+۱}$

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				→	?	←			

$\lim\limits_{x \to ۱} f(x) =$

مثال ۱۱:

تابع ثابت $f(x)=3$ را در نظر بگیرید . حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را با استفاده از جدول زیر محاسبه کنید . چه نتیجه ای می گیرید؟

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$	۱	$\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$

نتیجه :

فرض کنید $f(x)=C$ ($C\in R$) تابع ثابت باشد. در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$

مثال ۱۲ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

ج) $\lim\limits_{x\to -1}(\sqrt{5}-3)=$ ب) $\lim\limits_{x\to 1} 10\sqrt{2}=$ الف) $\lim\limits_{x\to 0} 5=$

مثال ۱۳:

تابع همانی $f(x)=x$ را در نظر بگیرید . حاصل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را با استفاده از جدول زیر محاسبه کنید . چه نتیجه ای می گیرید؟

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$

نتیجه :

فرض کنید $f(x)=x$ تابع همانی باشد. در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$

مثال ۱۴ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

ج) $\lim\limits_{x\to -1} x=$ ب) $\lim\limits_{x\to 5} x=$ الف) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} x=$

قضایای حد :

فرض کنید $\lim_{x \to a} f(x) = L$ و $\lim_{x \to a} g(x) = M$ باشد در این صورت :

۱) $$\lim_{x \to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

مثال۱۵ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \to -۳}(x+۵) =$

ب) $\lim_{x \to -\frac{۱}{۲}}\left(x+\frac{۲}{۳}\right) =$

۲) $$\lim_{x \to a}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

مثال۱۶ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \to \frac{۳}{۲}}(x-۶) =$

ب) $\lim_{x \to -۳}(x-۴) =$

۳) $$\lim_{x \to a}\left(f(x)\times g(x)\right) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L \times M$$

مثال۱۷ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \to \frac{-۱}{۲}}(۴x+۵) =$

ب) $\lim_{x \to -۳}(۶x-۴) =$

۴) $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $\quad (M \neq 0)$

مثال۱۸ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

ب) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2x+5}{4x-3}\right)$

۵) $\lim\limits_{x \to a}(f(x))^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n = L^n$

مثال۱۹ :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} x^4 =$

ب) $\lim\limits_{x \to -2}(2x+3)^3 =$

ج) $\lim\limits_{x \to 3}(4x^2-5x+7) =$

نتیجه :

اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله ای باشد . داریم : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال۲۰ :

حاصل حد روبر را تعیین کنید . $\lim\limits_{x \to -2}(2x^3 - x^2 + 3x + 8) =$

قسمت های دیگر قضیه را بعد از مبحث حد چپ و حد راست ذکر می کنیم .

حد راست :

فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی راست a تعریف شده باشد . گوئیم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه a برابر با $L_۱$ است

هرگاه با نزدیک شدن x به a از راست ، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ نزدیک ونزدیک تر شود و می نویسند : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_۱$

حد چپ :

فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی چپ a تعریف شده باشد . گوئیم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه a برابر با $L_۲$ است

هرگاه با نزدیک شدن x به a از چپ ، مقادیر $f(x)$ به $L_۲$ نزدیک ونزدیک تر شود و می نویسند : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_۲$

نکته :

تابع $f(x)$ در نقطه ی a دارای حد است هرگاه :

۱- تابع در همسایگی راست و همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

۲- حد چپ و حد راست تابع در a موجود و مساوی باشند .

توجه :

از حدچپ و حدراست در محاسبه حد توابع چند ضابطه ای ، توابع شامل قدر مطلق ، جزء صحیح ، رادیکال ها با فرجه زوج و ... استفاده می شود .

مثال ۲۱ :

آیا $\lim\limits_{x \to ۰} \sqrt{x}$ موجود است ؟ چرا ؟

مثال۲۲ :

حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x+۱ & ,x > -۱ \\ x^۲ & ,x < -۱ \end{cases}$ را در نقطه $x = -۱$ محاسبه کنید . آیا تابع در $x = -۱$ حد دارد ؟

مثل۲۳ :

آیا تابع $f(x) = \sqrt{x^۳ - x^۲}$ در $x = ۰$ دارای حد است ؟ چرا ؟

مثال۲۴ :

حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x-۵ & , \quad x\neq ۱ \\ -۱ & , \quad x=۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ محاسبه کنید . آیا تابع در $x=۱$ حد دارد ؟

مثال۲۵ :

حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۲ & , \quad x<۲ \\ ۵x & , \quad x>۲ \end{cases}$ را در نقطه $x=۲$ محاسبه کنید . آیا تابع در $x=۲$ حد دارد ؟

مثال۲۶ :

درتابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۲a-۳ & , \quad x<-۱ \\ ۵x+b & , \quad x>-۱ \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to -۱^{+}} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to -۱^{-}} f(x)=۴$ باشد .

مثال۲۷ :

به ازای چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲a+۶ & , \quad x<-۱ \\ x^{۲}+a & , \quad x>-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ دارای حد است ؟

مثال۲۸ :

به ازای چه مجموعه مقادیری از a تابع $f(x)=\begin{cases}(x+a)^{۲} & , \quad x\geq -۱\\ ۲x+۱ & , \quad x<-۱\end{cases}$ در $x=-۱$ دارای حد است ؟

مثال۲۹ :

به ازای چه مجموعه مقادیری از a تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۲a+۳ & , \quad x\geq ۲\\ (x+۱)^{۲}+۲a & , \quad x<۲\end{cases}$ در $x=۲$ دارای حد است ؟

مثال۳۰ :

اگر تابع $f(x)$ در $x=۱$ دارای حد بوده و $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۳}+f(x)}{f(x)-۳x+۱}=\dfrac{۲}{۳}$ باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را محاسبه کنید .

