همراه با درسنامه

ریاضی نهم

@riazicafe

- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه نهم
- دوره اوّل متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

فصل۳: هندسه و استدلال

ندا بهرامی نیا – عبداله براتی

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

بسمه تعالی

درسنامه ، نکات ، مثال های کاربردی و حل چند تمرین از فصل سوم ریاضی پایه نهم (عبداله براتی – ندا بهرامی نیا)

فصل سوم : هندسه و استدلال

درس اول

استدلال: یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

در بسیاری از کارهای روزمره به استدلال نیاز پیدا می کنیم و از راه حل های مختلفی برای استدلال کردن استفاده می کنیم که درجه ی اعتبار آن ها با هم متفاوت است و ممکن است به نظر دیگران قابل اعتماد یا معتبر نباشد.

مثال: استدلالهای زیر را از نظر اعتبار مقایسه کنید.

الف) در تمام خانواده هایی که دو فرزند به نام علی و حسین دارند علی فرزند بزرگ تر بوده است پس دوست من که علی نام دارد از برادرش حسین بزرگتر است. (نامعتبر – بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)

ب) چون اعداد ۳ و ۵ و ۷ اعدادی اول و فرد هستند ، بنابراین همه ی اعداد فرد اولند.**(نامعتبر – بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)**

ج) چون همه ی قرص های مسکن خواب آور هستند پس در این قرص ها ماده ای هست که باعث خواب آلودگی می شود. **(معتبر – بر پایه ی استنتاج منطقی)**

برخی از انواع استدلال:

بیشتر بدانیم

استدلال ; توانمندی ارزشمند ذهن انسان است. برخی از انواع استدلال عبارتند از:

الف) شهودی (درک به کمک حواس)

ب) استقرایی(استدلال از جزء به کل بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات)

ج) مثال نقض

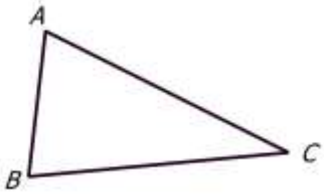
د)استدلال تمثیلی(یافتن نوعی شباهت بین دوچیز مثلا چون علی باهوش است پس برادرش هم باهوش است.

ه)استدلال استنتاجی(هنگامی که در استدلال از یک نظریه ی کلی استفاده می کنیم تا به فرضیه های جزئی برسیم) و ...

نکته: معتبرترین نوع استدلال در هندسه استدلال استنتاجی است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد ، اثبات می گوییم.

به مثال زیر توجه کنید.



مثال : الف) دو ارتفاع این مثلث را رسم کنید.

ب) آیا محل برخورد ارتفاع ها درون مثلث است؟

ج) آیا با مثال بالا می توان نتیجه گرفت محل برخورد دو ارتفاع هر مثلث همیشه درون مثلث است؟

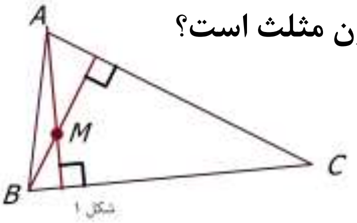
پاسخ:

الف) در شکل ۱ ارتفاع های دو مثلث را به کمک گونیا ترسیم کرده ایم.

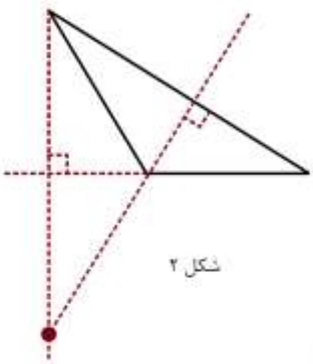
ب) بله طبق شکل ۱ محل برخورد با نقطه ی M نمایش داده شده است.

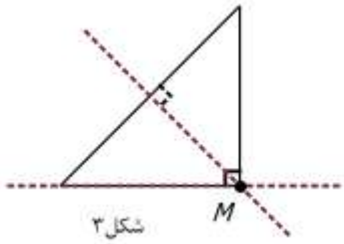
ج) خیر در شکل۲ و ۳ محل برخورد دو ارتفاع درون مثلث نیست.

