limit & continuity

فصل ششم: حد و پیوستگی

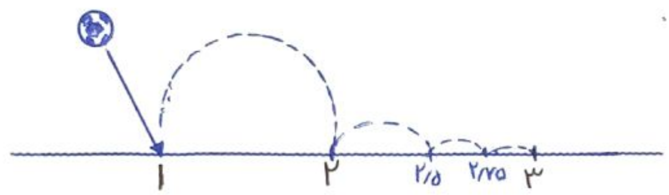
۱. فرآیندهای حدی ← جدول و نمودار
۲. محاسبه حد توابع ← تکنیک های حدگیری
۳. پیوستگی ← یکپارچگی

درس ۱. فرآیندهای حدی

رسالت حد: بررسی رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه

مفهوم شهودی حد:

یک توپ بسیار کوچک را مطابق شکل به زمین می‌زنیم به طوری که هر بار برخاستن از زمین به اندازه نصف مسافت قبلی در جهت افقی حرکت می‌کند. زمین را محور طول‌ها در نظر می‌گیریم.



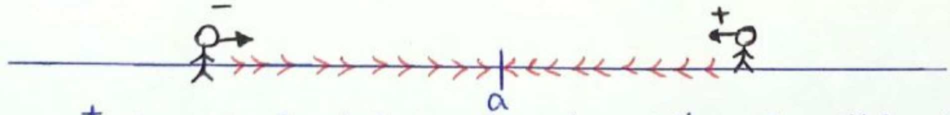
توپ را اولین بار در $x=1$ به زمین می‌زنیم و فرض می‌کنیم برای بار دوم در $x=2$ به زمین می‌خورد، سومین بار در $x=2/5$ و چهارمین بار در $x=2/75$ و ... به زمین می‌خورد.

این توپ از سمت چپ به $x=3$ نزدیک می‌شود. اگر انتزاعی فکر کنیم و توپ را یک نقطه فرض کنیم، طول‌های برخورد آن با زمین بسیار به ۳ نزدیک می‌شوند ولی به خود ۳ نمی‌رسند. این مفهوم حد است.

دقت کنید که در این آزمایش x فقط از چپ به ۳ نزدیک می‌شود در حالی که x می‌تواند از سمت راست هم به ۳ نزدیک شود.

مفهوم میل کردن:

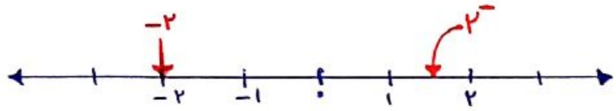
روی محور اعداد حقیقی از دو جناح چپ و جناح راست می‌توانیم به عدد مورد نظر a نزدیک و نزدیک و نزدیک و ... و نزدیک‌تر شویم.



میل کردن x به طرف a را با نماد $x\to a$ نشان می‌دهیم که این کار می‌تواند با مقادیر بیشتر از a یعنی $x\to a^+$ و با مقادیر کمتر از a یعنی $x\to a^-$ انجام داد.

- توجه کنید که تساوی $a^+=+a$ هیچگاه برقرار نیست زیرا $+a$ دقیقاً برابر a است در حالیکه a^+ یعنی یه خورده ریزه بیشتر از a. به طور مشابه $a^-\neq -a$.

مثال . $\bar{2} \neq -2$



رسالت حد:

بررسی رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه که ممکن است از چپ یا راست و یا هر دو طرف باشد.

تعریف حد چپ:

فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) تعریف شده باشد، می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه x_0 برابر L است هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x از چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شده باشد، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

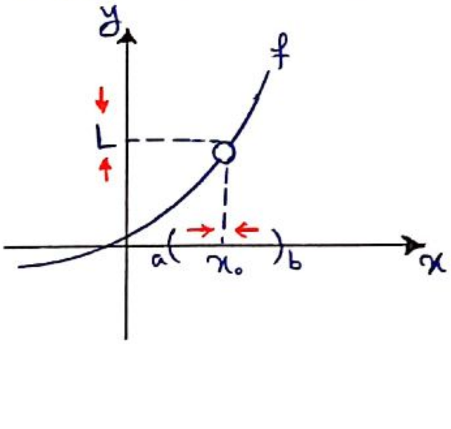
تعریف حد راست:

به طور مشابه برای بازهٔ (x_0, b) داریم

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

تعریف رسمی حد:

فرض کنید تابع f در تمام نقاط بازه $I=(a,b)$ (به جز احتمالاً در نقطه x_0 از این بازه) تعریف شده باشد، می‌گوییم هرگاه روی محور x ها از دو جانب چپ و راست به x_0 نزدیک شویم آنگاه $f(x)$ روی محور y ها به عدد L نزدیک شود، عدد L را حد تابع f در نقطه x_0 می‌نامیم و می‌نویسیم:



$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

حد تابع f در نزدیکی x_0 برابر L است.

تذکر.

۱. اگر تابع f در نقطه x_0 دارای حد چپ و راست برابر باشد آنگاه تابع در آن نقطه حد دارد و برعکس.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

۲. بدیهی است که چون x هرگز به x_0 نمی‌رسد بنابراین $f(x)$ هرگز! به عدد L نخواهد رسید اما هرچه روی محور افقی به عدد x_0 نزدیک و نزدیک‌تر شویم میزان نزدیکی $f(x)$ به L روی محور عمودی بیش‌تر خواهد بود.

تا می‌توانیم به x_0 نزدیک ... نزدیک ... می‌شویم.

۳. حد به معنای بهترین تقریب است. یعنی عدد L تابع f را در نزدیکی x_0 تقریب می‌زند

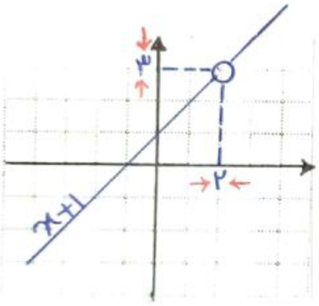
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

۴. حد یک تابع در یک نقطه از هیچ نظر، هیچگونه ارتباطی با مقدار تابع در آن نقطه ندارد، یعنی ممکن است در یک نقطه، تابع موجود باشد ولی حد تابع در آن نقطه موجود نباشد و یا اینکه تابع در یک نقطه موجود نباشد ولی حد تابع در آن نقطه موجود باشد.

یافتن حد تابع از روی جدول مقادیر و نمودار تابع:

از روی جدول مقادیر یک تابع و همچنین نمودار یک تابع می‌توان حد را حدس زد. برای این کار کافی است که در نزدیکی نقطه مورد نظر مقادیر تابع را به دست آورد و مدام به آن نقطه نزدیک‌تر شویم تا ببینیم برای مقادیر تابع چه اتفاقی می‌افتد.

مثال. به کمک جدول مقادیر و نمودار، حد تابع $f(x)=x+1$ را وقتی $x\to ۲$ به دست آورید.



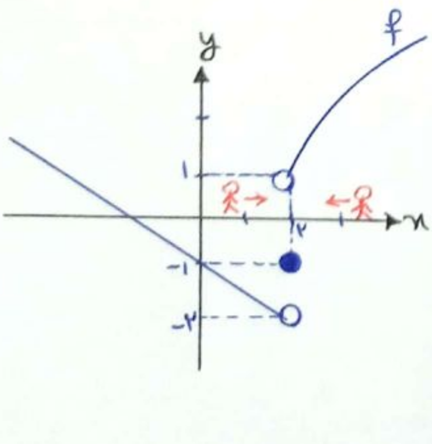
$$\lim_{x\to ۲}(x+1)=?$$

۱	۱/۱	۱/۵	۱/۷۵	۱/۹۹	$\boxed{۲}$	۲/۱	۲/۳	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۳
۲	۲/۱	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹۹	$\boxed{?}$	۳/۱	۳/۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۴

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲}(x+1)=۳$$

تمرین. با تکمیل جدول زیر، مقدار حد تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ ۲x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ به دست آورید. (نمودار f را نیز رسم کنید)

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\to 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱
$f(x)$			$\to ? \leftarrow$		