مثال۳۱ :

اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=-۵$ باشد . حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(۳f(x)-۴x+g(x)\right)^{۲}=$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(\dfrac{f(x)-۳g(x)}{۳x^{۲}+۲g(x)}\right)=$

مثال ۳۲ :

نمودار تابعی را رسم کنید که درهمسایگی $x=1$ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی در $x=1$ تعریف نشده باشد .

مثال ۳۳ :

نمودار تابعی را رسم کنید که درهمسایگی $x=1$ و نیز خود $x=1$ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد و مقدار تابع باحد راست آن برابر باشد

اکنون قسمت های دیگر قضیه های حد را ذکر می کنیم .

حد توابع قدرمطلقی :

۶) $\boxed{\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|}$

مثال ۳۴ :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x \to -3} |2x-4| =$

ب) $\lim_{x \to 1} |4x^2-3x-6| =$

توجه :

درمحاسبه حدهایی راست و چپ که $x \to a$ میل می کند و $x=a$ ریشه عبارت درون قدرمطلق است از راه تعیین علامت ، عبارت قدرمطلق را تعیین علامت کرده و علامت قدر مطلق را حذف می کنیم .

مثال ۳۵ :

در تابع $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 6 & , \quad x=0 \end{cases}$ حد چپ . حد راست تابع را در $x=0$ محاسبه کنید . آیا تابع در $x=0$ حد دارد؟

حد توابع رادیکالی :

۷) $\boxed{\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}}$ $(n \in N \quad , \quad n > 1)$

توجه :

اگر n فرد باشد . مشکلی پیش نمی آید .

اگر n زوج باشد :

اولاً باید تابع در همسایگی محذوف $x = a$ تعریف شده باشد .(برای تشخیص همسایگی محذوف ، کافی است دامنه تابع را به دست آوریم .)

ثانیاً $L \geq 0$ باشد .

در غیر این صورت تابع در $x = a$ حد ندارد.

مثال۳۶:

حاصل حدهای زیر را در صورت وجود ، محاسبه کنید

الف) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} =$

ب) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 - x^2} =$

ج) $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^3 - x^2} =$

د) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x + 9} =$

هـ) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{4x^3 - 6x^2 - 3x + 1} =$

و) $\lim_{x \to 4} \sqrt{4 - x} =$

ز) $\lim_{x \to 4} \frac{4x + 1}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x + 5}}{2x - 1}$

حد توابع مثلثاتی :

۸) $\boxed{\lim_{x \to a} Sin(f(x)) = Sin(L)}$ (a برحسب رادیان)

مثال۳۷ :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (2Sin2x - 1) =$

ب) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\frac{2Sin^2 2x - 1}{Sinx} \right) =$

۹) $\boxed{\lim_{x \to a} Cos(f(x)) = Cos(L)}$ (a برحسب رادیان)

مثال۳۸ :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (2Sin2x - Cos^2 x) =$

ب) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{2Sinx}{Sinx + Cosx} \right) =$

۱۰) $\boxed{\lim_{x \to a} \tan(f(x)) = \tan(L)}$ ($L \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $k \in Z$ و a برحسب رادیان)

مثال ۳۹ :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} (\tan x + \sqrt{2}Sinx) =$

ب) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (\tan x - 2Cosx) =$

۱۰) $\boxed{\lim_{x \to a} Cot\left(f(x)\right) = Cot\left(L\right)}$ ($L \neq k\pi$ و $k \in Z$ و a برحسب رادیان)

مثال ۴۰ :

حاصل حد زیر را حساب کنید .

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{Sinx + Cosx}{\tan^{2} x + 3Cotx} =$$

محاسبه حد ازروی نمودارتابع :

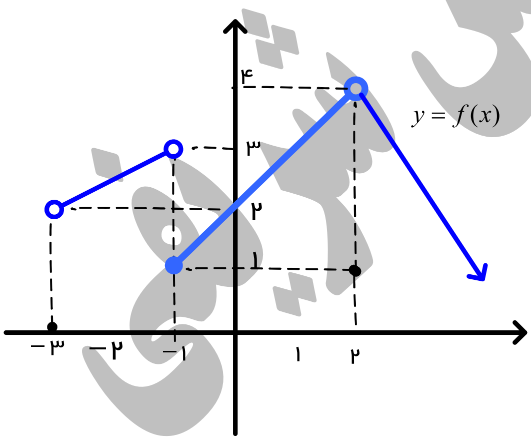
برای محاسبه حد تابع $y = f(x)$ در نقطه به طول $x = a$ از روی نمودار کافی است حد چپ و حد راست را در این نقطه جدا گانه محاسبه کنیم.

برای محاسبه حد راست در $x = a$ ، باید ببینم عرض تابع وقتی x از سمت راست به a میل می کند ، روی محور y ها به چه عددی نزدیک می شود ؟

و همچنین برای محاسبه حد چپ در $x = a$ ، باید ببینم عرض تابع وقتی x از سمت چپ به a میل می کند ، روی محور y ها به چه عددی نزدیک می شود ؟

مثال ۴۱ :

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ پاسخ دهید .



