فصل هفتم

آمار و احتمال

ابتدا مطالبی را که سال گذشته آموختید یادآوری می کنیم .

پدیده تصادفی:

هر پدیده یا رویداد که نتیجه آن از قبل به طور قطعی و حتمی مشخص ومعین قابل پیش بینی نباشد.

به عنوان مثال :

در پرتاب یک سکه مشخص نیست که رو ظاهر می شود یا پشت سکه .

فضای نمونه :

مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می نامند .

فضای نمونه را با حرف S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می دهند

پیشامد:

هر زیر از مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد یا پیشامد تصادفی گویند .

برآمد:

به هریک از اعضای یک پیشامد ، یک برآمد گویند.

توجه :

۱- از آنجایی که هر مجموعه n عضوی دارای 2^n زیر مجموعه هست . بنابراین هر فضای نمونه دارای $2^{n(S)}$ پیشامد است .

۲- اگر فضای نمونه S حاصل از پرتاب n بار یک سکه ای باشد . تعداد اعضای S برابر با 2^n می باشد .

۳- اگر فضای نمونه S حاصل از پرتاب n بار یک تاس باشد . تعداد اعضای S برابر با 6^n می باشد .

۴- اگر فضای نمونه S حاصل از پرتاب n بار یک سکه ای و m بار یک تاس باشد . تعداد اعضای S برابر با $6^m \times 2^n$ می باشد .

مثال۱ :

دو تاس را باهم پرتاب می کنیم .

الف) فضای نمونه حاصل از پرتاب این دو تاس چند برآمد دارد؟

ب) پیشامدی از این فضای نمونه رابنوسید که اعداد ظاهر شده دو تاس زوج باشند .

ج) پیشامدی از این فضای نمونه رابنوسید که مجموع اعداد ظاهر شده بیشتر از ۱۰ باشد .

د) پیشامدی از این فضای نمونه رابنوسید که هر دو عدد ظاهر شده عدد اول باشند .

هـ) پیشامدی از این فضای نمونه رابنوسید که هر دو عدد ظاهر شده عدد اول باشند .

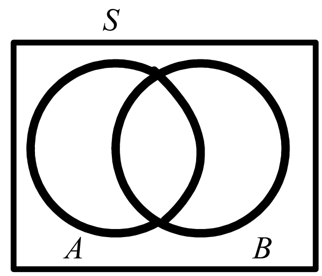
اعمال روی پیشامد :

۱– اجتماع دو پیشامد :

اجتماع دو پیشامد مانند A و B را با $A\cup B$ نمایش داده و وقتی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامد های A یا B رخ می دهد .

مثال۲ :

در شکل زیر پیشامد $A\cup B$ را سایه بزنید .

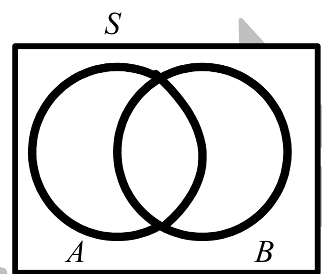


۲– اشتراک دو پیشامد :

اشتراک دو پیشامد مانند A و B را با $A\cap B$ نمایش داده و وقتی رخ می دهد که هردو پیشامد A و B رخ می دهد .

مثال۳ :

در شکل زیر پیشامد $A\cap B$ را سایه بزنید .

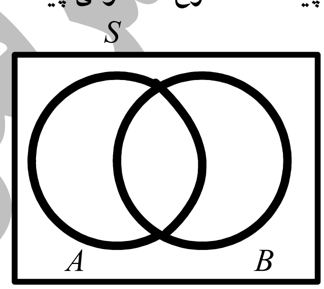


۳– تفاضل دو پیشامد :

تفاضل پیشامد B از پیشامد A را با $A-B$ نمایش داده و وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ داده ولی پیشامد B رخ ندهد.

مثال۴ :

در شکل زیر پیشامد $A-B$ را سایه بزنید .

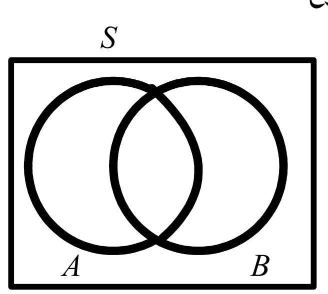


۴– تفاضل متقارن دو پیشامد :

تفاضل متقارن دو پیشامد مانند A و B را با $A\Delta B$ یا $(A-B)\cup(B-A)$ نمایش داده و زمانی رخ می دهد که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد . یعنی A رخ دهد ولی B رخ ندهد یا B رخ دهد ولی A رخ ندهد .

مثل۵ :

در شکل زیر پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$ را سایه بزنید .

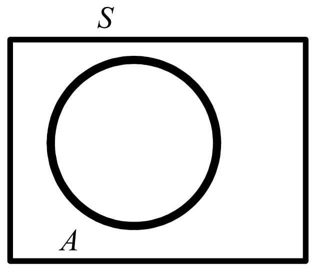


۵– متمم یک پیشامد :

متمم پیشامد A را با A' یا A^C نمایش داده و وقتی رخ میدهد که پیشامد A رخ ندهد.

مثال۶ :

در شکل پیشامد A' را سایه بزنید .