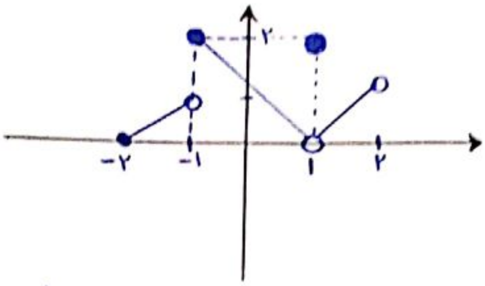
مثال. نمودار تابع f داده شده است. حاصل هر یک از حدود زیر را درصورت وجود تعیین کنید.

$$A=\lim_{x\to ۲^+} f(x) \qquad B=\lim_{x\to ۲^-} f(x) \qquad C=f(۲)$$

از روی نمودار واضح است که وقتی با مقادیر بیش‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شویم (جناح راست) نمودار به ۱ نزدیک می‌شود یعنی $A=1$. به طور مشابه $B=-۲$.

$f(۲)=-۱$ یعنی $C=-۱$ (نقطه توپُر!)

مثال . باتوجه به شکل حاصل هر عبارت را در صورت وجود به دست آورید.



$f(1)= 2$

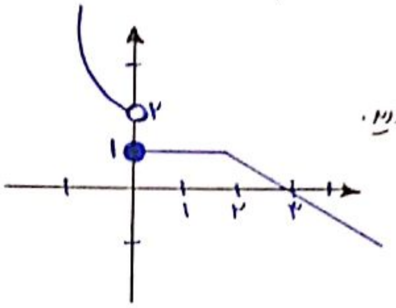
$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = 2$

راه رسیدن به نمودار از راست به ۲ موجود نیست!

مثال . با استفاده از نمودار حاصل عبارت $A=\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)-3f(0)$ را به دست آورید.



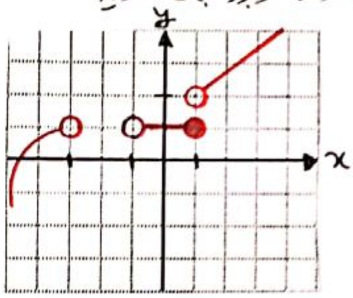
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

$f(0)=1$

$\Rightarrow A=(2)+(1)-3(1)=3-3=0 \Rightarrow A=0$

تمرین . نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. حاصل حدهای خواسته شده را با توجه به نمودار در صورت وجود به دست آورید.



$\lim_{x\to 0} f(x)=$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=$

$f(1)=$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim_{x\to (-2)^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} f(x)=$

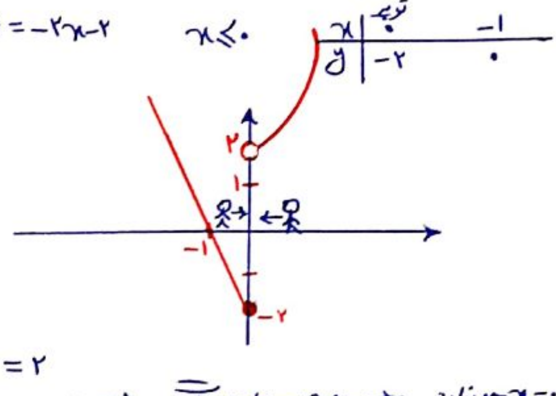
مثال . نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq 0\end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع را در $x=0$ در صورت وجود بررسی کنید.

$y=x^2+2 \qquad x>0$

x	0 (توخالی)	1	2
y	2	3	6

$y=-2x-2 \qquad x\leq 0$

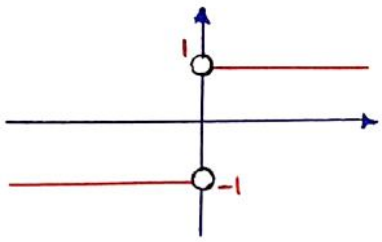
x	0 (توپر)	-1
y	-2	0



حد راست $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$

حد چپ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-2$

$\longrightarrow$ حد راست $\neq$ حد چپ $\Rightarrow$ تابع در $x=0$ حد ندارد



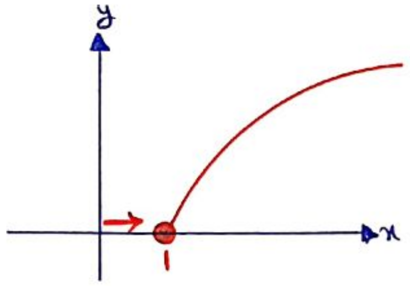
مثال. اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود است؟

