به نام خدا

صا

جزوه فصل ۷ ریاضی هفتم (گروه جزوه ۷)

توان و جذر (دبیر: حسین لهراب)

دبیرستان: سمار یاسر ابواسحاق

درس اول: تعریف توان

درس دوم: محاسبه‌ی عبارت های توان دار

درس سوم: ساده کردن عبارت های توان دار

درس چهارم: جذر و ریشه

درس اول: تعریف توان

در ریاضیات عبارت هایی مانند ۳×۳ ، $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ را برای سهولت و ساده‌تر شدن به صورت زیر می‌نویسیم:

$۳ \times ۳ = ۳^{۲}$ عدد ۳ دوبار در خودش ضرب شده است.

$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۴}$ عدد ۲ چهار بار در خودش ضرب شده است.

در عبارت $۲^{۴}$ ، ۲ را پایه و ۴ را توان (نما) می‌نویسیم.

مثال:

$۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^{۳} \longrightarrow$ سه به توان ۳

$۷ \times ۷ = ۷^{۲} \longrightarrow$ هفت به توان ۲

$۱^{۲} = ۱ \times ۱ \longrightarrow$ یک به توان ۲

$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۷} \longrightarrow$ دو به توان هفت

مثال: حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $۲^۲ = ۲ \times ۲ = ۴$

۲) $۵^۲ = ۵ \times ۵ = ۲۵$

۳) $۳^۴ = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۸۱$

۴) $۱^۳ = ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$

۵) $۲^۵ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۳۲$

۶) $۰^۲ = ۰ \times ۰ = ۰$

۷) $۶^۱ = ۶$

۸) $۲/۵^۲ = ۲/۵ \times ۲/۵ = ۶/۲۵$

۹) $(\frac{۵}{۲})^۳ = \frac{۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} = \frac{۱۲۵}{۸}$

۱۰) $۱/۵^۳ = ۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱/۵ = ۳/۳۷۵$

مثال: عبارت های زیر را به صورت ساده شده بنویسید.

۱) $۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۴$

۲) $۸ \times ۸ \times ۸ \times ۸ \times ۸ \times ۸ = ۸^۶$

۳) $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^{۱۰}$

۴) $a \times a = a^۲$

۵) $b \times b \times b = b^۳$

۶) $y \times y \times y \times y \times y = y^۵$

۷) $۲/۷ \times ۲/۷ \times ۲/۷ \times ۲/۷ \times ۲/۷ \times ۲/۷ \times ۲/۷ = ۲/۷^۷$

۸) $۷ = ۷^۱$

نکات مهم در مورد توان :

۱- هر عدد به توان یک برابر خودش است : $a^1 = a$

۲- یک به توان هر عدد برابر یک است. $1^a = 1$

۳- صفر به توان هر عدد به جز صفر برابر صفر است. $0^a = 0$, $a \neq 0$

۴- مجذور هر عدد ← عدد به توان ۲

مجذور a $= a \times a = a^2$

۵- مکعب هر عدد ← عدد به توان ۳

مکعب a $= a \times a \times a = a^3$

مثال) حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $۲۷^{۱} + ۱۳۹۹^{۰} = ۲۷ + ۱ = ۲۸$

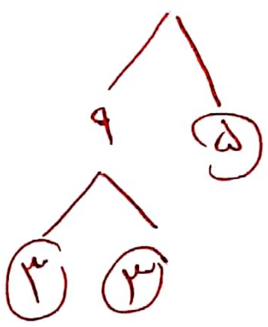
۲) مجذور ۳ + مکعب ۲ = ۹ + ۸ = ۱۷

$۳^{۲} = ۳ \times ۳ = ۹$ $۲^{۳} = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

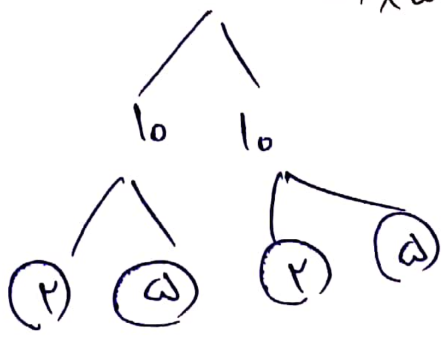
۳) $۱^{۲۰} + ۰^{۲۰} = ۱ + ۰ = ۱$

مثال) عددهای زیر را به کمک نمودار درختی تجزیه کنید و به صورت عدد توان دار بنویسید.