در مثلث قائم الزاویه محل برخورد ارتفاع ها ، راس زاویه ی قائمه و در مثلث هایی با داشتن یک زاویه ی باز ، محل برخورد بیرون مثلث است



شکل ۱


شکل ۲



شکل ۳

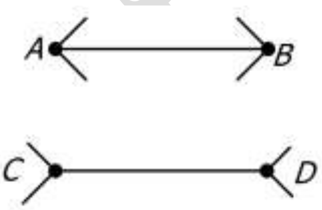
مثال نقض: برای رد درستی یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم. کافی است با یک مثال مناسب نشان دهیم آن ادعا نادرست است. به این مثال نادرست ، مثال نقض می گویند.

برای رد درستی هر یک از ادعاهای زیر از مثال نقض استفاده کنید.

الف) جمع دو عدد اول همواره مرکب است.   مثال نقض : جمع ۲ و ۵ عدد ۷ است و می دانیم ۷ عددی اول است.

ب) تمام شکل های هندسی زاویه دارند.   مثال نقض : دایره ، بیضی ، کره و ... زاویه ندارند

ج) همه ی اعداد اول فرد هستند.   مثال نقض : ۲ عددی اول ولی زوج است



به تصویر مقابل دقت کنید.

به نظر شما کدام پاره خط بزرگتر است؟

با استفاده از خط کش یا کاغذ شفاف از درستی پاسخ خود اطمینان پیدا کنید.

آیا می توان با مشاهده یا استفاده از حواس از درستی یک موضوع اطمینان حاصل کرد؟ چرا؟

خیر زیرا حواس ما خطا دارند و گاهی دچار خطای دید می شویم.

نکته: ضعیف ترین استدلال ، استدلال شهودی است.

سوال : برای هر کدام از مثال های زیر مشخص کنید استدلال به کار رفته معتبر است یا غیر معتبر؟چرا؟

رضا می گوید: معلم هیچ وقت روزهای دوشنبه از من درس نپرسیده است. امروز دوشنبه است پس امروز هم معلم از من درس نمی پرسد.

پاسخ: خیر زیرا بر اساس مشاهدات گذشته نتیجه ای گرفته است که ممکن است درست نباشد.

احمد می گوید: عدد ۳۵۹۱ بر ۳ بخش پذیر است چون جمع ارقامش ۱۸ و بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ: بله زیرا بر اساس اطلاعات قبلی می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع رقم هایش بر ۳ بخش پذیر باشد.

حسین می گوید: در لوزی مثل متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند.

پاسخ: بله زیرا بر اساس اطلاعات گذشته می دانیم لوزی نوعی متوازی الاضلاع است و در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند پس لوزی نیز این خاصیت را دارد.

امیر می گوید: جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است زیرا مثلث متساوی الاضلاع این ویژگی را دارد.

پاسخ: خیر زیرا با ذکر یک مثال درست نمی توان نتیجه ای را برای تمامی مثلث ها بیان کرد

سوال: یک استدلال بنویسید که شبیه استدلال زیر باشد.

- **تیم فوتبال مدرسه ی ما هر بار با لباس قرمز وارد زمین شده است مسابقه را باخته است. رنگ لباس امروز این تیم قرمز است پس امروز هم مسابقه را می بازد.**

پاسخ: همه ی فرزندان خاله ی من پسر هستند. پس فرزند دیگرش که ماه آینده به دنیا می آید هم پسر خواهد بود. (نتیجه گیری اشتباه بر اساس توجه به مشاهدات قبلی)

سوال: یک استدلال بنویسید که در آن فردی با توجه به مشاهدات قبل خود، نتیجه ای نادرست می گیرد.