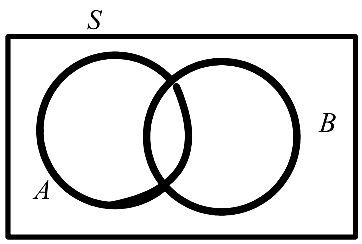
۶– قانون دمورگان برای دو پیشامد :

نه پیشامد A رخ دهد و نه پیشامد B رخ دهد. یعنی $A' \cap B'$

داریم : $A' \cap B' = (A \cup B)'$

مثال :

در شکل پیشامد $A' \cap B'$ را سایه بزنید .



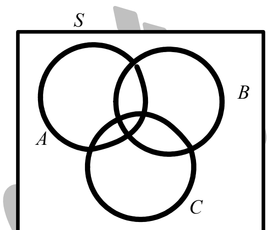
دو رابطه زیر به قانون دمورگان مشهورند.

$$\begin{cases} A' \cap B' = (A \cup B)' \\ A' \cup B' = (A \cap B)' \end{cases}$$

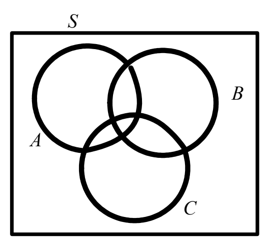
مثال۷ :

فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند . پیشامدهای زیر را توسط نمودار وِن نمایش دهید .

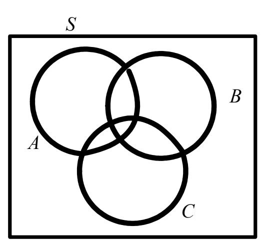
الف) فقط A رخ دهد .



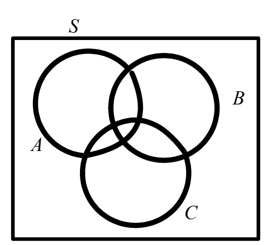
ب) A و C رخ دهند ولی B رخ ندهد .



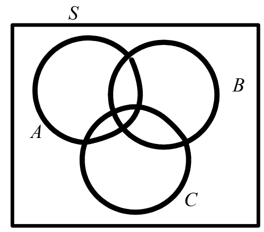
ج) فقط دوتا از سه پیشامد رخ دهند .



د) A رخ دهد ولی C رخ ندهد .



هــ) هیچکدام از سه پیشامد رخ ندهند .

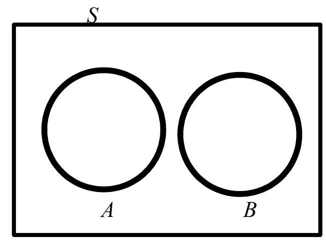


پیشامدهای ناسازگار :

دو پیشامد مانند A و B را ناسازگار می گوییم هرگاه A و B نتوانند باهم رخ دهند . به عبارتی $A \cap B = \phi$.

مثال۸ :

درشکل زیر دو پیشامد A و B ناسازگارند .



مثال۹ :

دوپیشامد ناسازگار مثال بزنید .

تعریف احتمال :

فرض کنیم A یک پیشامد از فضای نمونه S باشد . احتمال رخ دادن A را با $P(A)$ نمایش داده و به صورت زیر محاسبه می گردد :

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$$

برای محاسبه احتمال یک پیشامد تعداد اعضای آن پیشامد و تعداد اعضای فضای نمونه ضروری است .

با این تعریف :

$P(S)=۱$ و $P(\phi)=۰$.

وبنابراین برا ی هر پیشامد $A \subseteq S$ داریم : $۰ \le P(A) \le ۱$.

مثال۱۰ :

از بین ۵ دانش آموز رشته ریاضی و ۴ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز رشته انسانی ، یک گروه ۳ نفره به تصادف انتخاب می کنیم . مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر ۳ نفر انتخابی رشته تجربی باشند .

ب) هیچ یک از گروه انسانی نباشد .

ج) حداقل یک نفر از رشته ریاضی باشد .

د) هر سه نفر از یک رشته باشند .

هـ) فقط یک نفر از رشته تجربی باشد .

رابطه بین اجتماع و اشتراک دو پیشامد A و B :

اگر A و B دوپیشامد از فضای نمونه S باشند داریم : $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

همچنین اگر A و B دوپیشامد ناسازگار باشند

داریم $A\cap B=\phi$ و بنابراین $P(A\cap B)=0$ و رابطه بالا به صورت $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ در می آید .

همچنین احتمال این که فقط پیشامد A رخ دهد به صورت $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ می باشد .

از این رابطه و رابطه بالا می توان نتیجه گرفت : $\boxed{P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)}$

$$\boxed{P(A)+P(B)=P(A-B)+P(B-A)+2P(A\cap B)}$$

مثال۱۱ :

در یک کلاس ، ۶۵ درصد دانش آموزان در درس ریاضی و ۷۲ درصد فیزیک و ۴۸ درصد در هر دو درس قبول شده اند.

با کدام احتمال :

الف) دانش آموزان حداقل در یکی از این دو درس قبول شده اند ؟

ب) فقط در دس ریاضی وضعیت قبول شده اند ولی در فیزیک قبول نشده اند.

ج) در هیچ یک از این دو درس قبول نشده اند ؟

مثال۱۲:

سه تاس را باهم پرتاب می کنیم . مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر سه عدد ظاهر شده در تاس ها یکسان باشد .