$۴۵ = ۳ \times ۳ \times ۵ = ۳^{۲} \times ۵^{۱}$

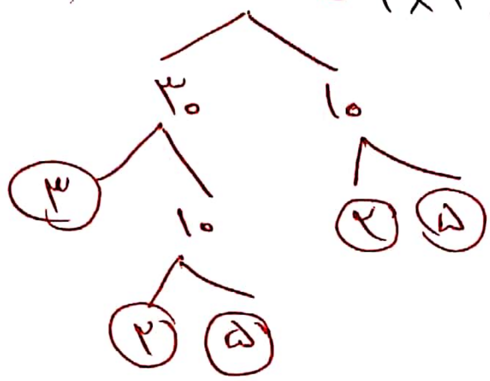


$۱۰۰ = ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵ = ۲^{۲} \times ۵^{۲}$

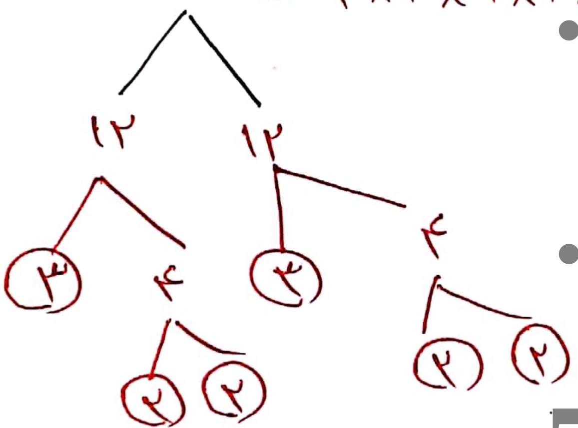


ص ۴

$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$



$144 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^2 \times 2^3$



مثال) تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $b \times b \times b \times b = b^4$

۲) $a^3 = a \times a \times a$

۳) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$

۴) $\frac{a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^2}{b^3}$

۵) $x \times x = x^2$

۶) $(x+y)(x+y) = (x+y)^2$

۷) $(ab)^3 = ab \times ab \times ab$

۸) $\frac{x \times x \times x \times x}{y \times y \times y \times y \times y} = \frac{x^4}{y^5}$

۹) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

۱۰) $(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3$

۱۱) $Z \times Z \times Z = Z^3$

کدام موارد نادرست و کدام مورد درست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید.

۱) $۵^۲ = ۱۰$ ✗ $۲۵ = ۵ \times ۵ = ۵^۲$

۲) $۴^۲ = ۴ \times ۲$ ✗ $۴^۲ = ۴ \times ۴ = \underline{۱۶}$

۳) $\left(\frac{۲}{۷}\right)^۲ = \frac{۴}{۴۹}$ ✓

۴) $۸^۲ = ۱۶$ ✗ $۸^۲ = ۸ \times ۸ = ۶۴$

۵) $\frac{۲}{۵}^۲ = \frac{۴}{۲۵}$ ✗ $\frac{۲^۲}{۵} = \frac{۴}{۵}$ فقط باید ۲ را به توان ۲ برسانیم

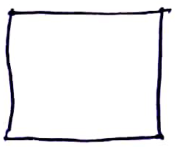
۶) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ = \frac{۴}{۱۶}$ ✗ $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۶}$

۷) $۲^۳ = ۳^۲$ ✗ $۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$
$۳^۲ = ۳ \times ۳ = ۹$ $۸ \neq ۹$

۸) $\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$ ✓

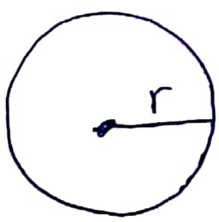
۹) $\left(\frac{۳}{۷}\right)^۲ = \frac{۹}{۷}$ ✗ $\left(\frac{۳}{۷}\right)^۲ = \frac{۳}{۷} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۹}{۴۹}$

مثال: به کمک توان حجم و مساحت های شکل زیر را بنویسید.

a 

یک ضلع × خودش = مساحت مربع

$S = a \times a \Rightarrow S = a^۲$



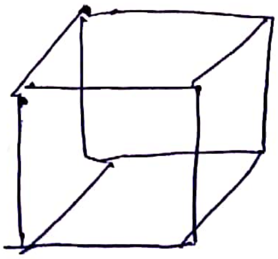
مساحت دایره = $۳٫۱۴ \times r \times r$

$S = \pi \times r^۲ \Rightarrow S = \pi r^۲$

حجم مکعب = یک ضلع × یک ضلع × یک ضلع

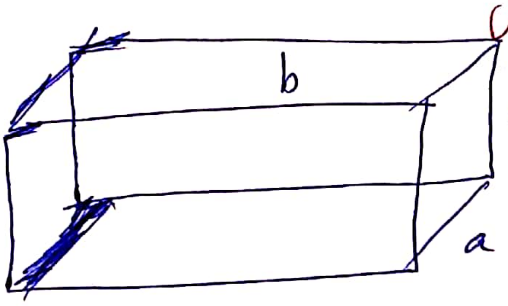
$V = a \times a \times a$

$V = a^3$



حجم مکعب مستطیل

$V =$ طول × عرض × ارتفاع



$V = a \times b \times a$

$V = a^2 b$

مثال) حاصل عبارت توان دارهای زیر را بیابید.