پاسخ: هر بار باران می بارد حیاط مدرسه ی ما خیس می شود. امروز حیاط مدرسه خیس است پس حتما دیشب باران باریده است. (نادرست به این علت که ممکن است علت خیس بودن زمین باران نباشد وحیاط مدرسه را شسته باشند)

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

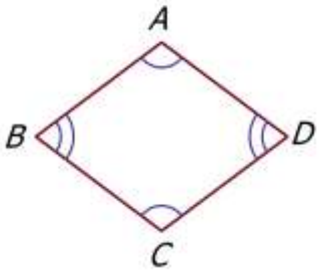
برای اثبات یا مشخص کردن درستی یک موضوع ابتدا باید بدانیم در مورد این موضوع چه اطلاعاتی وجود دارد.

فرض: به اطلاعات داده شده در صورت مساله فرض مساله (داده های مساله) می گویند.

بعد از تشخیص فرض ، باید دقت کنیم مساله چه چیزی را از ما می خواهد و باید چه چیزی را نشان بدهیم.

حکم: خواسته ی مساله را حکم مساله می گویند.

برای اثبات یک ادعا در روند استدلالمان از داشته های مساله (فرض) و اصولی که از قبل درستی آن ها برای ما مشخص شده است برای رسیدن به حکم مساله استفاده می کنیم.

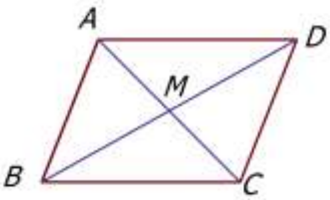


مثال: در هر کدام از مساله های زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

۱) در لوزی ، زاویه های رو به رو با هم برابرند.

پاسخ: برای نوشتن فرض و حکم می توان روابط را به زبان ریاضی نوشت

فرض	چهارضلعی ABCD لوزی است
حکم	زاویه های رو به رو برابرند(به زبان ریاضی: $\hat{B} = \hat{D}$ و $\hat{A} = \hat{C}$)



۲) در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند.

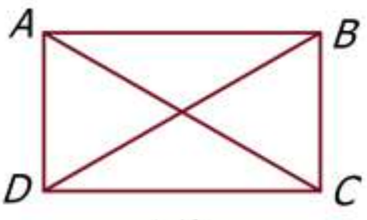
فرض	چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است
حکم	قطرها همدیگر را نصف می کنند(به زبان ریاضی: $\overline{AM} = \overline{CM}$ و $\overline{BM} = \overline{DM}$)

۳) در مثلث متساوی الساقین زاویه های مجاور به ساق های برابر، با هم برابرند.

فرض	ABC مثلث متساوی الساقین است(به زبان ریاضی: $\overline{AB} = \overline{AC}$)
حکم	زوایای مجاور به ساق با هم برابرند(به زبان ریاضی: $\hat{B} = \hat{C}$)

۴) در مستطیل قطرها با هم برابرند.

پاسخ:



شکل ۱

فرض	**ABCD مستطیل است**
حکم	**قطرهای مستطیل ، مساوی است**

با توجه به شکل ۱ فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:

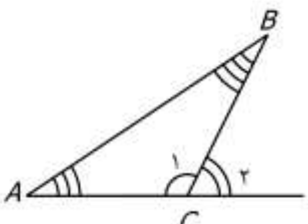
$$\text{فرض}: \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = ۹۰^\circ \\ \overline{AB} = \overline{CD} \ \text{و}\ \overline{AD} = \overline{BC} \\ AB \parallel CD \ \text{و}\ AD \parallel BC \end{cases} \qquad \text{حکم}: \overline{AC} = \overline{BD}$$

مثال: در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.