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

$\Rightarrow$ حد راست $\neq$ حد چپ $\Rightarrow$ f در $x=0$ حد ندارد.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$



مثال. آیا $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ موجود است؟

با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$$

$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=$ وجود ندارد

زیرا تابع برای $x<1$ تعریف نشده است به عبارتی راه رسیدن به نمودار از چپ وجود ندارد.

نتیجه اینکه $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ موجود نیست.

تمرین. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x & x\geq 1\\ 4-x^2 & x<1\end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید.

تمرین. آیا $\lim_{x\to 1^-}(-1+\sqrt{x-1})$ موجود است؟

تمرین. در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ حاصل $\lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to (\frac{1}{2})^-} f(x)$ را به دست آورید.

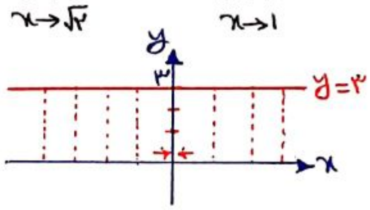
درس ۲. محاسبهٔ حد توابع

تکنیک های حدگیری

یکی از عواملی که به مطالعهٔ دقیق ترکیب تابع می تواند کمک کند، محاسبه حد آن تابع است. دیدید که استفاده از جدول برای محاسبه حد توابع معمولاً وقت‌گیر است به ویژه زمانی که ضابطه پیچیده باشد. از طرفی رسم نمودار تابع، کاری دشوار است. بنا براین برای محاسبه حد توابع از تکنیک های حدگیری کمک می گیریم.

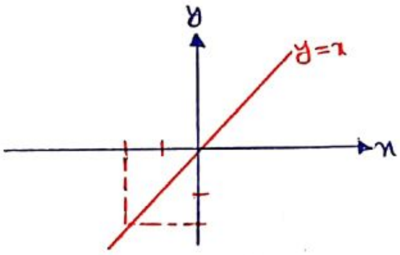
۱. حد تابع ثابت: حد تابع ثابت در هر نقطه برابر با مقدار تابع ثابت است یعنی $\lim\limits_{x\to a} c = c$

مثال. $\lim\limits_{x\to 0} 3 = 3$ ، $\lim\limits_{x\to 1} 3 = 3$ ، $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} 3 = 3$



۲. حد تابع همانی: اگر $f(x)=x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$

مثال. $\lim\limits_{x\to -2} x = -2$ ، $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$



۳. حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب و تقسیم دو تابع: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ در این صورت

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$
"مجموع حدها = حد مجموع دو تابع"

$$\lim_{x\to a} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$
"تفاضل حدها = حد تفاضل دو تابع"

$$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$
"حاصلضرب حدها = حد حاصلضرب دو تابع"

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$$
"تقسیم حدها = حد تقسیم دو تابع"

عمل اصلی بین دو تابع، روی حد اثر می کند.

۴. حد ضرب تابع: اگر k یک عدد حقیقی ثابت و حد تابع f در a برابر L باشد $(\lim_{x\to a} f(x)=L)$ در این صورت

$$\lim_{x\to a} k\times f(x) = k\times \overbrace{\lim_{x\to a} f(x)}^{L} = k\cdot L$$

عدد ثابت از $\lim$ عبور می‌کند.