$2^2 = 2 \times 2 = 4$ $\quad 3^2 = 3 \times 3 = 9$ $\quad 4^2 = 4 \times 4 = 16$ $\quad 5^2 = 5 \times 5 = 25$

$6^2 = 6 \times 6 = 36$ $\quad 7^2 = 7 \times 7 = 49$ $\quad 8^2 = 8 \times 8 = 64$ $\quad 9^2 = 9 \times 9 = 81$

$10^2 = 10 \times 10 = 100$ $\quad 11^2 = 11 \times 11 = 121$ $\quad 12^2 = 12 \times 12 = 144$ $\quad 13^2 = 13 \times 13 = 169$

مجذور ۳ $= 3^2 = 3 \times 3 = 9$ $\quad$ مکعب ۵ $= 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ $\quad$ مکعب یک $= 1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\frac{2^3}{5^2} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{8}{25}$ $\quad (\frac{3}{5})^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$

$\frac{2^5}{9} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{9} = \frac{32}{9}$ $\quad 0.3^2 = 0.3 \times 0.3 = 0.09$

$1.1^2 = 1.1 \times 1.1 = 1.21$ $\quad 2.2^2 = 2.2 \times 2.2 = 4.84$

$0.5^2 = 0.5 \times 0.5 = 0.25$ $\quad 0.01^2 = 0.01 \times 0.01 = 0.0001$

$0.1^3 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.001$ $\quad 3.5^2 = 3.5 \times 3.5 = 12.25$

ص ۷

درس دوم، محاسبه عبارت توان دار

در ابتدا ترتیب انجام عملیات ریاضی را به صورت زیر بیان می کنیم.

۱- پرانتز ۲- توان ۳- ضرب و تقسیم ۴- جمع و تفریق

تذکر: در ترتیب عملیات همواره از سمت چپ شروع می کنیم.

مثال) حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $۲ - ۲ \times (۳^۲ - ۱) =$

مرحله اول $\rightarrow$ $۳^۲ - ۱ = ۹ - ۱ = ۸$ داخل پرانتز

مرحله دوم $۲ \times ۸ = ۱۶$ ضرب

مرحله سوم $۲ - ۱۶ = -۱۴$ تفریق

۲) $$\frac{۳ \times ۲ + ۴}{۵^۲ \times ۲^۳} = \frac{۶ + ۴}{۲۵ \times ۸} = \frac{۱۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

۳) $$۳ \times ۲^۲ - (۳^۲ + ۲) = ۳ \times ۴ - (۹ + ۲)$$
$$= ۱۲ - ۱۱ = ۱$$

۴) $$\frac{۱۲ \div (۷ - ۵) + ۳ \times ۵}{۳^۳ + ۴^۳} = \frac{۱۲ \div ۲ + ۱۵}{۲۷ + ۶۴} = \frac{۶ + ۱۵}{۹۱}$$
$$= \frac{۲۱}{۹۱}$$

۵) $$۲^۳ + ۱^۳ - ۲ \times ۳^۲ = ۸ + ۱ - ۲ \times ۹ = ۹ - ۱۸ = -۹$$

۶) $$(۱۰^۲ - ۵^۲) \times (۳^۲ \div ۱^۹) = \underbrace{(۱۰۰ - ۲۵)}_{۷۵} \times \underbrace{(۹ \div ۱)}_{۹} = ۶۷۵$$

حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $2^4 + 5^2 = 16 + 25 = 31$

۲) $2^4 \times 5^2 = 16 \times 25 = 400$

۳) $2^4 - 5^2 = 16 - 25 = -9$

۴) $3^4 \div 9 = 81 \div 9 = 9$

۵) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$

۶) $4^2 - 4 \times 2 = 16 - 8 = 8$

۷) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{4}{9} = \frac{81}{36} - \frac{16}{36} = \frac{65}{36}$

۸) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$

۹) $2^5 - 3^3 + 1^{10} = 32 - 27 + 1 = 5 + 1 = 6$

۱۰) $6^1 + 1^6 + 0^6 = 6 + 1 + 0 = 7$

۱۱) $2 - 2^2(3 - 2^3) = 2 - 4(3 - 8) = 2 - 4(-5) = 2 + 20 = 22$

۱۲) $2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2^1 = \underbrace{\cancel{32 - 16}}_{16} + \underbrace{\cancel{8 - 4}}_{4} + 2 = 22$

کدام یک درست و کدام یک نادرست است ؟ دلیل را توضیح دهید.