پاسخ:

فرض	**ABC مثلث است**
حکم	**اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.**

با توجه به شکل ۲ فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:



شکل ۲

$$\text{فرض}: \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \qquad \text{حکم}: \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_۲$$

حل:

ضلع AC را امتداد و زاویه ی خارجی C را مشخص می کنیم. بنا به دانسته های قبلی می دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است . همچنین دو زاویه $\widehat{C}_۲$ و $\widehat{C}_۱$ مکملند پس مجموع این دو زاویه هم ۱۸۰ درجه است بنابراین استدلال زیر را داریم:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{aligned}\right\} \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \cancel{\widehat{C}_۱} = \cancel{\widehat{C}_۱} + \widehat{C}_۲ \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_۲$$

دقت کنیم با استدلالی مشابه با استدلال بالا این خاصیت برای زاویه های خارجی دیگر مثلث هم برقرار است پس می توان این ویژگی را به هر زاویه از مثلث تعمیم داد.

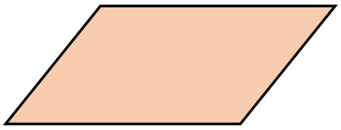
تعمیم : وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم (مانند زاویه ی خارجی C در مثال بالا) اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم ، در سایر عضوهای مجموعه (دو زاویه ی خارجی دیگر مثلث مثال بالا) باشد ، می توان درستی نتیجه را به همه ی عضوهای مجموعه (همه ی زوایای خارجی) تعمیم داد.

برای درک بهتر مفهوم تعمیم به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱) در هر متوازی الاضلاع ، ضلع های رو به رو دو به دو موازی و مساویند. می دانیم مربع ، مستطیل و لوزی هر سه نوعی متوازی الاضلاع هستند. بنابراین این ویژگی به این سه شکل هم تعمیم داده می شود.

یعنی در مربع ، مستطیل و لوزی نیز اضلاع رو به رو با هم موازی و برابرند.

مثال ۲) آیا استدلال های زیر معتبر هستند؟چرا؟



شکل ۱

مستطیل یک متوازی الاضلاع است
چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است
$\Leftarrow$ $ABCD$ مستطیل است

پاسخ: با یک مثال نقض نشان می دهیم استدلال نادرست است. (شکل۱ متوازی الاضلاعی که مستطیل نیست)

مثال ۳) آیا استدلال زیر معتبر است؟چرا؟

در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند
مربع نوعی لوزی است
$\Leftarrow$ در مربع قطرها عمود منصف یکدیگرند

پاسخ: استدلال درست است. زیرا مربع نوعی لوزی است پس خواص لوزی به مربع تعمیم داده می شود.

فرزندم! نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

ابتدا به تعاریف زیر دقت کنیم:

نیمساز : نیم خطی است که از راس شروع شده و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

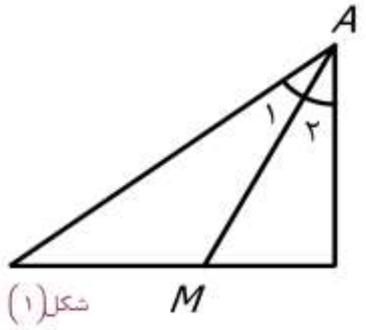
ارتفاع: پاره خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل یا امتداد آن عمود باشد .

عمودمنصف: خطی است که از وسط ضلع برآن عمود شده باشد.

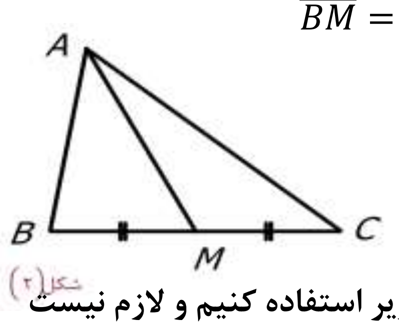
میانه: پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.

با توجه به نکات درس قبل، در صورت سوال از هر کدام از عبارات بالا می توان فرض مناسب را در نظر گرفت.

برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید.