ب) حداقل دو عدد از سه عدد ظاهر شده متفاوت باشند .

ج) مجموع هر سه عدد ظاهر شده حداکثر ۱۶ باشد

د) هر سه عدد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند .

مثال۱۳ :

در یک حانواده با ۴ فرزند با کدام احتمال ۲ تا از فرزندان پسر یا ۳ تا دختر است؟

توجه :

در خانواده ای با n فرزند احتمال این که k تا پسر داشته باشد از رابطه ی $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ به دست می آید .

اگر پرتاب سکه ای n بار باشد و احتمال k بار رو خواسته شود نیز از همین رابطه استفاده می کنیم .

مثال۱۴ :

در کیسه ای ۵ مهره سفید ، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است . اگر سه مهره را باهم و به تصادف از کیسه خارج کنیم . با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده ، هم رنگ هستند ؟

مثال۱۵ :

اگر $P(A-B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۳}$ باشد . بیشترین مقدار $P(A)+P(B)$ را حساب کنید .

پیشامدهای مستقل :

دو پیشامد را مستقل گویند هرگاه رخ دادن یکی تأثیری در دیگری نداشته باشد .

به عبارت دیگر اگر A و B دوپیشامد از فضای نمونه S باشند . A و B مستقل هستند هرگاه $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

مثال۱۶ :

دو پیشامد نام ببرید که مستقل از هم هستند .

مثال۱۷ :

اگر A و B دوپیشامد مستقل و $P(A)=۰/۵$ و $P(A\cup B)=۰/۸$ باشد . حاصل $P(B')$ را بنویسید .

مثال۱۸ :

دو تاس را باهم پرتاب می کنیم .پیشامدهای زیر را تعریف می کنیم . آیا دو پیشامد مستقل هستند ؟ چرا ؟

A : مجموع اعداد رو شده در دو تاس برابر با ۷ باشد .

B : عدد رو شده در تاس اول برابر با ۴ باشد .

مثال۱۹ :

احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۵ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است . مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر دو در این آزمون قبول شوند ؟

ب) حداقل یکی از آنها در این آزمون قبول شوند ؟

ج) فقط فرد A در آزمون قبول شود؟

د) فقط یکی از این دو فرد در آزمون قبول شود ؟

هـ) هیچ کدام از این دو فرد در آزمون قبول نشوند ؟

توجه :

اگر A و B دوپیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند . در این صورت :

- A و B' مستقل هستند .
- A' و B مستقل هستند .
- A' و B' مستقل هستند .

(اثبات کنید .)

مثال۲۰ :

خانواده ای ۳ فرزند دارد.

الف) احتمال این که هر سه فرزند پسر باشند چقدر است ؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و سوم پسر باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه فرزند اول و سوم پسر باشند چقدر است ؟

مثال۲۱ :

احتمال این که شخصی دارای گروه خونی A^+ داشته باشد ٪۳۰ و احتمال این که دارای ناراحتی کلیه باشد ٪۱۵ است . چقدر احتمال دارد

الف) این شخص دارای گروه خونی A^+ و ناراحتی کلیه داشته باشد ؟

ب) این شخص دارای گروه خونی A^+ یا ناراحتی کلیه داشته باشد ؟

ج) این شخص نه دارای گروه خونی A^+ و نه ناراحتی کلیه داشته باشد ؟

د) این شخص فقط دارای گروه خونی A^+ باشد ؟

احتمال های شرطی :

فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند . احتمال این که پیشامد B رخ دهد به شرطی که پیشامد A قبلا رخ داده باشد را احتمال B به شرط A گفته و با $P(B|A)$ نمایش میدهند و به صورت زیر محاسبه می گردد .

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \qquad P(A)\neq 0 \text{ و}$$

مثال۲۲ :

در یک مسابقه اتومبیل رانی ، احتمال این که یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد برابر با ۰/۷ است . احتمال این که یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود برابر با ۰/۸ است . اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص نفین نشده است احتمال این که به خط پایان رسیده باشد چقدر است ؟

مثال۲۳ :

دوتاس را باهم پرتاب می کنیم . اگر دوعدد ظاهر شده متفاوت باشند ، احتمال آن که مجموع دو عدد برابر با ۹ باشد چقدر است؟

مثال۲۴ :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوری که $P(A)=0/2$ و $P(B)=0/22$ و $P(B|A)=0/7$ باشد .
حاصل $P(B'|A')$ را حساب کنید .

توجه :

فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند . دراین صورت :

الف) اگر $B \subseteq A$ باشد آن گاه $P(B|A)=1$

ب) اگر A و B ناسازگار باشند . آن گاه $P(A|B)=P(B|A)=0$

ج) $P(A|A')=0$

ضرب احتمال ها :

در احتمال شرطی کمتر از رابطه $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ استفاده می شود ، می توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)}$$

ار این رابطه بیشتر استفاده می کنیم که به **قانون ضرب احتمال ها** مشهور است .

مثال :

یک جعبه شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است . دو مهره را پشت سرهم و بدون جایگذاری و به تصادف از جعبه بیرون می کشیم .

