

## فصل دوم - عددهای حقیقی

### درس اول: عددهای گویا

**اعداد گویا:** هر عدد که بتوان به صورت کسرنوشت عدد گویاست (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \text{ نمایش داده می شود.}$$

**نکته:** مجموعه عدد گویا را نمی توان با اعضا مشخص کرد زیرا اولین عدد بزرگتر از هر عدد گویا معلوم نیست.

**نکته:** مجموعه اعداد گویا را نمی توان روی محور اعداد مشخص کرد زیرا همه اعداد روی محور گویا نیستند.

**نکته:** بین دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

**پیدا کردن چند کسربین دو عدد کسری:** چندین روش وجود دارد که در اینجا به دو روش کاربردی می پردازیم.

**الف) مخرج مشترک:** ابتدا بین دو کسر مخرج مشترک میگیریم و کسرهایی بین آن دو کسر را می نویسیم حال اگر پیدا نشد صورت و مخرج کسر جدید را یکی بیشتر از تعداد کسرهایی خواسته شده ضرب میکنیم.

**مثال:** بین دو کسر  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{3}{4}$  سه کسرنویسید.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$$

ابتدا مخرج مشترک میگیریم:

حال اگر کسر بود می نویسیم اگر هم نبود چون سه کسر خواسته در یک واحد بیشتر یعنی ۴ ضرب میکنیم.

$$\frac{8}{12} \times \frac{4}{4} = \frac{32}{48} \qquad \frac{9}{12} \times \frac{4}{4} = \frac{36}{48}$$

کسرهایی بین  $\frac{32}{48}$  و  $\frac{36}{48}$  را می نویسیم.

$$\frac{32}{48} < \frac{33}{48} < \frac{34}{48} < \frac{35}{48} < \frac{36}{48}$$

**ب) روش میانگین:** در این روش دو کسر را با هم جمع میکنیم و حاصل را بر ۲ تقسیم یا در  $\frac{1}{2}$  ضرب میکنیم.

**مثال:** دقیقاً بین دو کسر  $\frac{2}{7}$  و  $\frac{3}{5}$  یک کسر پیدا کنید.

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{5}{5} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35} \rightarrow \frac{31}{35} \times \frac{1}{2} = \frac{31}{70}$$

مقایسه کردن عددهای گویا: به دو روش زیر مقایسه میکنیم:

**الف) به روش هم مخرج کردن:** ابتدا مخرج همه کسرها را یکسان و سپس مقایسه میکنیم

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{3} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{5}{2} \text{ و } \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{8}{12} \text{ و } \frac{9}{12} \text{ و } \frac{30}{12} \text{ و } \frac{2}{12} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{12} < \frac{3}{4} < \frac{5}{2}$$

(ب) تبدیل به اعشار: صورت را به مخرج تقسیم و خارج قسمت را می نویسیم

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید

$$\frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{7}{10} \rightarrow \frac{2}{5} = 0/40 \text{ و } \frac{3}{4} = 0/75 \text{ و } \frac{1}{2} = 0/50 \text{ و } \frac{7}{10} = 0/70$$

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

انواع اعداد گویا:

(الف) مختوم یا متناهی: اگر صورت را بر مخرج کسر تقسیم کنیم و باقی مانده صفر شود یا به عبارتی عددهای اعشاری متناهی بدست آید.

$$\frac{3}{4} = 0/75 \qquad \frac{6}{5} = 1/2$$

نکته: مخرج کسر را تجزیه کنیم و اعداد اول ۵ و ۲ و یا ۵ تنها بیاید.

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 2 \times 5} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3}{2 \times 2} \qquad \frac{2}{25} = \frac{2}{5 \times 5}$$

(ب) متناوب اگر در تقسیم صورت بر مخرج در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود به آن کسر متناوب می گویند. و خط تیره بالای عددها نشانه دوره تناوب و گردش عدد است مانند:

$$\frac{5}{11} = 0/454545000 = 0/4\bar{5}$$

$$\frac{2}{6} = 0/33333000 = 0/3\bar{3}$$

در متناوب ساده بعد از اعشار همه ی ارقام دوره گردش دارند.

$$\frac{7}{15} = 0/4666666 \dots = 0/4\bar{6}$$

$$\frac{11}{60} = 0/183333 \dots = 0/18\bar{3}$$

در متناوب مرکب بعد از اعشار یک یا چند رقم دوره گردش ندارند

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشد کسر متناوب ساده است.

$$\frac{5}{21} = \frac{5}{3 \times 7} \qquad \frac{2}{9} = \frac{2}{3 \times 3}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشد آن کسر متناوب مرکب است

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{3 \times 5} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5}{2 \times 3}$$

## ایستگاه سوال:

(۱) حاصل عبارتها را بدست آورید.