۱) $(۳+۲)^۲ = ۲^۲ + ۳^۲$ ✗ $(۳+۲)^۲ = ۵^۲ = ۲۵$
$۲^۲ + ۳^۲ = ۴+۹ = ۱۳$

۲) $(۴ \times ۳)^۲ = ۳^۲ \times ۴^۲$ ✓

۳) $(\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۳۲}{۲۲}$ ✗ $(\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۴}$

۴) $۴ \times ۳^۲ = (۴ \times ۳)^۲$ ✗ $۴ \times ۳^۲ = ۴ \times ۹ = ۳۶$
$(۴ \times ۳)^۲ = ۱۲^۲ = ۱۴۴$

۵) $۴^۲ \times ۵^۲ = ۲۰^۴$ ✗ $۴^۲ \times ۵^۲ = ۱۶ \times ۲۵ = ۴۰۰$
$۲۰^۴ = ۱۶۰۰۰۰$

۶) $۲^۲ \times ۲^۶ = ۲^۸$ ✓

۷) $۳^۲ \times ۲^۲ = ۶^۲$ ✓

حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $۲^۲ = ۲ \times ۲ = ۴$

۲) $(-۲)^۲ = (-۲) \times (-۲) = +۴$

۳) $(-۲)^۳ = (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = -۸$

۴) $(-۲)^۴ = (-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = +۱۶$

۵) $(-۲)^۵ = (-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = -۳۲$

۶) $(-۲)^۶ = (-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = +۶۴$

نکته: اگر یک عدد توان دار باید منفی باشد اگر به توان زوج برسد همواره + است
اگر به توان فرد برسد همواره منفی است.

نکته: عدد ۱- به توان عدد زوج برابر ۱+ است.

$(-1)^{\text{زوج}} = +1$

عدد ۱- به توان عدد فرد برابر ۱- است.

$(-1)^{\text{فرد}} = -1$

مثال) حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$-2^2 = -4$

$(-3)^3 = (-3)\times(-3)\times(-3) = -27$

$-2^4 = -16$

$(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = +16$

نکته:

$2^4 \to 2^3 \to 2^2 \to 2^1 \to 2^0$

$16 \xrightarrow[\div 2]{} 8 \xrightarrow[\div 2]{} 4 \xrightarrow[\div 2]{} 2 \xrightarrow[\div 2]{} ?\ 1$

$\Big\} \to 2^0 = 1$

هر عدد غیرصفر به توان صفر برابر یک است.

$a^0 = 1 \ ,\ a \neq 0$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$-5^2 = -25 \qquad (-5)^2 = +25 \qquad -1^4 = -1$

$(-1)^7 = -1 \qquad (-1)^4 = +1 \qquad -1^4 = -1$

$8^0 = 1 \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1 \qquad 0^7 + 2{,}1^0 = 0 + 1 = 1$

$3 + 4^0 = 3 + 1 = 4 \qquad -1^7 = -1 \qquad (-10)^0 = 1 \qquad 7^0 = 1$

$(-3)^3 = -27$

مثال) در جای خالی علامت > یا = یا < بگذارید.

$\cancel{3^5}_{1} \quad < \quad \cancel{3^1}_{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{9}\ \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \quad < \quad \cancel{3^0}_{1}$

$\cancel{5^0}_{0} \quad < \quad \cancel{7^0}_{1}$

$(-3) \quad = \quad (-3)^1$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad < \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad < \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$-\frac{1}{8} \qquad -\frac{1}{32} \qquad \frac{9}{4} \qquad \frac{27}{8}$

مثال) درستی یا نادرستی هر کدام را مشخص کنید. علت نادرستی را بیان کنید.

$(5+2)^0 = 5^0 + 2^0$ نادرست ✗ $\rightarrow (5+2)^0 = 7^0 = 1$ ، $5^0 + 2^0 = 1+1 = 2$

$\left(3\frac{1}{2}\right)^0 > \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ درست ✓ $\left(3\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ ، $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = +\frac{1}{9}$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 > 1$ درست ✓ $\left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ ، $1+1 > 1$ ، $2 > 1$

$5 + 2^0 = 7$ نادرست ✗ $5 + 2^0 = 5 + 1 = 6$

$3^0 + 4^0 + 7^0 = 1$ نادرست ✗ $3^0 + 4^0 + 7^0 = 1+1+1 = 3$

درست $\cancel{9^0}_{1} < \cancel{(-3)^2}_{9}$ ✓ $9^0 = 1$ ، $(-3)^2 = 9$

مثال) عددهای زیر را به صورت گسترده بنویسید و سپس به صورت توانی نمایش دهید.