مثال۱: در شکل(۱) پاره خط AM نیمساز زاویه ی A است یعنی: $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$



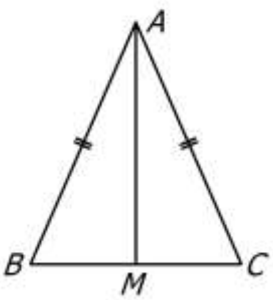
مثال۲: در شکل (۲) پاره خط AM میانه ی وارد بر قاعده ی BC است یعنی: $\overline{BM} = \overline{CM}$

برای اینکه نشان دهیم دو مثلث هم نهشت هستند می توانیم از یکی از حالتهای زیر استفاده کنیم و لازم نیست برابری تمامی اضلاع و زاویه ها بررسی گردد.

حالت اول: برابری سه ضلع (ض ض ض)

اگر هرسه ضلع مثلث اول با اضلاع مثلث دوم دو به دو برابر باشند آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال : مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده BC است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟



پاسخ:

میانه قاعده را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند ، پس $\overline{BM} = \overline{CM}$. بنابراین داریم:

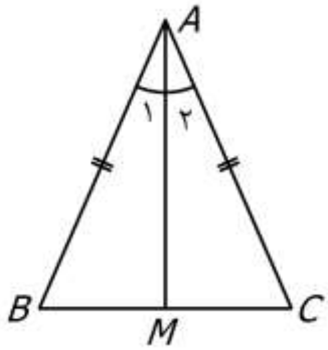
$$\left.\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{AC} & \text{: زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \overline{BM} = \overline{CM} & \text{: زیرا } AM \text{ میانه است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} & \text{: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

بنا به حالت (ض ض ض)

حالت دوم: برابری دو ضلع و زاویه ی بین آن ها (ض ز ض)

اگر دو ضلع از مثلث اول با دو ضلع از مثلث دوم برابر و زاویه ی بین آن دو ضلع در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال۲: مثلث **ABC** متساوی الساقین و **AM** نیمساز زاویه ی **A** است. چرا دو مثلث **ABM** و **ACM** هم نهشتند؟



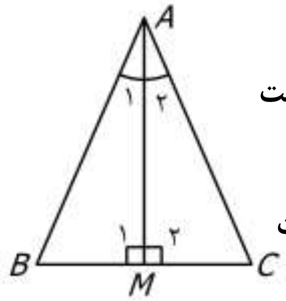
پاسخ: **AM** نیمساز زاویه ی **A** است پس : $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} : \text{زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} : \text{زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A} \text{است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} : \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

حالت سوم: برابری دو زاویه و ضلع بین آن ها (ز ض ز)

اگر دو زاویه از مثلث اول با دو زاویه از مثلث دوم برابر و ضلع بین آن دو زاویه در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال: در مثلث **ABC** پاره خط **AM** نیمساز زاویه ی **A** و بر **BC** عمود است. چرا دو مثلث **ABM** و **ACM** هم نهشتند؟



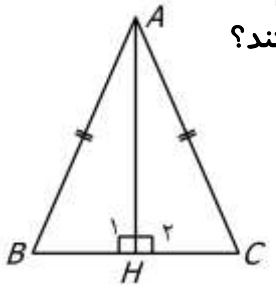
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰^\circ : \text{زیرا AM بر BC عمود است} \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} : \text{زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A} \text{است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} : \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

در مثلث های قائم الزاویه اگر وترها برابر باشند می توان از دو حالت دیگر نیز استفاده کرد

حالت چهارم: برابری وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه در مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AH ارتفاع آن است. چرا دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند؟



پاسخ:

ابتدا توجه کنیم چون AH ارتفاع است پس دو مثلث ABH و ACH قائم الزاویه هستند و AB و AC در دو مثلث وتر هستند

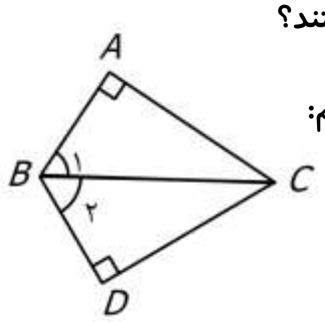
بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{H_۱} = \widehat{H_۲} = ۹۰^\circ \\ \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AH} \text{ ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک ضلع)}} \Delta ABH \cong ACH$$