الف) احتمال این که مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد . چقدر است ؟

ب) احتمال این که هر دو مهره سفید باشند چقدراست ؟

ج) احتمال این که هر دو مهره هم رنگ باشند چقدر است ؟

د) اگر بدانیم مهره اول سیاه بوده احتمال آنکه مهره دوم سفید باشد ، چقدر است ؟

مثال۲۵ :

در یک جامعه ، ٪۶۰ را زنان و مابقی را مردان تشکیل می دهند . در این جامعه ٪۷۰ زنان و ٪۹۰ مردان با سوادند . فردی را به تصادف از این جامعه انتخاب می کنیم . احتمال آن که یک زن بی سواد باشد چقدر است ؟

احتمال های شرطی و پیشامدهای مستقل:

فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند . داشتیم : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

از طرفی نیز داشتیم : $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ پس

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)$$

به همین ترتیب $P(A|B)=P(A)$

مثال۲۶ :

خانواده ای دارای ۴فرزند است . میدانیم فرزند اول پسر است . مطلوب است احتمال آن که سه فرزند دیگر این خانواده دختر باشند .

حل:

A : سه فرزند بعدی دختر باشد

B : فرزند اول پسر باشد .

$A\cap B$: فرزند اول پسر و سه فرزند بعدی دختر باشند .

چون جنسیت فرزندان مستقل از یکدیگرند داریم :

$$P(A\cap B)=P(\text{پ ددد})=P(\text{پ})P(\text{د})P(\text{د})P(\text{د})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

اما $P(B)=\frac{1}{2}$ پس :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

با حل این مثال می بینیم این احتمال برابر با احتمال اینکه سه فرزند بعدی دختر باشند .

دیده می شود وقوع B تغییری در احتمال وقوع A نمی دهد.

مثال۲۷ :

دو تاس را باهم انداخته ایم . اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد . احتمال آن که شماره یکی از تاس های روشده عدد ۲ باشد را حساب کنید .

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

قانون کل احتمال :

فرض کنید A_1 و A_2 و ... و A_n پیشامدهایی از فضای نمونه S باشند که حتماً یکی از آن ها رخ دهد یعنی $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$.
همچنین فرض کنید فقط یکی از پیشامدهای A_i ها بتواند رخ دهد به عبارتی این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند. یعنی برای هر دو پیشامد متفاوت مانند A_i و A_j $(i \neq j)$ $A_i \cap A_j = \phi$ باشد .
با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه مانند B داریم :

$$\boxed{P(B) = P(A_1)\times P(B|A_1) + P(A_2)\times P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)\times P(B|A_n)}$$

مثال۲۸ :

فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد . والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند . مطلوب است احتمال آن که این فرزند سالم باشد .

روش دوم :

می توان از نمودار درختی مثال را به شکل زیر حل کرد .

مثال ۲۹ :

دو جعبه داریم . جعبه اول شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است . جعبه دوم شامل ۲ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است .
یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و به تصادف مهره ای از آن بر می داریم .احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است ؟

مثال ۳۰ :

دو جعبه داریم . جعبه A شامل ۱۰ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است . جعبه B شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است .
از جعبه A یک مهره را بدون دیدن رنگ آن به تصادف بر می داریم و در ظرف B قرار می دهیم . سپس یک مهره از ظرف B بر می داریم
احتمال آن مهره دوم سفید باشد چقدر است ؟

مثال ۳۱ :

در یک منطقه سه کارخانه تولیدلامپ A و B و C وجود دارد. اگر ۱۰ درصد لامپ های کارخانه A و ۸ درصد لامپ های کارخانه B و ۱۲ درصد لامپ های کارخانه C سوخته باشند و یک کارخانه را به تصادف انتخاب کرده و لامپی را آزمایش می کنیم . احتمال این که لامپ سوخته باشد چقدر است ؟

تمرین :

۱- احتمال آن که دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۰/۷ و احتمال این که در درس شیمی قبول شود ۰/۸۵ و احتمال آن که در هر دو درس قبول شود ۰/۶ است . احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس ریاضی و شیمی قبول شود چقدر است ؟

۲- در یک کیسه ۳ مهره آبی و ۴ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد.

۳- در پرتاب دو تاس ، اگر ضرب اعداد ظاهر شده برابر با ۱۲ باشد . احتمال آن که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر با ۷ باشد چقدر است؟

۴- احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر با ۰/۸ است . احتمال آن که :

الف) عمل جراحی برای هر دو نفر موفقیت آمیز باشد چقدر است؟

ب) عمل جراحی لااقل برای یک نفر از آنها موفقیت آمیز باشد چقدر است؟

ج) عمل جراحی فقط برای یک شخص موفقیت آمیز باشد چقدر است ؟

د) عمل موفقیت آمیز برای هیچکدام موفقیت آمیز نباشد چقدر است ؟

۵- دو تاس متمایز را باهم پرتاب می کنیم . با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده ، مضرب ۳ نیستند؟

۶ - از مجموعه $\{۲۰۰۱,۲۰۰۲,۲۰۰۳,...,۵۰۰۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال آن که این عدد نه مضرب ۴ باشد نه مضرب ۵ چقدر است؟

۷-اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S و $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ باشد . حاصل $P(A\cup B')$ را حساب کنید .

۸- اگر $P(A-B)=\frac{۲}{۱۷}$ و $P(B-A)=\frac{۷}{۱۰}$ و $P(B)=۳P(A)$ باشد . حاصل $P(A\cup B)$ را حساب کنید .