الف) $f(-1) =$

ب) $\lim_{x \to (-1)^{+}} f(x) =$

ج) $\lim_{x \to (-1)^{-}} f(x) =$

د) $\lim_{x \to (-1)} f(x) =$

هـ) $\lim_{x \to 2^{+}} f(x) =$

و) $\lim_{x \to 2^{-}} f(x) =$

ز) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

ح) $\lim_{x \to (-2)} f(x) =$

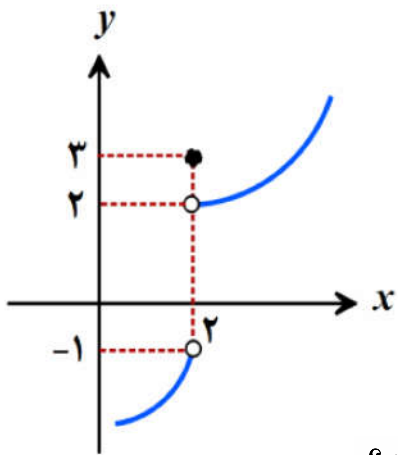
ی) $\lim_{x \to 2^{+}} f(3x - 7) =$

م) $\lim_{x \to 1^{+}} f(-\frac{1}{x}) =$

مثال۴۲ :

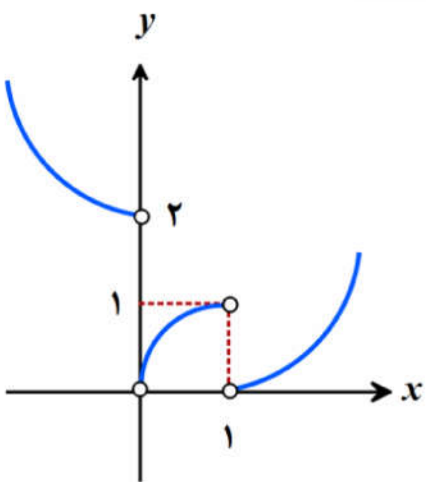
با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ پاسخ دهید .

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) + \lim_{x\to ۲^-} f(x) + f(۲) =$$



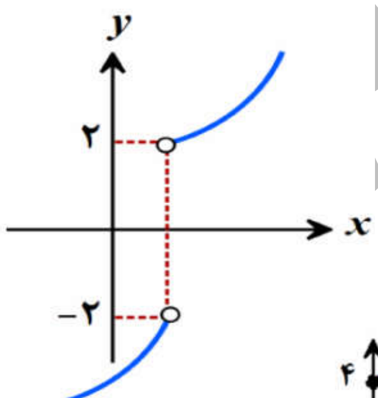
مثال ۴۳:

اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x\to ۰^+} f(۱-۲x)$ کدام است؟



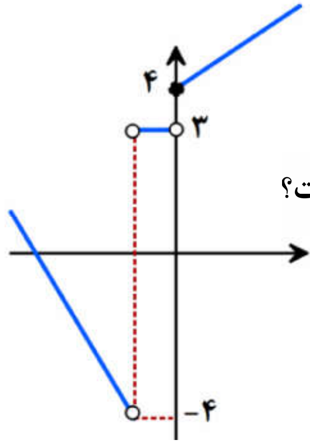
مثال ۴۴ :

با توجه به شکل زیر $\lim_{x\to ۱^+} f(\frac{۱}{x})$ کدام است؟



مثال ۴۵ :

با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to (-۲)^-} f(۴-x^۲) + \lim_{x\to ۰^-} f(x^۲)$ کدام است؟



حد توابع شامل جزء صحیح :

برای محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح ، ابتدا تکلیف جزء صحیح را تعیین نموده سپس حد گیری راانجام دهید .

مثال۴۶ :

تابع $f(x)=[x]$ را در نظر بگیرید .

الف) حاصل $\lim_{x\to ۲} f(x)$ را در صورت وجود بیابید .

ب) حاصل $\lim_{x\to ۲/۵} f(x)$ را در صورت وجود بیابید .

ج) از « الف » و « ب » چه نتیجه ای می گیرید ؟

نتیجه :

فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد . در این صورت :

الف) اگر $L\notin Z$. آن گاه $\lim_{x\to a}[f(x)]=[L]$

ب) اگر $L\in Z$ باشد . برای محاسبه $\lim_{x\to a}[f(x)]$ باید حد چپ و حد راست را جداگانه حساب کنیم .

مثال۴۷ :

حاصل حد زیر را در صورت وجود ، حساب کنید

الف) $\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-۱)[x]=$

ب) $\lim_{x\to ۰}\frac{[x]}{x+۱}$

ج) $\lim_{x\to ۰}\frac{[۳x^{۲}]}{x}=$

د) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right] =$

هـ) $\lim\limits_{x \to 6} \left(\left[\frac{x}{2}\right] + \left[-\frac{x}{3}\right]\right) =$

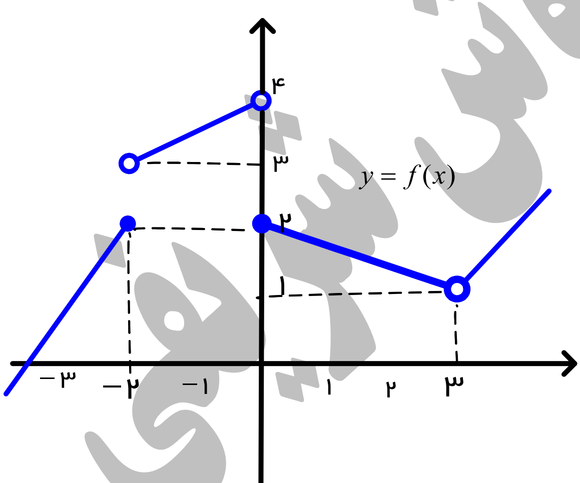
و) $\lim\limits_{x \to 0} \left([x^2] + x - 1\right) =$

مثال ۴۸:

در تابع $f(x) = a\left[-\frac{x}{2}+1\right] + [2x]$ مقدار a را طوری بیابید که در $x=2$ حد داشته باشد .

مثال ۴۹ :

با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ پاسخ دهید .