حالت پنجم: برابری وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت هم مانند حالت قبل فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: در شکل داده شده BC نیمساز زاویه ی B است. چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟



پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها BC است داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\widehat{D}=۹۰^{\circ}\\ \overline{BC}=\overline{BC}\\ \widehat{B_۱}=\widehat{B_۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta ABC \cong DBC$$

بنا به حالت (وتر و یک زاویه ی تند)

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن

درس چهارم: برای حل یک مساله هندسی راه حل کلی وجود ندارد ولی می توان مراحلی را مشخص کرد و با دقت بیشتری به جواب رسید.

قدم های حل مساله:

۱) فهمیدن صورت مساله
۲) رسم شکل مناسب
۳) تشخیص فرض و حکم
۴) استدلال

ابتدا صورت مساله را با دقت می خوانیم و مفاهیم تشکیل دهنده ی آن را شناسایی می کنیم. اگر مساله فاقد شکل است با توجه به صورت مساله ، یک شکل مناسب برای آن رسم می کنیم. داده های مساله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را تشخیص می دهیم و در یک جدول می نویسیم و برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا می کنیم و مساله را اثبات می کنیم.

برای بهتر فهمیدن گام های حل مساله به سوال زیر توجه کنید.

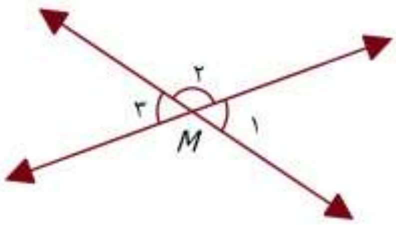
مثال۱: نشان دهید زوایای متقابل به راس با هم برابرند.

پاسخ: گام اول: زوایای متقابل به راس از برخورد دو خط راست ایجاد می گردد.

گام دوم: دو زاویه متقابل به راس رسم می کنیم و زاویه ها را نام گذاری می کنیم.

گام سوم:فرض مساله متقابل به راس بودن دو زاویه و حکم مساله نشان دادن تساوی آن هاست.

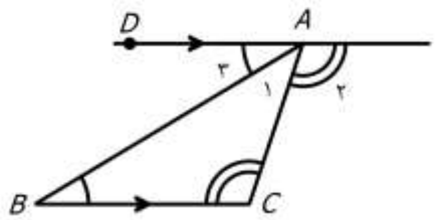
گام چهارم: دقت کنیم طبق شکل دو زاویه ی ۱ و ۲ مکمل و دو زاویه ی ۲ و ۳ نیز مکمل یکدیگرند. بنابراین طبق شکل زیر داریم:



$$\underbrace{\left.\begin{aligned}\widehat{M_1}+\widehat{M_2}&=180^\circ\\ \widehat{M_3}+\widehat{M_2}&=180^\circ\end{aligned}\right\}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \widehat{M_1}+\cancel{\widehat{M_2}}=\widehat{M_3}+\cancel{\widehat{M_2}} \Rightarrow \underbrace{\widehat{M_1}=\widehat{M_3}}_{\text{حکم}}$$

مثال۲: نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

پاسخ: مثلث دلخواه ABC را رسم می کنیم. از راس دلخواهی خطی موازی با ضلع مقابل به آن رسم می کنیم (مطابق با شکل ۱) و با توجه به خاصیت خطوط موازی و مورب و تساوی زوایا حکم را اثبات می کنیم.