۹- اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(A')=\frac{۱}{۳}$ باشد . حاصل $P(B-A')$ را بیابید .

۱۰ – در پرتاب چهار سکه باهم ، احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید چقدر است؟

۱۱– تاسی را پرتاب می کنیم . اگر عدد فردی بیاید دو سکه و اگر عدد زوج بیاید سه سکه پرتاب می کنیم. احتمال این که دقیقاً یک سکه « رو» ظاهر شود چقدر است ؟

۱۲– در پرتاب ۴ تاس باهم ، چهار عدد متوالی ظاهر شده است . احتمال آن که یکی از تاس ها عدد ۲ باشد چقدر است ؟

۱۳– در پرتاب دو تاس باهم ، حداقل یکی از تاس ها عدد ۵ ظاهر شده است . احتمال آن که در دو تاس ، دو عدد متوالی را نشان دهند چقدراست؟

۱۴– خانواده ای دارای ۴ فرزند است. می دانیم دو فرزند اول آنها پسر است . احتمال آنکه دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند چقدر است؟

۱۵ - سکه ای را ۳ بار پرتاب می کنیم . اگر در پرتاب اول و دوم « پشت » ظاهر شده باشد ، احتمال آنکه در پرتاب سوم « رو » ظاهر شود چقدر است ؟

۱۶ – فرض کنید احتمال اینکه تیم A رقیب اصلیش تیم B را ببرد $\frac{۱}{۶}$ است و احتمال قهرمانی تیم A در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ است و در صورتی که رقیبش اصلیش یعنی تیم B را ببرد این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت . با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق « قهرمان شدن » یا « بردن رقیب اصلی یعنی تیم B » برای تیم A اتفاق خواهد افتاد ؟

۱۷ - اعداد ۱ تا ۹ را روی نه کارت متمایز نوشته و در یک جعبه می اندازیم و سه کارت را به تصادف و باهم انتخاب می کنیم .
اگر مجموع آنها زوج آمده باشد ، احتمال آنکه هر سه عدد زوج باشند چقدر است ؟

۱۸ – سه ظرف داریم که اولی شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم فقط ۵ مهره سیاه و در ظرف سوم فقط ۷ سفید وجود دارد . یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و دو مهره را به تصادف و باهم بیرون می کشیم ا حتمال آن که هر ۲مهره سیاه باشند چقدراست ؟

۱۹ – دو ظرف داریم . درظرف اول ۵مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم ۷مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه قرار دارد.
از ظرف اول یک مهره برداشته وبدون رؤیت در ظرف دوم قرار می دهیم . آنگاه از ظرف دوم یک مهره به تصادف بیرون می کشیم . احتمال آنکه این مهره سفیدباشد چقدر است ؟

۲۰ – احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود دو بربر احتمال آن است که دوستش دراین درس قبول شود . اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شود برابر $۰/۶۲۵$ باشد . رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد ؟

۲۱–دو تاس را باهم پرتاب کرده ایم . احتمال آنکه هردو عدد رو شده زوج باشند ، به شرط آن که بدانیم اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید .

تمرین

۱ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۲ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم، پشت ظاهر شده باشد.

۳ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل‌اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{1}{7}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

آمار:

دراین بخش ابتدا به بررسی معیارهای (شاخص های) مرکزی داده های آماری می پردازیم وسپس شاخص های پراکندگی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعریف معیار مرکزی :

معیارها یا ویژگی هایی هستند که محل تمرکز و تجمع داده ها را نشان می دهند .

انواع شاخص های مرکزی :

۱– مد ۲– میانه ۳ – میانگین (معدل)

مد :

داده ای است که در بین داده های آماری دارای بیشترین فراوانی (تکرار) است .

مثال۳۲ :

مد داده های آماری زیر را مشخص کنید .

الف) ۲ , ۴ , ۳ , ۲ , ۰ , ۳ , ۳

ب) ۱/۲ , ۴/۳ , ۱/۲ , ۳ , ۰/۵ , ۱ , ۵

ج) ۲ , ۴ , ۳ , ۷ , ۰ , ۹ , ۱

کاربرد مد :

از مد برای انتخاب افراد درکارها مانند انتخاب رئیس جمهور و یا انتخاب نمایندگان مجلس و .. همچنین در کارهای اقتصادی مانند برگزای نمایشگاه های نوشت افزار و یا نمایشگاه لباس در ایام خاصی از سال و ... استفاده می شود .

توجه :

مد ممکن است منحصر به فرد و یکتا نباشد که در این حالت با جامعه آماری چند مدی سروکار داریم .

میانه :

داده ای است که تعداد داده های بیشتر از آن با تعداد داده های کمتر از آن باهم برابر است . معمولاً با Q_2 نمایش می دهند .

برای این کار باید داده ها مرتب باشند. بنابراین ؛

برای محاسبه میانه داده ها :

ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم . دو حالت پیش می آید :

الف) اگرتعداد داده ها عدد فردی باشد . داده ای که در وسط قرار می گیرد ، میانه است .

اگر تعداد داده ها n باشد ، شماره داده میانه را از رابطه زیر می توان به دست آورد .

$$\text{شماره داده میانه} = \frac{n+1}{2}$$

ب) اگرتعداد داده ها عددی زوج باشد . دو داده ای که در وسط قرار می گیرند را باهم جمع کرده و بر ۲ تقسیم می کنیم حاصل میانه است .

$$\text{میانه } Q_2 = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

مثال۳۳ :

میانه داده های زیر را به دست آورید .