الف) $f(0) =$

ب) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) =$

ج) $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) =$

د) $\lim\limits_{x \to (-2)} f(x) =$

هـ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

و) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2 - 2) =$

ز) $\lim\limits_{x \to 0^+} f([x]) =$

ح) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} [f(x)] =$

م) $\left[\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)\right] =$

مثال ۵۰ :

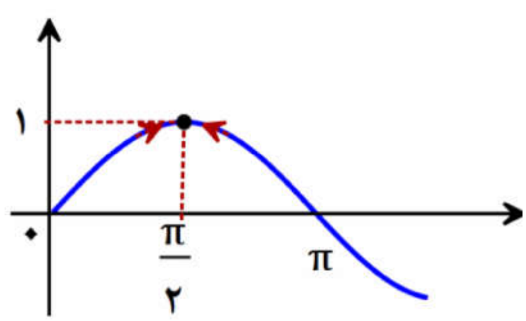
اگر $f(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\sqrt{x}\right]$ باشد، مجموع حد چپ و راست تابع f در $x=۲$ کدام است؟

مثال ۵۱ :

حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|-[x]}{۲|x|+[x]}$ را بیابید.

مثال ۵۲ :

حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}[\sin x]$ کدام است؟



مثال ۵۳ :

حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{[\sin x]+x}{[\cos x]+۲x}$ کدام است؟ (x بر حسب رادیان است .)

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$ (مبهم)) :

در این قسمت به محاسبه حد کسرهایی می پردازیم که حد صورت و حد مخرج همزمان صفر می شود . ابتدا نکته زیر را یادآوری می کنیم

« اگر $x=a$ یک صفر تابع چند جمله ای $f(x)$ باشد . در این صورت $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است . »

از این ویژگی برای تجزیه چند جمله ای ها و پیدا کردن عامل صفر شونده استفاده می کنیم .

در همه این کسرها ، ابتدا بادی عبارتهای شامل جزء صحیح و نیز قدرمطلقی را ساده نمود . سپس رفع ابهام کرد .

برای رفع ابهام ، این کسرها را به چند دسته تقسیم می کنیم که پایه یازدهم فقط با حدهای مبهم توابع گویا آشنا می شویم

۱- توابع گویا :

برای محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ **که** $\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$ **و** $f(x)$ **و** $g(x)$ **توابعی چند جمله ای هستند .**

ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه نموده و ساده می کنیم ، سپس حد گیری را انجام می دهیم .

برای تجزیه می توان صورت و مخرج را بر $x-a$ **تقسیم کرد .**

توجه : هرگاه بدانیم $x=k$ **یک ریشه عبارت** ax^2+bx+c **باشد . می توان آن را به شکل زیر تجزیه کرد:**

$$ax^2+bx+c=(x-k)(ax-\frac{c}{k})$$

مثال۵۴ :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^3+3x+14}=$

ج) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x^2-x-2}=$

د) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4-4x+4}{2x^2+x-3}=$

هـ) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{2n}-1}{x^n-1}=$

مثال۵۵ :

اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{ax+b}{x^{۲}-۴} = ۳$ باشد . مقدار a و b را بیابید .

۲– توابع رادیکالی :

برای محاسبه $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ که $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ۰ = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ و $f(x)$ یا $g(x)$ یا هر دو توابعی رادیکالی هستند .

ابتداو مخرج کسر را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کرده و ساده می کنیم . سپس حد گیری را انجام می دهیم .

(مزدوج عبارت $a-b$ ، عبارت $a+b$ است و برعکس .)

برای مزدوج عبارت ها از اتحادهای زیر استفاده می کنیم :

اتحاد مزدوج : $(a-b)(a+b) = a^{۲} - b^{۲}$

اتحاد چاق و لاغر $\begin{cases} (a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲}) = a^{۳} - b^{۳} \\ (a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲}) = a^{۳} + b^{۳} \end{cases}$

توجه :

در بعضی از مواقع می توان از تغییر متغیر برای محاسبه حد اینگونه توابع استفاده کرد.

مثال۵۶ :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^{۲}-۱۶} =$

ب) $\lim\limits_{x \to ۰^{+}} \dfrac{x}{\sqrt{x}} =$

ج) $\lim\limits_{x \to -۳} \dfrac{x^{۲}-x-۱۲}{x+\sqrt{x+۱۲}} =$

د) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{x+۵}-۳} =$

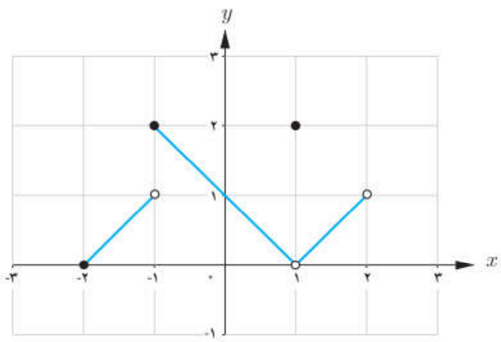
هـ) $\lim\limits_{x \to -۸} \dfrac{\sqrt[۳]{x}+۲}{۲x-۱۶} =$

و) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\sqrt[۳]{x}-\sqrt{x}}{x-۱} =$

ز) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{۲x-۵\sqrt{x}+۳}{x-۱} =$

تمرین

۱ برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ ب) $f(1)=2$

پ) $f(2)=1$ ت) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=0$

ث) $\lim_{x\to -1} f(x)=2$ ج) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

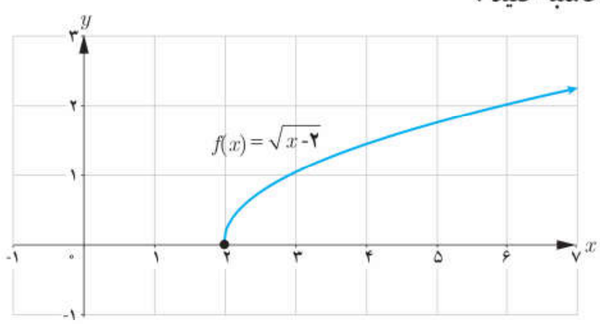
چ) $\lim_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد. ح) $\lim_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد.

۲ مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱− باشد.

۳ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(3)=1$.

۴ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x\to 2} f(x)=4$.