مثال. $\lim_{x\to 2} 7x = ?$

$$\lim_{x\to 2} 7x = 7\times \lim_{x\to 2} x = 7\times 2 = 14$$

۵. حد توان nاُم و حد ریشه nاُم: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} (f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = L^n$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$ (به شرط تعریف شدن رادیکال)

مثال. اگر $\lim_{x\to 3} f(x)=-1$ و $\lim_{x\to 3} g(x)=2$ باشد، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$A=\lim_{x\to 3} (3f(x)-g(x)) \rightarrow A=\lim_{x\to 3} 3f(x) - \lim_{x\to 3} g(x) = 3\lim_{x\to 3} f(x) - \lim_{x\to 3} g(x)$$
$$= 3(-1)-2=-5$$

$$B=\lim_{x\to 3} \frac{(g(x))^2}{f(x)} \rightarrow B=\frac{(\lim_{x\to 3} g(x))^2}{\lim_{x\to 3} f(x)} = \frac{(2)^2}{-1} = -4$$

مهم اما واقعی: به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

- توجه کنید اولین اقدام در حدگیری، جایگذاری عدد میل به جای متغیر x است.

مثال. حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x\to 1} x^3+x^2+x+1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} x^3 + \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 = (1)^3+(1)^2+(1)+(1)=4$

ب) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{2x^2-x} \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2} x}{\lim_{x\to 2}(2x^2-x)} = \frac{2}{2(2)^2-(2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ج) $\lim_{x\to 3} [x] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 3^+} [x] = [3^+] = 3 \\ \lim_{x\to 3^-} [x] = [3^-] = 2 \end{cases} \Rightarrow$ حد ندارد (حد راست $\neq$ حد چپ)

د) $\lim_{x\to \sqrt{2}} [x] \Rightarrow \lim_{x\to \sqrt{2}^+} [x] = \lim_{x\to \sqrt{2}^-} [x] = [\sqrt{2}] = [1.4142...] = 1$

تذکر. تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح ($x\in\mathbb{Z}$) حد ندارد زیرا حد راست و حد چپ مساوی ندارد. امّا در نقاط غیرصحیح $x\notin\mathbb{Z}$ ($x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$) حد دارد.

مثال. حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$A=\lim_{x\to 0}\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$B=\lim_{x\to 1^-}(3[x]-1)=3[1^-]-1=3(0)-1=-1$$

$$C=\lim_{x\to 2}\frac{3-x^2}{\sqrt{4x+1}}=\frac{3-(2)^2}{\sqrt{4(2)+1}}=\frac{-1}{\sqrt{9}}=\frac{-1}{3}$$

$$D=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}1 & x\geq 2 \rightarrow \text{حد راست}\\ -1 & x<2 \rightarrow \text{حد چپ}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=1 \quad,\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=-1 \Rightarrow$$ تابع در ۲ حد ندارد

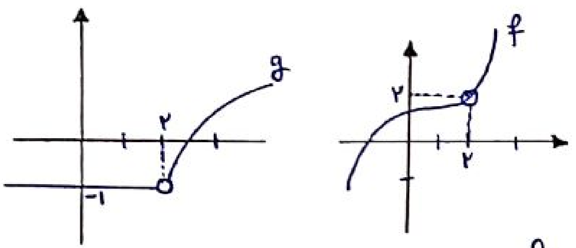
مثال. آیا تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>2\\ -x & x<2\end{cases}$ در $x=2$ حد دارد؟

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+1)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x)=-2$$

تابع f در $x=2$ دارای حد نیست زیرا حد راست و چپ متفاوت دارد.

مثال. نمودار توابع f و g به صورت روبه‌رو است. حاصل حد زیر را در صورت وجود بیابید.



$$\lim_{x\to 2}(3f(x)-2g(x))=?$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=2,\quad \lim_{x\to 2}g(x)=-1 \Rightarrow 3\lim_{x\to 2}f(x)-2\lim_{x\to 2}g(x)=3(2)-2(-1)=8$$

تمرین. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=? \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x}{x^3+2x}=? \qquad \lim_{x\to 2}\left|\frac{x-4}{x+4}\right|=?$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{[x]}=? \qquad \lim_{x\to -1}\frac{1}{2}=? \qquad \lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{|x-3|}=?$$

محاسبهٔ حد توابع کسری در ریشهٔ مشترک صورت و مخرج:

گاهی در توابع گویا $\frac{f(x)}{g(x)}$ بعد از جایگذاری عدد میل به جای متغیر x به $\frac{0}{0}$ حدی می‌رسیم.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

این حالت مبهم است و باید رفع ابهام شود. برای این کار صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم تا عامل صفر شونده $(x-a = x-\text{عدد میل})$ در صورت و مخرج ظاهر شود سپس این عامل صفرکننده را از صورت و مخرج Delete می‌کنیم و از باقی‌ماندهٔ کسر حد می‌گیریم.