$3457 = 3000 + 400 + 50 + 7 = 3\times10^3 + 4\times10^2 + 5\times10^1 + 7$

$23015 = 20000 + 3000 + 10 + 5 = 2\times10^4 + 3\times10^3 + 10^1 + 5$

$432 = 400 + 30 + 2 = 4\times10^2 + 3\times10^1 + 2$

$2001 = 2000 + 1 = 2\times10^3 + 1$

حل) حاصل عبارت های زیر را به ازای عددهای داده شده به دست آوریم.

$a^2 - ab \qquad a = 2 \qquad b = -2$

$(2)^2 - (2)(-2) = 4 + 4 = 8$

$a^2 - b^2 \qquad a = -3 \qquad b = -2$

$(-3)^2 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5$

$a^2 + a^2 b \qquad a = -1 \qquad b = 2$

$(-1)^2 + (-1)^2 \times (2) = +1 + (1)\times(2) = 1 + 2 = 3$

$a^3 - 3a^2 b \qquad a = -1 \qquad b = -2$

$(-1)^3 - 3(-1)^2(-2) = -1 - 3(1)(-2) = 1 + 6 = 7$

$a^3 - 2a^2 + ab^2 \qquad a = 1 \qquad b = -3$

$(1)^3 - 2(1)^2 + (1)(-3)^2 = 1 - 2 \times 1 + 9 =$

$1 - 2 + 9 = 8$

$a^2 - 2ab + b^2 \qquad a = -2 \qquad b = -3$

$(-2)^2 - 2(-2)(-3) + (-3)^2$

$= 4 - 12 + 9 = 13 - 12 = 1$

$a^4 - b^4 + 3a^3 b^2 \qquad a = -1$ و $b = -2$

$(-1)^4 - (-2)^4 + 3(-1)^3(-2)^2$

$+1 - (+16) + 3(-1)(+4)$

$1 - 16 - 12 = -27$

درس سوم : ساده کردن عبارت های توان دار

* در ضرب اعداد توان دار اگر پایه ها یکسان باشند، یکی از پایه را می نویسیم پس توان ها را باهم جمع می کنیم.

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

* در ضرب اعداد توان دار اگر توان ها یکسان باشند، یکی از توان ها را می نویسیم پس پایه ها را درهم ضرب می کنیم.

$$\boxed{a^n \times b^n = (a\times b)^n}$$

مثال) حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$4^2 \times 4^5 = 4^{2+5} = 4^7$ $\qquad a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$

$7^3 \times 7^3 = 7^{3+3} = 7^6$ $\qquad 8^2 \times 8^1 = 8^{2+1} = 8^3$

$x^2 \times x^4 = x^{2+4} = x^6$ $\qquad (\cancel{\tfrac{1}{2}})^2 \times (0/5)^3 = (0/5)^{2+3} = (0/5)^5$

$(-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^{4+3} = (-2)^7$ $\qquad (-4)^1 \times (-4)^3 = (-4)^{1+3} = (-4)^4$

$1/5^3 \times (\cancel{\tfrac{3}{2}})^4 = (1/5)^{3+4} = (1/5)^7$ $\qquad b^2 \times b^3 \times b^5 = b^{2+3+5} = b^{10}$

عبارت توان دار زیر را به صورت ضرب ۲ یا چند عبارت توان دار بنویسید.

$2^8 = 2^3 \times 2^5$ $\qquad 10^7 = 10^2 \times 10^5$

$5^9 = 5^4 \times 5^5$ $\qquad 10^7 = 10^4 \times 10^3$

مثال) با باز کردن عبارت توان دار، جواب را ساده کنید.

$5^4 = 5^2 \times 5^2 = 25^1 \times 25^1 = 25^2$ $\qquad 4^4 = 4^2 \times 4^2 = 16^1 \times 16^1 = 16^2$

$2^6 = 2^3 \times 2^3 = 8^1 \times 8^1 = 8^2$ $\qquad 7^4 = 7^2 \times 7^2 = 49 \times 49 = 49^2$