۵ دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :



الف) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x\to 2} f(x)$ ت) $f(2)$

۶ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۷ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

$f(x)=2x+1$ ، $g(x)=2x+1 \quad (x\neq 2)$ ، $h(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$

الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید :

$\lim_{x\to 2} h(x)$ ، $\lim_{x\to 2} g(x)$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)$

۸ آیا حد تابع زیر در $x=2$ موجود است؟

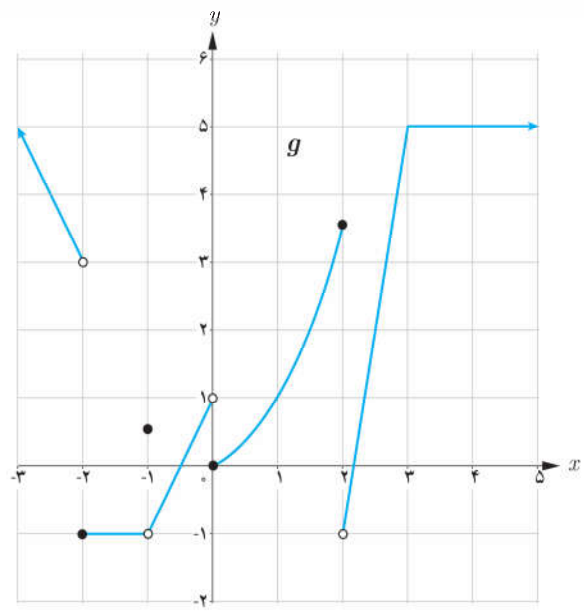
$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

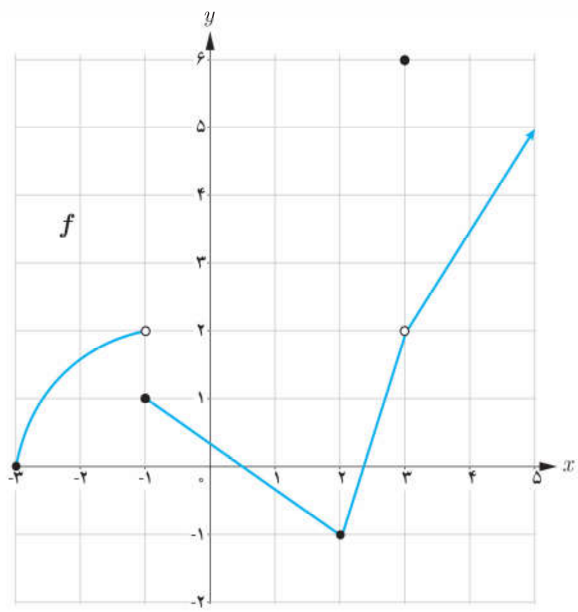
۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

۱۰ اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود است؟

تمرین

۱) با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\big(f(x)+g(x)\big)$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱}\big(f(x)+g(x)\big)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\big(۲f(x)+۵g(x)\big)$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰}\big(f(x)\big)^{۴}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰}\big(g(x)\big)^{۲}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

د) $\lim\limits_{x\to ۵}\big(f(x).g(x)\big)$

۲) دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۳) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۷}(-۳)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۲x-۷)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱}(۳x^{۲}-۴x+۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}-۹}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲x^{۲}-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۳}+۸}{x+۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲}[x]$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\sqrt{x}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۷}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\sqrt{x}$

ذ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}$

ر) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\dfrac{x-۲}{[x]+۱}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^{+}}\dfrac{x}{[x]}$

ص) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۲}+x-۶}{x^{۲}-۶x+۸}$

ض) $\lim\limits_{x\to ۰}(x+[x])$

پیوستگی :

تابع f را در نقطه $x=a$ پیوسته گویند هرگاه :

۱- مقدار $f(a)$ موجود باشد .

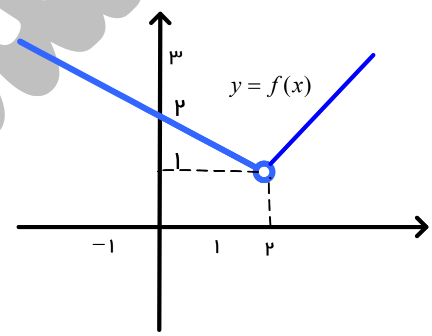
۲- تابع در $x=a$ حدا داشته باشد . (حد چپ و حد راست در $x=a$ موجود و مساوی باشند .)

۳- مقدار تابع و حد تابع در این نقطه برابر باشند . به عبارتی : $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

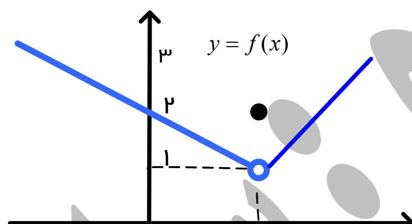
مثال۵۷ :

در کدام یک از شکل های زیر تابع $y=f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است؟

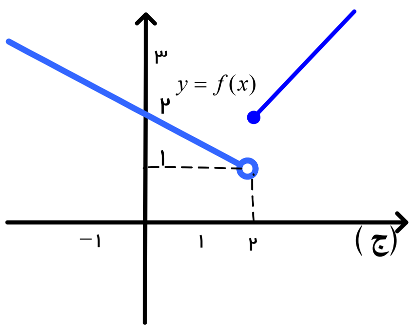
(الف)



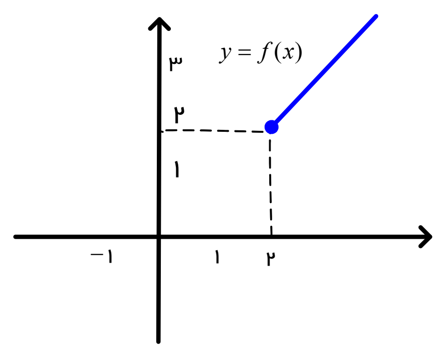
(ب)