الف) ۱۲, ۱۴, ۱۷, ۱۳, ۱۹, ۲۰, ۳, ۶, ۸, ۹, ۳۲, ۴۵, ۱۲, ۱۷, ۵

ب) ۳۲, ۹, ۶۵, ۳۴, ۱۲, ۳, ۴, ۷, ۱۸, ۲۸, ۱۰, ۵۳, ۲۳, ۱۷, ۱۹, ۸, ۰, ۱۳, ۳۹, ۴

چارک ها:

داده ها را به چهار بخش تقسیم می کنند .

چارک اول (Q_1) :

اگر برای داده های کمتر از میانه ، دوباره میانه تعیین کنیم به آن چارک اول گویند .

چارک سوم (Q_3) :

اگر برای داده های بیشتر از میانه ، دوباره میانه تعیین کنیم به آن چارک سوم گویند .

مثال۳۴ :

برای داده های زیر میانه ، چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید .

الف) ۹, ۱۲, ۳۴, ۶, ۴۰, ۲۳, ۲۸, ۳۱, ۲, ۱۷, ۱۶, ۳۵, ۳۲, ۲۶, ۴۲, ۵۰

ب) ۱۰, ۱۲, ۸, ۴, ۷, ۲۹, ۳۰, ۱۲, ۵۴, ۲۰, ۲۳, ۲۱, ۳۴, ۶, ۹۰

میانگین :

اگر $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ داده های آماری باشند میانگین که با $\bar{x}$ یا μ نمایش می دهند به صورت زیر محاسبه می گردد :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}}$$

بنابراین :

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n\bar{x}}$$

مثال۳۵ :

میانگین داده های ۱۲, ۹, ۲۱, ۶, ۱۹ را حساب کنید .

مثال۳۶ :

اگر میانگین داده های $2x+6,5x-1,3-x,2-4x$ برابر با $12/5$ باشد مقدار x را بیابید .

مثال۳۷ :

میانگین ۸ داده آماری برابر با ۱۵ می باشد . اگر دو داده ۱۹ , ۱۳ را به داده ها اضافه کنیم . میانگین ۱۰ داده آماری را حساب کنید .

مثال۳۸ :

میانگین داده های x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 برابر با ۱۴ و میانگین داده های $y_1, y_2, ..., y_{15}$ برابر با ۱۸ می باشد . میانگین داده های $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, ..., y_{15}$ را حساب کنید .

ویژگی های معیارهای مرکزی:

اگر میانگین داده های آماری $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با $\bar{x}$ باشد . میانگین داده های $ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, ..., ax_n+b$ به صورت $a\bar{x}+b$ می باشد .

توجه :

۱- این ویژگی در مورد مد و میانه به همین شیوه برقرار است .

۲- میانگین همیشه بین کوچکترین داده تا بزرگترین داده قرار دارد .

۳- میانگین یک دسته از داده ها همیشه یکتاو منحصر به فرد است .

۴- اگر داده های آماری تشکیل دنباله حسابی دهند .میانگین برابر با نصف مجموع جمله اول و جمله آخر می باشد .

مثال۳۹ :

میانگین داده های ۱,۴,۷,۱۰,...,۱۰۰ را بیابید .

مثال۴۰:

اگر میانگین داده های $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با ۱۲ باشد . میانگین داده های $3x_1-1, 3x_2-1, 3x_3-1, ..., 3x_n-1$ را حساب کنید .

مثال ۴۱ :

اگر میانگین داده های $۳x_۱+۷ , ۳x_۲+۷ , ۳x_۳+۷ , ... , ۳x_n+۷$ برابر با ۴۱ باشد . میانگین داده های $\frac{x_۱}{۲}+۱ , \frac{x_۲}{۲}+۱ , \frac{x_۳}{۲}+۱ , ... , \frac{x_n}{۲}+۱$ را حساب کنید .

داده ی دور افتاده :

داده ای که نسبت به بقیه داده ها خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد .

توجه :

اگر در بین داده های آماری ، داده های دور افتاده داشته باشیم . از میانه استفاده می شود ، اما درصورتی که داده دور افتاده نداشته باشیم میانگین معیار بهتری است .

معیارهای پراکندگی :

معیارهایی هستند که درباره نحوه پراکندگی داده ها و دوری یا نزدیکی آنها از مرکز داده ها به ما اطلاعاتی می دهند .

انواع معیارهای پراکندگی :

۱- دامنه تغییرات **۲-** واریانس **۳-** انحراف معیار **۴-** ضریب تغییرات

دامنه تغییرات :

دامنه تغییرات که با حرف R نمایش می دهند برابر با بزرگترین داده منهای کوچکترین دادهمی باشد .

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min}}$$

مثال ۴۱ :

دامنه تغییرات داده های ۱۴ و ۷و ۱۵و ۳ و ۹ و ۱۹را حساب کنید

مثال۴۲ :

الف) دامنه تغییرات داده های ۱۲ و ۷ و ۴ و ۹ و ۱۰ را حساب کنید .