الف) 
$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

ب) 
$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{17}{6} + \frac{7}{2} = -\frac{17}{6} + \frac{21}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

(۲) بین دو کسر  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{2}{5}$  سه کسرنویسید

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{15}, \quad \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{9}{15} \times \frac{4}{4} = \frac{36}{60}, \quad \frac{10}{15} \times \frac{4}{4} = \frac{40}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{36}{60} < \frac{37}{60} < \frac{38}{60} < \frac{39}{60} < \frac{40}{60}$$

(۳) کدام کسر نمایش اعشاری مختوم و کدام متناوب دارد؟

الف)  $\frac{7}{6} = \frac{7}{2 \times 3}$  متناوب مرکب

ب)  $\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \times 3}$  متناوب ساده

ج)  $\frac{5}{21} = \frac{5}{3 \times 7}$  متناوب ساده

د)  $\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 2 \times 5}$  مختوم

درس دوم: عددهای حقیقی

اعداد گنگ یا اصم: اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آنها نامتناهی و دارای دوره تناوب نباشند

نکته: مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی  $Q^c$  یا  $Q'$  نمایش می دهند.

نکته: اگر  $n$  مربع کامل نباشد آنگاه  $\sqrt{n}$  عددی گنگ است (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند گنگ هستند)

نکته: عدد  $\pi$  چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است.

مثال: در جای خالی علامت  $\notin$  یا  $\in$  قرار دهید.

$-\frac{2}{5} \in Q$      $\sqrt{0/36} \notin Q$      $\sqrt{47} \notin Q$      $\pi \notin Q$      $3/14 \notin Q$      $1 - \sqrt{2} \notin Q$

۴۷ مربع کامل نیست    ۲ مربع کامل نیست

**نکته:** بین دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد

**مثال:** بین دو عدد طبیعی ۲ و ۳ چهار عدد گنگ بنویسید. (ابتدا دو عدد ۲ و ۳ را رادیکالی می‌کنیم برای اینکار در خودشان ضرب می‌کنیم و زیر رادیکال قرار می‌دهیم)  $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$

**مثال:** بین دو عدد ۴ و  $\sqrt{13}$  سه عدد گنگ بنویسید. (کافی است عدد ۴ را رادیکالی کنیم)

$$\sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < \sqrt{15/1} < \sqrt{16}$$

**مثال:** بین دو عدد  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{8}$  پنج عدد گنگ بنویسید.

$$\sqrt{7} < \sqrt{7/1} < \sqrt{7/2} < \sqrt{7/3} < \sqrt{7/4} < \sqrt{7/5} < \sqrt{8}$$

**مثال:** عدد  $\sqrt{10} + 2$  بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟

به طرفین ۲ واحد اضافه می‌کنیم

$$3 < \sqrt{10} < 4 \quad \longrightarrow \quad 2+3 < 2 + \sqrt{10} < 2+4$$

پس بین ۵ و ۶ قرار دارد  $5 < 2 + \sqrt{10} < 6$

**نمایش اعداد گنگ روی محور:**

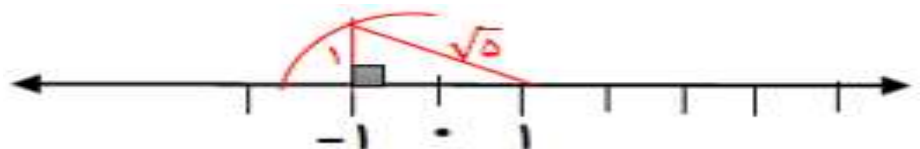
**مثال:** عدد  $\sqrt{17}$  را روی محور نمایش دهید.