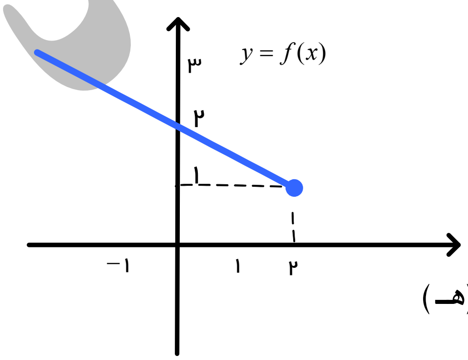
(ج)



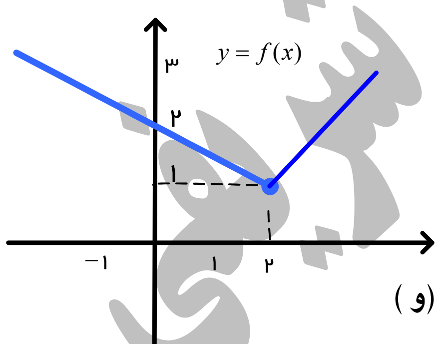
(د)



(هـ)



(و)



مثال۵۸ :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & , \quad x<۱ \\ ۵x-۱ & , \quad x>۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید .

مثال ۵۹ :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & , \quad x<-۱ \\ -۲ & , \quad x=-۱ \\ -۲x & , \quad x>-۱ \end{cases}$ را در $x=-۱$ بررسی کنید .

مثال ۶۰ :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+۲x & , \quad x>۲ \\ ۶ & , \quad x=۲ \\ x^۲-۱ & , \quad x<۲ \end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید .

مثال ۶۱ :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۴}{x+۲} & , \quad x>-۲ \\ -۴ & , \quad x=-۲ \\ ۲x & , \quad x<-۲ \end{cases}$ را در $x=-۲$ بررسی کنید .

مثال ۶۲ :

پیوستگی تابع $f(x)=۳x^۲-۲x+۵$ را در $x=۱$ بررسی کنید .

نتیجه :

برای پیوسته بودن تابع f در $x=a$ باید تساوی های زیر برقرار باشند .

$$\boxed{f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)}$$

مثال۶۳ :

مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{3}+1}{x^{2}-1} & , \quad x\neq -1\\ 2a+1 & , \quad x=-1\end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته باشد .

مثال۶۴ :

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^{2}-12}{x-2} & , \quad x<2\\ ax+3 & , \quad x=2\\ a[-x]+bx & , \quad x>2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد .

پیوستگی راست :

فرض کنید تابع f در همسایگی راست a تعریف شده باشد . تابع f را در $x=a$ از راست پیوسته گویند هرگاه : $\boxed{f(a)=\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)}$

پیوستگی چپ :

فرض کنید تابع f در همسایگی چپ a تعریف شده باشد . تابع f را در $x=a$ از چپ پیوسته گویند هرگاه : $\boxed{f(a)=\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)}$

مثال :

پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رادر $x=0$ بررسی کنید .

مثال۶۵ :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{x^{2}-2x+1}}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ 0 & , \quad x=1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید .

مثال۶۶ :

پیوستگی تابع $f(x)=[x^۲]-[x]+۱$ را در $x=-۱$ بررسی کنید .

مثال۶۷ :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & , \quad x<۲ \\ ۳ & , \quad x=۲ \\ \sqrt{۲x+۵} & , \quad x>۲ \end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید .

مثال۶۸ :

اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a[۴x]-b & , \quad x<۱ \\ ۱ & , \quad x=۱ \\ aSin(\frac{\pi}{۲}x)+b & , \quad x>۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد . مقدار a و b را به دست آورید .

مثال۶۹ :

اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x-۲} & , \quad x<۲ \\ ۲a-۳ & , \quad x=۲ \\ [-x]-۳ & , \quad x>۲ \end{cases}$ در نقطه ای به طول $x=۲$ پیوستگی چپ داشته باشد مقدار a را طوری به دست آورید .

توجه:

اگر تابع $y=f(x)$ در $x=a$ دارای حد باشد ولی در $x=a$ تعریف نشده باشد ، می توان با اختصاص مقداری به $f(a)$ ، تابع $y=f(x)$ را به یک تابع پیوسته تبدیل کرد که اصطلاحاً می گویند **ناپیوستگی قابل رفع شدن** است .

که مقدار $f(a)$ باید با $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ برابر باشد ..

مثال ۷۰ :

درتابع $f(x)=\dfrac{4x^2-4}{x^2-3x+2}$ مقدار $f(1)$ را طوری تعریف کنید که تابع در $x=1$ پیوسته باشد .

پیوستگی در بازه باز (a,b) :

تابع $y=f(x)$ در بازه (a,b) پیوسته است هرگاه در هر نقطه درون بازه پیوسته باشد .

مثال ۷۱ :

تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ در بازه $(-1,2)$ پیوسته نیست زیرا در $x=0$ پیوسته نیست و $0\in(-1,2)$ است .

مثال ۷۲ :

تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی از بازه $(-2,3)$ پیوسته نیست ؟

پیوستگی در بازه بسته $[a,b]$:

تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است هرگاه :

۱- در بازه (a,b) پیوسته باشد .

۲- در $x=a$ از راست پیوسته و در $x=b$ از چپ پیوسته باشد .

تابع $y=f(x)$ ممکن است در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ولی در تمام نقاط این بازه ، مخصوصا a و b پیوسته نباشد .

به همین شیوه پیوستگی در بازه های $[a,b)$ و $(a,b]$ و $[a,+\infty)$ و $(-\infty,b]$ تعریف می شود .