ب) داده های قسمت « الف » را در عدد ۳ ضرب کنید و دامنه تغییرات داده های جدید را حساب کنید . چه نتیجه ای بگیرید ؟

ج) داده های قسمت « الف » را با عدد ۲۰ جمع کنید و دامنه تغییرات داده های جدید را حساب کنید . چه نتیجه ای بگیرید ؟

ویژگی دامنه تغییرات :

۱- اگر دامنه تغییرات داده های آماری $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با R باشد .

دامنه تغییرات داده های $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, ..., ax_n + b$ برابر با $|a| \times R$ می باشد .

۲-اگر همه داده ها برابر باشند . دامنه تغییرات آن ها صفر است و برعکس .

۱- دامنه تغییرات ضعیف ترین شاخص پراکندگی است زیرا در محاسبه آن فقط از مقدار ماکزیمم و مینیمم داده ها استفاده می کند .

مثال۴۳ :

اگر دامنه تغییرات داده های $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابربا ۱۲ باشد . ضریبت تغییرات داده های $-3x_1 + 10, -3x_2 + 10, -3x_3 + 10, ..., -3x_n + 10$ را حساب کنید .

واریانس :

میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین آن ها را واریانس می گویند و با σ^2 (سیگما دو) نمایش می دهند .

بنابراین اگر میانگین داده های آماری $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با $\bar{x}$ باشد واریانس از رابطه زیر حساب می شود :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

مثال۴۴ :

واریانس داده های ۱۴ و ۵ و ۳ و ۶ را حساب کنید .

مثال۴۵ :

واریانس داده های ۶ و ۶و ۶ و ۶ و ۶ را حساب کنید .

نتیجه :

اگر همه داده ها برابر باشند ، واریانس آن ها صفر است و برعکس .

مثال۴۶ :

اگر واریانس داده های $3x-2y$ و ۱۵ و $2y+1$ برابر با صفر باشد . مقدار x و y را بیابید .

توجه :

واریانس را می توان از رابطه $\boxed{\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2}{n}-(\bar{x})^2}$ محاسبه کرد . (این رابطه از رابطه واریانس به دست می آید.)

مثال۴۷ :

مجموع ۱۰ داده آماری برابر با ۱۳۰ و مجموع مربعات آن ها برابر با ۱۹۴۰ می باشد . واریانس داده ها را حساب کنید .

مثال۴۸ :

الف) واریانس داده های ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ را حساب کنید .

ب) به هر داده قسمت « الف » را با عدد ۲۰ جمع کرده و واریانس داده های جدید را حساب کنید . چه نتیجه ای می گیرید ؟

ج) به هر داده قسمت « الف » را در عدد ۳ ضرب کرده و واریانس داده های جدید را حساب کنید . چه نتیجه ای می گیرید ؟

نتیجه کلی :

اگر واریانس داده های آماری $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با σ^2 باشد . واریانس داده های $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, ..., ax_n + b$ به صورت $a^2 \times \sigma^2$ می باشد .

مثال۴۹ :

اگر واریانس داده های $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر ۶ باشد . واریانس داده های $-3x_1 + 10, -3x_2 + 10, -3x_3 + 10, ..., -3x_n + 10$ را حساب کنید .

مثال۵۰ :

اگر واریانس داده های $x_1 + 3$ و $x_2 + 3$ و $x_3 + 3$ و $x_4 + 3$ برابر با ۱/۴۴ باشد . واریانس داد های $\frac{4}{5}x_1 - 10$ و $\frac{4}{5}x_2 - 10$ و $\frac{4}{5}x_3 - 10$ و $\frac{4}{5}x_4 - 10$ را حساب کنید .

توجه :

اگر n داده آماری باهم دنباله حسابی با قدر نسبت d تشکیل دهند . واریانس آن ها از رابطه زیر به دست می آید .

$$\boxed{\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12}\right) \times d^2}$$

مثال۵۱ :

واریانس اعداد طبیعی زوج کمتریا مساوی ۳۰ را حساب کنید.

واحد واریانس ، مجذور واحد داده هاست . ونیز واریانس تحت تإثیر داده های بزرگ قرار می گیرد . برای رفع و اصلاح این عیب ها و رسیدن به مقادیر واقعی ، از واریانس جذر می گیریم .

انحراف معیار :

انحراف معیار که با σ نمایش می دهند برابر با جذر واریانس می باشد .

مثال۵۲ :

میانگین ، واریانس و انحراف معیار داده های ۴- و ۲- و ۲- و ۱ و ۲ و ۵ را حساب کنید .

توجه :

اگر همه داده ها برابر باشند ، انحراف معیار آن ها صفر است و برعکس .

همانطوری که در مورد واریانس داشتیم که اضافه یا کم کردن مقادیری از داده ها تأثیری روی واریانس ندارد . این ویژگی در مورد انحراف معیار نیز برقرار است و به طور کلی :

نتیجه کلی :

اگرانحراف معیار داده های آماری $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با σ باشد . انحراف معیار داده های $ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, ..., ax_n+b$ به صورت $|a|\times\sigma$ می باشد .

مثال۵۳ :

اگر انحراف معیار داده های $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ برابر با ۱۲ باشد .

واریانس و انحراف معیار داده های $۵-\frac{x_1}{۲}, ۵-\frac{x_2}{۲}, ۵-\frac{x_3}{۲}, ..., ۵-\frac{x_n}{۲}$ را حساب کنید .