مثال. حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{(3)^2-3(3)}{(3)^2-9} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \rightarrow \text{رفع ابهام}$$

چون $x\to 3$ پس باید عامل $x-a = x-3$ را از صورت و مخرج پیدا کرده و آن را حذف کنیم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2-12}{x^2-x-6} = \frac{3(-2)^2-12}{(-2)^2-(-2)-6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3(x^2-4)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-2)}{x-3} = \frac{3(-2-2)}{-2-3} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-[x]}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{(1)^2-1} = \frac{0}{0} \qquad \left(\lim_{x\to 1^+}[x] = [1^+] = 1\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2} = \frac{(2)^3-8}{(2)^2-3(2)+2} = \frac{0}{0}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$(x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{(2)^2+2(2)+4}{2-1} = 12$$

تمرین. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$A = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} \qquad B = \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} \qquad C = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

حد توابع مثلثاتی:

حد توابع مثلثاتی در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است به شرط آنکه تابع در آن نقطه تعریف شده باشد.

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad (a\in\mathbb{R}) \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a \quad (a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (a\neq k\pi+\frac{\pi}{2}) \qquad \lim_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (a\neq k\pi)$$

مثال. حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (3\sin x+4\cos x) = 3\times \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x + 4\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 3\sin\frac{\pi}{2}+4\cos\frac{\pi}{2} = 3(1)+4(0)=3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2(0)}{1-\cos(0)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \qquad (\sin^2 x = 1-\cos^2 x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)} = 1+\cos 0 = 1+1=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{\sin x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}=1 \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

در صفر حد ندارد.

تذکر. از برابر قرار دادن حد چپ و حد راست تابع، می‌توان مقادیر مجهول را به دست آورد.

مثال. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-2x+a & x\leq 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ حد داشته باشد مقدار a را به دست آورید.

حد راست: $\lim_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2=1$

حد چپ: $\lim_{x\to 1^-} (-2x+a) = -2(1)+a = -2+a$

$\Rightarrow$ حد چپ = حد راست $\Rightarrow -2+a=1 \Rightarrow a=3$

تمرین. حد توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to\pi}(\cos 3x+\sin\frac{x}{2})$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$

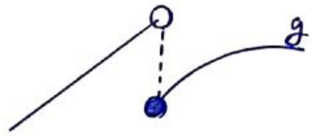
تمرین. اگر تابع $f+g$ در $x=a$ حد داشته باشد، در مورد توابع f و g چه می‌توان گفت؟

درس ۳. پیوستگی

یکپارچه، متصل

تابع f را از نظر شهودی پیوسته گوییم هرگاه نمودارش بریدگی نداشته باشد. به عبارتی بدون برداشتن قلم از روی کاغذ بتوان نمودار f را رسم کرد.

f پیوسته است.



g پیوسته نیست.

تعریف رسمی پیوستگی:

تابع f را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه

I. حد تابع موجود باشد (حد راست و حد چپ آن در $x=a$ برابر باشد)

II. مقدار تابع موجود باشد (عددی متناهی باشد)

III. حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

پیوستگی: حد تابع = مقدار تابع

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

تذکر: اگر بحث حد راست و حد چپ به میان آید، گوییم تابع f در a پیوسته است هرگاه

حد چپ = حد راست = مقدار تابع

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

- اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نباشد آن را ناپیوسته (منفصل) می‌نامیم.