ابتدا مشخص می‌کنیم  $\sqrt{17}$  بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد ( $4 < \sqrt{17} < 5$ ) چونکه پشت عددی قرار ندارد پس از مبدا شروع می‌کنیم و علامت  $\sqrt{17}$  هم مثبت است پس ۴ واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم و یک مثلث که رسم کردیم کمان مورد نظر را رسم می‌کنیم.



**مثال:** عدد گنگ  $1 - \sqrt{5}$  را روی محور نشان دهید

ابتدا مشخص می‌کنیم  $\sqrt{5}$  بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد ( $2 < \sqrt{5} < 3$ ) چونکه پشت عدد مثبت یک قرار دارد پس از مثبت یک شروع می‌کنیم و علامت  $\sqrt{5}$  هم منفی است پس ۲ واحد به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یک مثلث که رسم کردیم کمان مورد نظر را رسم می‌کنیم.



اعداد حقیقی: اجتماع اعداد گویا و گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد.

نکته: مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی  $R$  نمایش می دهند  $Q \cup Q^c = R$

نکته: اشتراک مجموعه اعداد گویا و گنگ تهی است.  $Q \cap Q^c = \emptyset$

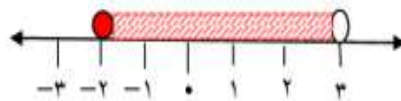
نکته: نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی ( $N$ ) و اعداد حسابی ( $W$ ) و اعداد صحیح ( $Z$ ) و اعداد گویا ( $Q$ ) و اعداد گنگ ( $Q^c$ ) و اعداد حقیقی ( $R$ ) به صورت زیر است:



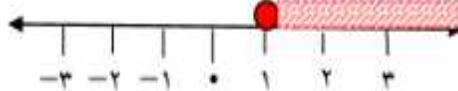
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتد است ( اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و اگر بدون سرکش باشد دایره توخالی قرار می دهیم)

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

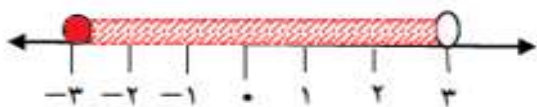
الف)  $A = \{x \in R \mid -2 \leq x < 3\}$



ب)  $B = \{x \in R \mid 1 \leq x\}$



مثال: مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.



$C = \{x \in R \mid -3 \leq x < 3\}$

ایستگاه سوال:

(۱) عدد  $-2 + \sqrt{17}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$4 < \sqrt{17} < 5$

$-2 + 4 < -2 + \sqrt{17} < -2 + 5 \Rightarrow -2 < -2 + \sqrt{17} < 3$

(۲) بین جفت عدد  $\sqrt{5}$  و ۳ زیر دو عدد گنگ بنویسید.

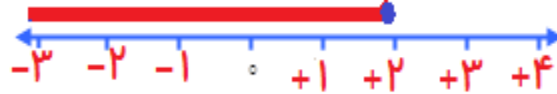
$\sqrt{5}$  و ۳  
 $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$

۳) مجموعه های زیر را روی محور نمایش دهید.

$$A = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 3\}$$



$$B = \{x \in R \mid x \leq 2\}$$



### درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی

قدرمطلق: فاصله نقطه نمایش یک عدد مانند  $a$  را از مبدا مختصات قدرمطلق  $a$  می نامیم و آن را به صورت  $|a|$  نشان می دهیم.

خواص قدرمطلق:

$$|a| = \begin{cases} a > 0 \rightarrow |a| = a & \rightarrow \left| +\frac{2}{3} \right| = +\frac{2}{3} \\ a = 0 \rightarrow |a| = 0 & \rightarrow |0| = 0 \\ a < 0 \rightarrow |a| = -a & \rightarrow |-4| = +4 \end{cases}$$

قرینه  $a$

مثال: عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید

$$|7 - 12 \div 4 \times 3 + 1| = |7 - 12 \div 4 \times 3 + 1| = |7 - 3 \times 3 + 1| = |7 - 9 + 1| = |-1| = +1$$

$$|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5} \quad \sqrt{9} \quad \sqrt{16}$$