مثال ۷۳ :

آیا تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در باز ه $[0,9]$ پیوسته است ؟ چرا ؟

قضایای پیوستگی :

۱- اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند ، آن گاه $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ و kf و kg ($k\in R$) در $x=a$ پیوسته هستند.

تابع $\frac{f}{g}$ هم به شرطی که $g(a)\neq 0$ باشد در $x=a$ پیوسته است .

۲- اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد ولی g در $x=a$ پیوسته نباشد ، آن گاه $f+g$ و $f-g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ پیوسته نیستند.

توابع $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است پیوسته باشند .

مثال۷۴ :

تابع $f(x)=x-3$ و $g(x)=[x]$ را در نظر بگیرید .

الف) پیوستگی این توابع را در $x=3$ بررسی کنید .

ب) پیوستگی تابع $h(x)=f(x).g(x)$ را در $x=3$ بررسی کنید .

توجه :

اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند ، در این صورت تابع $h(x)=f(x).[g(x)]$ ممکن است در $x=a$ پیوسته باشد یا نباشد.

۳- اگر تابع f در $x=a$ پیوسته و تابع g در $f(a)$ باشد آن گاه تابع gof در $x=a$ پیوسته است .

همچنین اگر تابع g در $x=a$ پیوسته و تابع f در $g(a)$ باشد آن گاه تابع fog در $x=a$ پیوسته است .

دامنه پیوستگی :

۱- توابع چند جمله ای :

هر تابع چند جمله ای با دامنه R ، روی R پیوسته اند .

۲- توابع گویای $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ($f(x)$ و $g(x)$ چند جمله ای هستند .)

این توابع در $R-\{x\in R|g(x)=0\}$ پیوسته ودر $\{x\in R|g(x)=0\}$ ناپیوسته اند .

۳- توابع رادیکالی :

هر گاه $f(x)$ تابعی چند جمله ای باشد تابع رادیکالی مانند $y=\sqrt[n]{f(x)}$ در هر $I\subseteq D_y$ پیوسته است .

توجه :

برای nهای طبیعی زوج باید $f(x)$ در بازه I نامنفی باشد .

همچنین وقتی n طبیعی زوج است تابع $y=\sqrt[n]{f(x)}$ در تک نقطه ها پیوسته نیست .

۴–توابع مثلثاتی:

توابع مثلثاتی $y = Sin(x)$ و $y = Cos(x)$ در R پیوسته هستند و تابع $y = \tan(x)$

در $\left\{x \in R \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\}$ و تابع $y = Cot(x)$ در $\{x \in R | x \neq k\pi\}$ پیوسته اند .

۵- پیوستگی توابع چند ضابطه ای مانند $y = \begin{cases} f(x) & , \quad x \geq a \\ g(x) & , \quad x < a \end{cases}$ یا $y = \begin{cases} f(x) & , \quad x = a \\ g(x) & , \quad x \neq a \end{cases}$:

برای بررسی پیوستگی اینگونه توابع در $x = a$ پیوستگی بررسی می شود

یا در نقاطی که هریک از ضابطه ها با توجه به دامنه تعریف خود در آن نقاط ناپیوسته است .

توجه :

برای بررسی پیوستگی تابعی مانند $y = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in Z \\ g(x) & , \quad x \notin Z \end{cases}$ ، حد تابع وقتی $x \to a$ را از ضابطه ای که $x \notin Z$ محاسبه می کنیم

ولی محاسبه مقدار تابع ، بستگی به مقدار a داده شده دارد که صحیح است یا غیر صحیح .

برای بررسی پیوستگی تابعی مانند $y = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in Q \\ g(x) & , \quad x \notin Q \end{cases}$ ، حد تابع وقتی $x \to a$ را از هردو ضابطه ای محاسبه می کنیم

این تابع در نقاطی $f(x) = g(x)$ باشد پیوسته است .

مثال۷۵ : تابع $y = \begin{cases} ۲x + ۴ & , \quad x \in Q \\ x^۲ - x & , \quad x \notin Q \end{cases}$ در چه نقاطی پیوسته است ؟

مثال۷۶ :

دامنه پیوستگی توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

ب) $g(x) = \sqrt{(x^۳ - x^۲)(۳ - x)}$

ج) $y = \frac{۳}{۲x - ۲} + \frac{۱}{x}$

د) $y = \frac{۴x - ۱}{۲x^۲ + ۳x - ۵}$

هـ) $y = \log^{(۲-x)}$

ز) $y = Sin(۲x^۳ + ۱)$

مثال۷۷ :

تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+2x+1 & , \quad x\geq 0\\ x^2+1 & , \quad x<0\end{cases}$ در چه نقاطی از بازه $(-4,10)$ ناپیوسته است ؟

مثال ۷۸ :

حدود m را طوری بیابید که تابع $y=\dfrac{4x}{x^2+3x+\frac{1}{2}m-1}$ در R پیوسته باشد .

مثال۷۹ :

تابع $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+4}}{1+\sqrt[3]{x+1}}+\dfrac{1}{x+5}$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

مثال۸۰ :

به ازای چه مقادیری از a تابع $y=2x+\sqrt{ax^2-4x-3}$ روی R پیوسته است ؟

مثال۸۱ :

تابع $y=[x^2]$ در چه نقاطی از بازه $(-1,3)$ ناپیوسته است؟

تمرین :

۱– اگر بازه $(x-۲,۳x-۱)$ یک همسایگی محذوف عدد ۱ باشد . حدود x را بیابید.

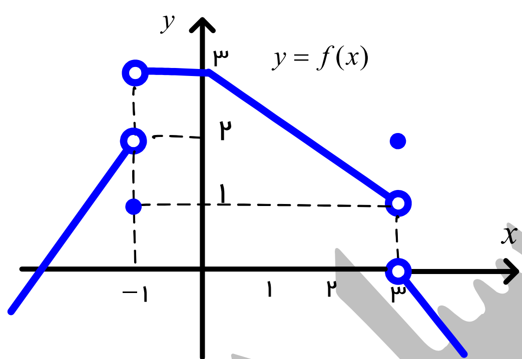
۲– تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ را در نظر بگیرید .