مثال: اگر $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ حاصل $۲^{۱۱}$ و $۲^{۱۲}$ و $۲^{۱۳}$ را بیابید. ص۱۴

$$۲^{۱۱}=۲^{۱۰}\times۲^{۱}=۱۰۲۴\times۲=۲۰۴۸$$

$$۲^{۱۲}=۲^{۱۰}\times۲^{۲}=۱۰۲۴\times۴=۴۰۹۶$$

$$۲^{۱۳}=۲^{۱۰}\times۲^{۳}=۱۰۲۴\times۸=۸۱۹۲$$

مثال) حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-۲)^{۵}\times(-۱)^{۵}=(-۲\times-۱)^{۵}=۲^{۵}$$

$$۳^{۲}\times۵^{۲}=(۳\times۵)^{۲}=۱۵^{۲}$$

$$(-۲)^{۷}\times۳^{۷}=(-۲\times۳)^{۷}=(-۶)^{۷}$$

$$\left(\frac{۲}{۷}\right)^{۳}\times۵^{۳}=\left(\frac{۲}{۷}\times۵\right)^{۳}=\left(\frac{۱۰}{۷}\right)^{۳}$$

$$\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۵}=\left(\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۳}}\times\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۴}_{۲}}\right)^{۵}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}$$

$$a^{۲}\times b^{۲}=(a\times b)^{۲}=(ab)^{۲}$$

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}\times(۲)^{۴}=\left(\frac{۱}{۳}\times۲\right)^{۴}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}$$

$$x^{۴}\times y^{۴}=(x\times y)^{۴}=(xy)^{۴}$$

$$(ab)^{۲}\times۷^{۲}=(ab\times۷)^{۲}=(۷ab)^{۲}$$

$$۷^{۴}\times۳^{۴}=(۷\times۳)^{۴}=۲۱^{۴}$$

مثال) عددهای توان دار زیر را باز کنید.

$$(xy)^{۲۰}=x^{۲۰}\times y^{۲۰}$$

$$۱۵^{۷}=(۳\times۵)^{۷}=۳^{۷}\times۵^{۷}$$

$$(xyz)^{۸}=x^{۸}\times y^{۸}\times z^{۸}$$

$$۱۰^{۵}=(۲\times۵)^{۵}=۲^{۵}\times۵^{۵}$$

$$۶^{۵}=(۲\times۳)^{۵}=۲^{۵}\times۳^{۵}$$

$$۱۲^{۷}=(۳\times۴)^{۷}=۳^{۷}\times۴^{۷}$$

$$(ab)^{۷}=a^{۷}\times b^{۷}$$

$$۲۰^{۶}=(۴\times۵)^{۶}=۴^{۶}\times۵^{۶}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید
تا جایی که امکان دارد ساده کنید.

(۱) $\underbrace{5^2 \times 5^4}_{\text{پایه‌ها یکسان} \to 5^6} \times 7^6 = \underbrace{5^6 \times 7^6}_{\text{توان‌ها یکسان}} = 35^6$

(۲) $\underbrace{7^2 \times 7^5}_{\text{پایه یکسان} \to 7^7} \times 3^7 = \underbrace{7^7 \times 3^7}_{\text{توان‌ها یکسان}} = 21^7$

(۳) $\underbrace{2^3 \times 6^3}_{\text{توان‌ها یکسان} \to 12^3} \times \underbrace{3^7 \times 4^7}_{12^7} = \underbrace{12^3 \times 12^7}_{\text{پایه‌ها یکسان}} = 12^{10}$

(۴) $(2^5 \times 3^2 \times 5) \times (2^2 \times 3^5 \times 5^6) = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 2^2 \times 3^5 \times 5^6$
$= \underbrace{2^5 \times 5^6 \times 5^1}_{5^{12}} \times \underbrace{3^2 \times 3^5}_{3^7} = 5^{12} \times 3^7$

(۵) $3^a \times 3^b = 3^{a+b}$

(۶) $5^7 \times 4^3 \times 5^2 \times 4^6 = \underbrace{5^7 \times 5^2}_{5^9} \times \underbrace{4^3 \times 4^6}_{4^9} = 5^9 \times 4^9 = 20^9$

(۷) $(3^7 \times 5^2 \times 10) \times (10^4 \times 5^5 \times 3^9) = 3^7 \times 3^9 \times 5^2 \times 5^5 \times 10^1 \times 10^4$
$= 3^{16} \times 5^7 \times 10^5$

(۸) $\underbrace{4^3 \times 5^3}_{20^3} \times 20^7 = 20^3 \times 20^7 = 20^{10}$

مثال) عددهای توان دار زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

3^5 و 4^{10} و 6^0 و 8^1 و 9^2

$6^0 \downarrow 1$ ، $8^1 \downarrow 8$ ، $9^2 \downarrow 81$

$$4^{10} = (2\times2)^{10} = 2^{10}\times 2^{10} = 2^{20}$$

$$6^0 \to 8^1 \to 9^2 \to 3^5 \to 4^{10}$$

درستی یا نادرستی هر کدام را مشخص کنید.