چونکه  $\sqrt{9}$  از  $\sqrt{5}$  بیشتر و علامت آن مثبت است پس درون قدر مطلق مثبت می شود که خود عدد را می نویسیم

$$|-4 + \sqrt{10}| = +4 - \sqrt{10}$$

چونکه  $\sqrt{10}$  از  $\sqrt{16}$  بیشتر و علامت آن منفی است پس درون قدر مطلق منفی است که باید قرینه کنیم

نکته: اگر  $a > 0$  و  $b > 0$  باشد آنگاه:  $ab > 0$  (یعنی اگر دو عدد مثبت باشند حاصل ضرب آنها نیز مثبت است)

نکته: اگر  $a < 0$  و  $b < 0$  باشد آنگاه:  $ab > 0$  (یعنی اگر دو عدد منفی باشند حاصل ضرب آنها مثبت است)

نکته:  $a > 0$  و  $b > 0$  باشد آنگاه:  $|a + b| = a + b$

نکته:  $a < 0$  و  $b < 0$  باشد آنگاه:  $|a + b| = -(a + b)$

مقدار عددی: به جای حروف انگلیسی عددهای داده شده قرار می دهیم و در انتها حاصل قدر مطلق را محاسبه می کنیم

مثال: اگر  $a = 3$  و  $b = -2$  باشد، حاصل عبارت  $|a + b| - 2|ab|$  بدست آورید.

$$\begin{aligned} |a + b| - 2|ab| &= |3 + (-2)| - 2 \times |3 \times (-2)| = |1| - 2 \times |-6| = \\ &= +1 - 2 \times (+6) = +1 - 12 = -11 \end{aligned}$$

نکته: با توجه به مفهوم قدر مطلق رابطه زیر همیشه درست است.

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

مثال: حاصل هر عبارت را بدست آورید.

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = -1 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} = |3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$$

ایستگاه سوال:

۱) اگر  $a = -2$  و  $b = \sqrt{3}$  و  $c = 3$  حاصل عبارت  $|2a - b + c|$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} |2a - b + c| &= |2 \times (-2) - \sqrt{3} + 3| \\ &= |-1 - \sqrt{3}| = +1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

۲- عبارتهای زیر را با هم مقایسه کنید.

$$|-8 + 5| \bigcirc |-8| + |5|$$

$$|(-6)^2| \bigcirc |-6|^2$$

$$|-3| \bigcirc 8 + 5$$

$$|+36| \bigcirc (+6)^2$$

$$3 < 13$$

$$36 = 36$$

۳- عبارت زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید

$$\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2} = |\sqrt{8} - 3| = +3 - \sqrt{8}$$

ایستگاه سوالات پایان فصل:

۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید الف) حاصل $\sqrt{(-3)^2}$ برابر ۳- است. <input type="checkbox"/> ب) عددی وجود دارد هم حقیقی هم صحیح است. <input type="checkbox"/> پ) عدد $\pi$ عضو اعداد گویاست. <input type="checkbox"/> ت) عدد ... $26116116116$ / عددی گنگ است <input type="checkbox"/>
۲	جاهای خالی را کامل کنید. الف) عدد ..... دقیقا وسط دو عدد $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{6}$ است. پ) عدد حقیقی نامنفی به صورت ..... نمایش داده میشود. ت) عدد $\sqrt{4+9}$ عددی ..... است. (گویا، گنگ) ت) حاصل $\sqrt{(-6)^2}$ برابر ..... است.
۳	گزینه مناسب را انتخاب کنید نمایش اعشاری $\frac{5}{16}$ برابر است با: الف) $0/312$ (الف)      ب) $0/31$ (ب) ج) $0/3135$ (ج)      د) $0/3125$ (د) عدد $\sqrt{24} - 4 -$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ الف) $6 - 7$ (الف)      ب) $7 - 8$ (ب) ج) $9 - 8$ (ج)      د) $9 - 10$ (د)
۴	بین دو کسر $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ سه کسر دیگر بنویسید.
۵	بین دو عدد ۵ و ۶ سه عدد گنگ بنویسید.
۶	مجموعه زیر را روی محور نمایش دهید. $\{x \in R   -3 < x \leq 4\}$
۷	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $\sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} =$
۸	عدد گنگ $1 + \sqrt{7}$ را روی محور نمایش دهید.
۹	اگر $a = 2$ و $b = -3$ باشد، حاصل عبارت را بدست آورید. $5 a - b $
۱۰	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} =$