- چون توابع چندجمله‌ای در تمام نقاط $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ تعریف شده‌اند (مقدار دارند) لذا اینگونه توابع در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

مثال. پیوستگی تابع
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3 \\ 6 & x=3 \end{cases}$$
را در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

مقدار تابع: $f(3)=6$

حد تابع: $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \dfrac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(\cancel{x-3})} = 3+3=6$

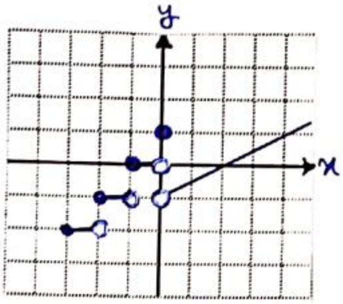
حد تابع = مقدار تابع = ۶ $\Rightarrow$ f در ۳ پیوسته است

مثال. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}[x] & x<0\\ 1 & x=0\\ \frac{1}{2}x-1 & x>0\end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید. (نمودار f را نیز رسم کنید)

حدچپ: $\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=[0^-]=-1$

حدراست: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{2}x-1)=\frac{1}{2}(0)-1=-1$ $\Rightarrow$ f در صفر پیوسته نیست $\Leftarrow$ مقدار تابع $\neq$ (حدراست = حدچپ)

مقدار تابع: $f(0)=1$



تمرین. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} & x\neq 1\\ -3 & x=1\end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

تذکر. از برابر قرار دادن حدچپ و حدراست تابع با مقدار تابع، می‌توان مقادیر مجهول را در مسائل مربوط به پیوستگی پیدا کرد.

مثال. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع روبه‌رو در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax+2 & x>1\\ 4 & x=1\\ \sqrt{3x^2+1}-2b & x<1\end{cases}$$

مقدار تابع: $f(1)=4$

حدراست: $\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+2)=a(1)+2=a+2$

حدچپ: $\lim\limits_{x\to 1^-}(\sqrt{3x^2+1}-2b)=\sqrt{3(1)^2+1}-2b=2-2b$

$$\xrightarrow{\text{مقدار تابع = حدراست = حدچپ}}\begin{cases}a+2=4\Rightarrow a=2\\ 2-2b=4\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

مثال. اگر f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}a\sin x+b\cos(2x) & x>\frac{\pi}{2}\\ 2 & x=\frac{\pi}{2}\\ a\sin(3x)+1 & x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.

$f(\frac{\pi}{2})=2$

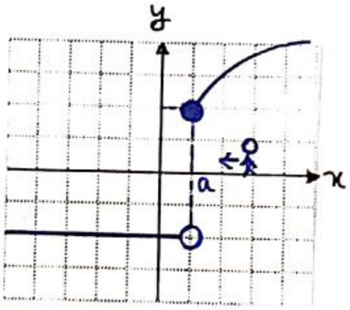
$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(a\sin x+b\cos(2x))=a\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}+b\overbrace{\cos 2\frac{\pi}{2}}^{-1}=a(1)+b(-1)=a-b \quad (1)$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(a\sin(3x)+1)=a\overbrace{\sin 3\frac{\pi}{2}}^{-1}+1=a(-1)+1=-a+1$$

$$\Rightarrow -a+1=2\Rightarrow a=-1\xrightarrow[a=-1]{(1)}(-1)-b=2\Rightarrow b=-3$$

تمرین. تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+2b & x>0 \\ 1 & x=0 \\ x+a & x<0 \end{cases}$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

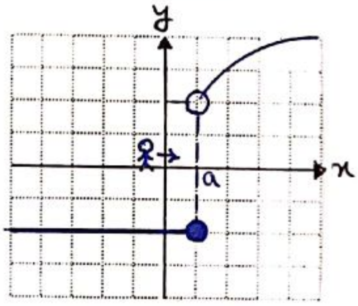
تمرین. عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} 2ax^2+bx+1 & x<1 \\ |x| & x=1 \\ a\sin(x-1)+2b & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد.