$3^2\times 2^3 = 6^5$ ✓

$4^3 + 2^3 = 6^3$ غ ✗

$3^2\times 2^2 = 6^2$ ✓

$4^1 + 3^1 = 7^1$ ✗

باید بین آن ها ضرب باشد

$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ ✗

$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

در جای خالی یکی از اعمال + یا × یا − یا ÷ را قرار دهید تا تساوی برقرار باشد.

$2^5 \square 8 = 4$ — $32 \boxed{\div} 8 = 4$

$3^2 \square 7^2 = 58$ — $9 \boxed{+} 49 = 58$

$(-7)^0 \square 8^1 = 3^2$ — $1 \boxed{+} 8 = 9$

$2^6 \square 16 = 2^0 \square 2^2$ — $64 \boxed{\div} 16 = 1 \boxed{\times} 4$

$4 = 4$

درس چهارم: جذر و ریشه

مثال: مساحت مربعی ۱۲۱ متر مربع است طول ضلع آن چقدر است؟

$11 \times 11 = 121$ ⟵ طول ضلع = ۱۱

در تساوی $5^2 = 25$ عدد ۲۵ را توان دوم یا مجذور عدد ۵ و عدد ۵ را ریشه دوم یا جذر ۲۵ می‌نامند.

تذکر: عدد ۵ و ۵- ریشه‌های دوم عدد ۲۵ است زیرا:

$5^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$

اعداد منفی ریشه‌ی دوم ندارند.

هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه‌ی دوم است.

جذر (رادیکال) $\sqrt{}$ ⟵ به ریشه‌ی دوم مثبت هر عدد رادیکال آن عدد می‌گوییم.

$9 \to +3,\ -3$ $3^2 = 9$ $(-3)^2 = 9$

$36 \to +6,\ -6$ $6^2 = 36$ $(-6)^2 = 36$

مثال) ریشه‌های دوم اعداد زیر را بیابید.

$\frac{1}{4} \to \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$49 \to 7,\ -7$ $7^2 = 49$ $(-7)^2 = 49$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{49} = 7$

مثال) حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

$-\sqrt{16} = -4$

$-\sqrt{81} = -9$

$-\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

$\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$

کدام یک درست و کدام نادرست است.

$\sqrt{36} = 6$ ✓

$\sqrt{36} = \cancel{\frac{12}{2}}$ ✗

$\sqrt{36} = 3$ ✗

$\sqrt{36} = \cancel{6}\,36$ ✗

$\cancel{\sqrt{36}} = -6$ ✗

$-\sqrt{36} = -6$ ✓

$\cancel{\sqrt{36}} < 6$ ✗

نکته: اعدادی که جذر کامل دارند عبارتند از:

$\sqrt{1} = 1$ و $\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{16} = 4$ و $\sqrt{25} = 5$ و $\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{49} = 7$ و $\sqrt{64} = 8$ و $\sqrt{81} = 9$ و $\sqrt{100} = 10$ و $\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{144} = 12$ و $\sqrt{169} = 13$ و $\sqrt{196} = 14$ و $\sqrt{225} = 15$ و ...

نکته: برای این که مشخص کنیم جذر یک عدد بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد باید ابتدا مربع کامل قبلی و مربع کامل بعدی آن عدد را مشخص کنیم و سپس جذر آن‌ها را بدست آوریم.

مثال) $\sqrt{3}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{3} < 2$

بین عددهای ۱ و ۲ قرار دارد.

$\sqrt{20}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

$16 < 20 < 25 \rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$

$4 < \sqrt{20} < 5$

بین دو عدد ۴ و ۵ قرار دارد.

$\sqrt{61}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

$49 < 61 < 64 \rightarrow \sqrt{49} < \sqrt{61} < \sqrt{64}$

$7 < \sqrt{61} < 8$

پس به عدد ۸ نزدیک‌تر است.

روش محاسبه‌ی جذر تقریبی یک عدد تا یک رقم اعشار

ابتدا مشخص می‌کنیم بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد سپس باید ببینیم به کدام عدد نزدیک‌تر است.
در ادامه وسط این دو عدد را مشخص کرده و به هر عددی که نزدیک‌تر است از وسط این دو عدد اره اضافه می‌کنیم تا به آن عدد برسیم. سپس جدولی رسم می‌کنیم و مجذور آن اعداد را بدست می‌آوریم و مجذور عددی که به آن عدد نزدیک‌تر باشد جواب جذر است.

مثال) جذر تقریبی $\sqrt{28}$ را بدست آورید.

$25 < 28 < 36 \rightarrow \sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36}$

$5 < \sqrt{28} < 6$

$\sqrt{28}$ بین دو عدد ۵ و ۶ است که به عدد ۵ نزدیک‌تر است.