الف) دامنه تابع را به دست آورید .

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است ؟

ج) آیا تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است ؟ در همسایگی ۱ – چطور؟ در همسایگی ۱ چطور؟

۳– با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ پاسخ دهید .



الف) $f(-۱)=$

ب) $f(۳)=$

ج) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$

هـ) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x)$

و) $\lim\limits_{x\to۲} f(x)$

ز) $\lim\limits_{x\to۱} f(x)$

ح) $\lim\limits_{x\to۰^+} f(x^۲-۱)$

ک) $\lim\limits_{x\to۰^-} f(f(f(x)))$

م) $\lim\limits_{x\to۰^+} f(f(x))$

خ) $\lim\limits_{x\to۰^+} f(\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱})$

ق) $[\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)]$

ش) $\lim\limits_{x\to۳^+}[f(x)]$

ن) $\lim\limits_{x\to۰^-} f([x])$

۵- فرض کنید $\lim\limits_{x\to۲} f(x)=-۳$ و $\lim\limits_{x\to۲} g(x)=۵$ باشد . حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

ب) $\lim\limits_{x\to۲}\left(\dfrac{۳f(x)-g(x)}{g(x)-۳}\right)$

الف) $\lim\limits_{x\to۲}\sqrt{۴g(x)-f(x)+x}$

۶– اگر $f(۲x-۳)=\dfrac{۴x-۱}{۲x+۵}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to۴} f(x)$ را حساب کنید .

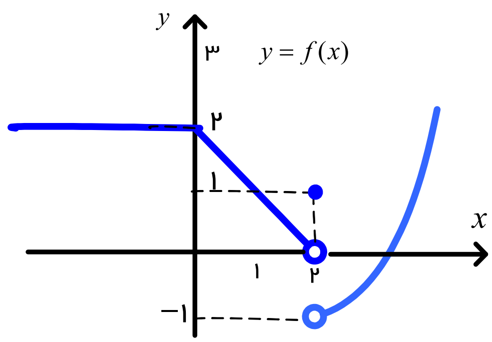
۷– اگر $f(x+\dfrac{۱}{x})=x^۲+\dfrac{۱}{x^۲}$ باشد . مقدار $f(۲)$ و حاصل $\lim\limits_{x\to۳} f(x)$ را حساب کنید .

۸– اگر $xf(x)+f(-x)=۲x-x^۳$ باشد . حاصل $\lim\limits_{x\to-۱} f(x)$ را به دست آورید .

۹– اگر تابع f در $x=۲$ حد داشته و $\lim\limits_{x\to۲}\dfrac{۲f(x)-۱}{f(x)-۲}=۵$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to۲}\dfrac{x+۶}{\sqrt{f(x)+۱}}$ را حساب کنید .

۱۰– اگر $f(۵-۳x)=\begin{cases} x^۲+۳ & , \quad x>۱ \\ ۱-x & , \quad x<۱ \end{cases}$ باشد . حاصل $\lim\limits_{x\to۰} f(۲-x^۲)$ را حساب کنید

۱۱– نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده است. به سئوالات زیر پاسخ دهید .



الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(f(x))$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(f(x))$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x^2-2x+3)$

د) $\lim\limits_{x\to 0} f(2-x^2)$

۱۲–نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x\in Z\\ 2 & , \quad x\notin Z\end{cases}$ را در فاصله $[-4,4]$ رسم کرده و سپس حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)$

۱۳ - به ازای چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-3 & , \quad x>1\\ x^3-3x+2a & , \quad x<1\end{cases}$ در $x=1$ دارای حد است ؟

۱۴- حاصل حد های زیر را در صورت وجود دست آورید .

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^3-3x+2}$

د) $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)\left[\dfrac{1}{x+1}\right]$

هـ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$

و) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{3x^2-x-10}$

ح) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2+3(x-2)}{x^2-4}$

ط) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{[x^2]}{x+1}\right]$

ی) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}$

ک) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x}-\dfrac{3x-4}{x^2-2x}\right)$

ل) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{\sqrt[3]{x}-1}$

م) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

ق) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$

ر) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-Sin^2x}{1-Sinx}$

۱۵- اگر $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^۳ - ۶x + ۵}{x^۲ + ax - b} = ۲$ باشد . مقدار a و b را بیابید.

۱۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^۲ + ۱}{x} & , \quad [x] > ۲ \\ x - ۱ & , \quad [x] \le ۲ \end{cases}$ در R دارای حد باشد. مقدار a را بیابید .

۱۷- پیوستگی تابع $f(x) = (-۱)^{[x]} Sin x\pi$ را در نقاط صحیح بررسی کنید .

۱۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + ۲^{x-۳} & , \quad x < ۳ \\ a\log_۲^{(x+۱)} & \quad x \ge ۳ \end{cases}$ در $x = ۳$ پیوسته است . مقدار $f(۲)$ را بیابید .

تمرین

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x) = ۲x + ۱ \quad , \quad g(x) = ۲x + ۱ \quad x \ne ۲ \quad , \quad h(x) = \begin{cases} ۲ + x & x \ne ۲ \\ ۳ & x = ۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید : $f(۲) =$, $g(۲) =$, $h(۲) =$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید : $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to ۲} g(x) =$ $\lim\limits_{x \to ۲} h(x) =$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x < ۲ \\ -۲ & x = ۲ \\ -x + ۲ & x > ۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۳ توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳} & x \ne ۳ \\ ۶ & x = ۳ \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=۳$ بررسی کنید.

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵ پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -۲x + ۲ & x \le ۰ \\ x^۲ + ۲ & x > ۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=۱$ مساوی ۱− باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.