ضریب تغییرات :

خارج قسمت انحراف معیار داده های آماری بر میانگین آنها را ضریب تغییرات (پراکندگی) گویند و با CV نمایش می دهند .

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

این معیار فاقد واحد اندازه گیری می باشد .

از این معیار برای مقایسه دو یا چند جامعه آماری دارای واحدهای اندازه گیری متفاوت هستند و نیز برای مقایسه مقایسه دو جامعه آماری با واریانس مساوی ومیانگین متفاوت به کار می رود .

مثال۵۴ :

ضریب تغییرات داده های ۲ و ۴ و ۵ و ۶ و ۸ را حساب کنید .

مثال۵۵ :

ضریب تغییرات سن دانش آموزان کلاس بعد از ۱۰ سال چه تغییری می کند؟

مثال۵۶ :

اگر میانگین و واریانس داده های $۵x_1-۳, ۵x_2-۳, ۵x_3-۳, ..., ۵x_n-۳$ به ترتیب برابر با ۹۷ و ۶۲۵ باشد . ضریب تغییرات داده های $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ را حساب کنید .

مثال۵۷ :

داده های $x_i = ۱,۲,۳,۴,۵$ مفروض است . ضریب تغییرات داده های $u_i = ۱۲x_i + ۶$ را حساب کنید .

تمرین :

۱– هشت داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض است . اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ را به آنها افزوده شود . واریانس داده های حاصل حساب کنید .

۲– مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات آن ها ۳۴۰ می باشد . انحراف معیار آنها را حساب کنید .

۳– در ۲۵ داده آماری ، مجموع تمام داده های آماری برابر با ۲۷۵ و مجموع مربعات آنها ۳۲۵۰ می باشد . ضریب تغییرات این داده ها را بیابید .

۴– میانگین ۵ داده آماری برابر با ۶ و میانگین ۱۵ داده آماری دیگر برابر با ۸ است . میانگین بیست داده را باهم حساب کنید .

۵– نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است :

A : ۱۵,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۹ $\qquad$ B : ۱۶,۱۴,۱۷,۱۴,۱۷,۱۸

دقت عمل کدام یک بیشتر است ؟ چرا؟

۶- دو نفر در یک آزمایشگاه در ۵ روز متوالی هم زمان شروع به کار کرده اند . امتیازهای دقت کاری آن ها مطابق جدول زیر است.

دقت کاری کدام یک بیشتر است ؟ چرا؟

۷	۹	۸	۹	۷	نفر اول
۹	۷	۶	۸	۱۰	نفر دوم

۷ - کارخانه ای دو نوع لاستیک تولید می کند . نوع A با میانگین طول عمر ۱۱۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار ۲۰۰۰ کیلومترو نوع B با میانگین عمر ۱۰۰۰۰ کیلومترو انحراف معیار ۱۰۰۰ کیلومتر است . کدام لاستیک بهتر است و خرید آن منطقی است ؟

۸ - اگر ضریب تغییرات پنج داده آماری $a+۶$ و $a+۵$ و $a+۴$ و $a+۳$ و $a+۲$ با میانگین $a+۴$ برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۹}$ است .

مقدار a را بیابید .

۹– در ۲۵ داده آماری میانگین ۳۰ و انحراف معیار ۸ می باشد . اگر داده های ۱۰ و ۱۵ و ۴۵ و ۵۰ را از بین آنها حذف کنیم . واریانش داده های باقی مانده را حساب کنید .

۱۰ – میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۵ واحد و ضریب تغییرات آن ها ۰/۲ محاسبه شده است .

میانگین مساحت این مربع ها را حسا ب کنید .

۱۱– به داده های ۸ و ۷ و ۶ و ۳ چه عددی اضافه کنیم تا میانگین داده های حاصل یک واحد افزایش یابد ؟

۱۲- یک جامعه آماری با اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲/۶ با جامعه آماری دیگری با اندازه ۲۴ و واریانس ۷/۲ تشکیل جامعه جدیدی داده اند . اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد . انحراف معیار جامعه آماری جدید ، را حساب کنید .

۱۳-هشت داده آماری با میانگین ۱۱ و انحراف معیار $\sqrt{۱۰}$ داریم . اگر عدد ۲ به داده ها افزوده شود . واریانس کل ۹ داده را حساب کنید.

۱۴– اگر در مجموعه $\{x,۶۰,۷۰,۸۰,۱۱۰\}$ میانگین و میانه و مد برابر باشند . مقدار x را بیابید .

تمرین

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار c برابر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

۲ ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان کلاس شما ۱۰ سال دیگر چه تغییری می کند؟

۳ علیرضا و آرمان دو کارمند شرکت A هستند که وظایف یکسانی دارند اما حقوق دریافتی آنها به ترتیب ۱۲۰۰۰۰۰ تومان و ۱۶۰۰۰۰۰ تومان است. محمد و بهروز نیز دو کارمند شرکت B هستند که با وظایف یکسان حقوق‌هایی به ترتیب ۲۵۰۰۰۰۰ تومان و ۳۰۰۰۰۰۰ تومان دریافت می‌کنند. به نظر شما در کدام شرکت بی‌عدالتی بیشتری در پرداخت حقوق به این افراد مشاهده می‌شود؟ توضیح دهید.

۴ جدول زیر، پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