$\frac{5+6}{2} = 5{,}5$

عدد	۵٫۵	۵٫۴	۵٫۳	۵٫۲	۵٫۱
مجذور	۳۰٫۲۵	۲۹٫۱۶	۲۸٫۰۹	۲۷٫۰۴	[illegible]

۲۸ نزدیک‌تر است باید از آن کوچکتر باشد

$\rightarrow \sqrt{28} \simeq 5{,}2$

مثال: جذر تقریبی $\sqrt{80}$ را بیابید.

$64 < 80 < 81 \rightarrow \sqrt{64} < \sqrt{80} < \sqrt{81} \Rightarrow 8 < \sqrt{80} < 9$

به عدد ۹ نزدیک‌تر است.

$\frac{8+9}{2} = 8{,}5$

عدد	۸٫۵	۸٫۶	۸٫۷	۸٫۸	۸٫۹	۹
مجذور	۷۲٫۲۵	۷۳٫۹۶	۷۵٫۶۹	۷۷٫۴۴	۷۹٫۲۱	۸۱

$\sqrt{80} \simeq 8{,}9$

چرا اعداد منفی جذر ندارند؟ $\sqrt{-4}$ تعریف نشده است.

فرض کنیم اعداد منفی دارای جذر باشند مثلا $\sqrt{-4}$ یک عدد باشد
پس باید این عدد دوبار در خودش ضرب شود تا -4 شود این
امکان پذیر نیست زیرا

$- \times - = +$

$+ \times + = +$

در هر صورت ضرب یک عدد در خودش با هر علامتی که باشد همواره مثبت است
که هیچ وقت منفی نمی شود.

جاهای خالی را پر کنید.

الف) ۷ و ۷- ریشه های دوم ___۴۹___ هستند. $(7)^2=(-7)^2=49$

ب) مجذور عدد صفر همان ___۰___ است. $0^2=0$

پ) اعدادی که جذرشان با خودشان برابر است ___۰___ و ___۱___ هستند.

ت) اگر عددی صفر نباشد توان دوم آن همیشه ___مثبت___ است.

ث) هر عدد مثبت دارای ___۲___ ریشه دوم است که یکی از آن ها قرینه دیگری است.

مقدار تقریبی $\sqrt{500}$ را بیابید.

$484 < 500 < 529 \rightarrow \sqrt{484} < \sqrt{500} < \sqrt{529}$

$22 < \sqrt{500} < 23$

به عدد ۲۲ نزدیک تر است.

عدد	۲۲٫۱	۲۲٫۲	۲۲٫۳	۲۲٫۴	۲۲٫۵
مجذور	–	۴۹۲٫۸۴	۴۹۷٫۲۹	۵۰۱٫۷۶	۵۰۶٫۲۵

$\sqrt{500} = 22.3$

۱- عبارت توان دار زیر را محاسبه کنید.

$$(۲^۳+۰^۴)^۱+۲^۲×۳^۲-۱^۳$$

$$(۸+۰)^۱+۴×۹-۱=۸+۳۶-۱=۴۳$$

۲- عبارت توان دار را تا جایی که ممکن است، ساده کنید.

$$(۰/۲۵)^۲×(\frac{۱}{۴})^۳×\frac{۱}{۴^۵}=(\frac{۱}{۴})^۲×(\frac{۱}{۴})^۳×(\frac{۱}{۴})^۵$$

$$=(\frac{۱}{۴})^{۲+۳+۵}=(\frac{۱}{۴})^{۱۰}$$

$$۴^۲×۸^۳×۶^۲×۳^۳=(۴^۲×۶^۲)×(۸^۳×۳^۳)$$

$$=۲۴^۲×۲۴^۳=۲۴^۵$$

۳- مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۳۲}$ را بنویسید.

$$۲۵<۳۲<۳۶ \to ۵<\sqrt{۳۲}<۶$$

به عدد ۶ نزدیک تر است.

عدد	۵/۵	۵/۶	۵/۷	۵/۸	۵/۹
مجذور	۳۰/۲۵	۳۱/۳۶	۳۲/۴۹	۳۳/۶۴	۳۴/۸۱

$$\sqrt{۳۲}\simeq ۵/۶$$

۴- ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱ را بیابید.

$$(۱۱)^۲=۱۲۱ \quad (-۱۱)^۲=۱۲۱$$

۱۱
-۱۱

۵- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\sqrt{۴۹}=۷ \quad -\sqrt{۱۲۱}=-۱۱ \quad -\sqrt{۲۵}=-۵$$

$$\sqrt{۱۲۱}=۱۱ \quad \sqrt{۱۶۹}=۱۳ \quad \sqrt{\frac{۴}{۴۹}}=\frac{۲}{۷}$$