پیوستگی راست:

تابع f را در $x=a$ از راست پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

پیوستگی راست: مقدار تابع = حد راست



پیوستگی چپ:

تابع f را در $x=a$ از چپ پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

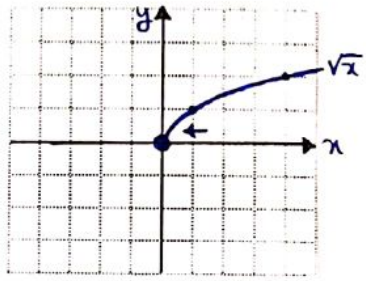
پیوستگی چپ: مقدار تابع = حد چپ

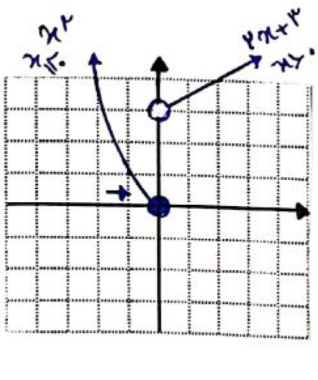
مثال. نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=0$ پیوستگی راست دارد؟

$D_f=[0,+\infty)$

حد راست: $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0^+}=0$ مقدار تابع: $f(0)=\sqrt{0}=0$ حد چپ: $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}=\sqrt{0^-}=$ موجود نیست

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow$ f در $x=0$ از راست پیوسته است





مثال. نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 0 \\ 2x+3 & x>0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی چپ: مقدار تابع = حد چپ

$f(0)=\lim_{x\to 0^-} x^2=(0)^2=0 \Rightarrow$ (مقدار تابع = حد چپ) $\neq$ حد راست

$\lim_{x\to 0^+}(2x+3)=2(0)+3=3$

تمرین. مقدار m را طوری بیابید که تابع مقابل در $x=0$ پیوستگی چپ داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ m-1 & x=0\end{cases}$$

پیوستگی روی بازه:

۱. تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد (بریدگی نداشته باشد)

۲. « « « « $[a,b]$ « « « « « « « بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و همچنین در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی راست و در نقطهٔ $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

۳. تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است هرگاه در هر نقطهٔ (a,b) پیوسته و در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

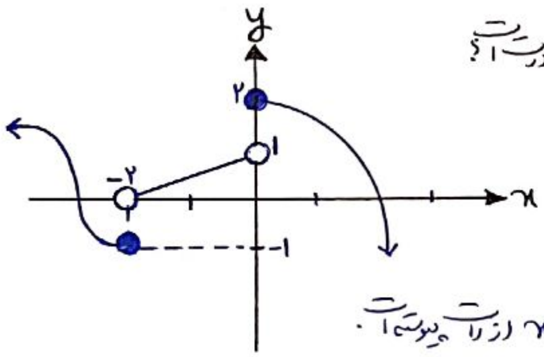
۴. « « « « $(a,b]$ « « « « « « « « « « $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال. نمودار تابع f به صورت روبه‌رو رسم شده است. کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟

(دلیل کافی بیاورید)

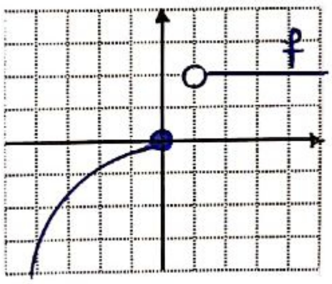
الف) f روی $[0,+\infty)$ پیوسته است.

ب) « « $[-2,0)$ « « .



الف درست است زیرا تابع در $(0,+\infty)$ پیوسته است و همچنین در $x=0$ از راست پیوسته است.

ب نادرست است زیرا تابع در $x=-2$ پیوستگی راست ندارد.



تمرین. با توجه به نمودار مقابل آیا عبارت (f روی بازهٔ $(0,2)$ پیوسته است) درست یا نادرست است؟

تذکر. توابع در دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند. اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد می‌گوییم f روی $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

اگر تابعی روی $(-\infty,+\infty)$ پیوسته باشد، روی هر زیربازهٔ دلخواه از اعداد حقیقی نیز پیوسته است.

مثال. مجموعه نقاط پیوستگی هر تابع را مشخص کنید.

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}$$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=-1$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,-1\}$

$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

$D_g=[1,+\infty)$

تمرین. بازهٔ پیوستگی توابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ را به دست آورید.