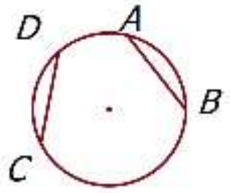
طبق فرض $AD \parallel BC$ و AB مورب است پس : $\widehat{B}=\widehat{A_3}$

طبق فرض $AD \parallel BC$ و AC مورب است پس : $\widehat{C}=\widehat{A_2}$

AD خط راست است پس : $\widehat{A_3}+\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=180^\circ$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{B}&=\widehat{A_3}\\ \widehat{C}&=\widehat{A_2}\end{aligned}\right\} \rightarrow \widehat{B}+\widehat{A_1}+\widehat{C}=\widehat{A_3}+\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=180^\circ$$

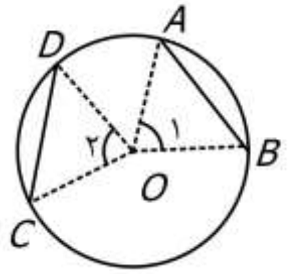
گاهی در اثبات یک حکم باید از تساوی اجزای متناظر استفاده کرد به مثال زیر و گام های حل مساله توجه کنید:



مثال ۳: نشان دهید در یک دایره وترهای مقابل به کمان های مساوی با هم برابرند.

گام اول: در صورت سوال از کمان و دایره نام برده شده بنابراین از مفاهیم مربوط به آن باید استفاده کرد.

گام دوم : برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم.



شکل ۱

گام سوم: در دایره ی رسم شده مرکز را با نقطه ی O نشان داده ایم و AB و CD طبق فرض مساله کمان هایی مساوی هستند. می خواهیم ثابت کنیم $\overline{AB} = \overline{CD}$ (حکم مساله)

فرض	$\widehat{AB} = \widehat{CD}$
حکم	$\overline{AB} = \overline{CD}$

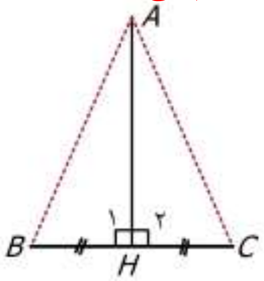
گام چهارم: برای نشان دادن این حکم دو مثلث در نظر میگیریم و هم نهشتی بین آن ها را اثبات و از این هم نهشتی تساوی اجزای آن ها را نتیجه می گیریم. بنابراین طبق شکل ۱ داریم:

چون کمان های AB و CD با هم برابرند زوایای مرکزی مقابل به آن ها هم با هم برابرند . از طرفی اضلاع دو مثلث شعاع های دایره هستند بنابراین با خلاصه کردن توضیحات بالا داریم:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{r} \overline{BO} = \overline{DO} \\ \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ \\ \overline{AO} = \overline{CO} \end{array}\right\}}_{\text{فرض}} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{AB} = \overline{CD}}_{\text{حکم}}$$

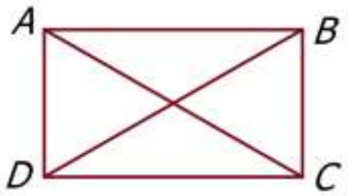
مثال ۴: نقطه ی A روی عمودمنصف BC است. می خواهیم نشان دهیم AB=AC (یعنی فاصله ی A از دو سر پاره خط برابر است.) نقطه ی A را به دو سر پاره خط وصل می کنیم و دو مثلث قائم الزاویه می سازیم.

دقت کنیم عمود منصف خطی است که بر پاره خط عمود شده و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.



$$\left.\begin{array}{ll} \overline{BH} = \overline{CH} & \text{: زیرا AH عمود منصف BC است} \\ \widehat{H}_۱ = \widehat{H}_۲ = ۹۰^\circ & : \\ \overline{AH} = \overline{AH} & \text{: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ABH \cong \triangle ACH$$

وقتی دو مثلث هم نهشت باشند اجزای متناظر آن ها با هم برابر است بنابراین داریم: $\overline{AB} = \overline{AC}$ پس حکم ما برای نقطه ی A اثبات شد.با توجه به مساله ی بالا با تغییر مکان نقطه ی A برای سایر نقاط روی عمود منصف با همان استدلال بالا و در حالت کلی می توان نشان داد هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد از دو سر آن به یک فاصله است و این خاصیت به تمام نقاط روی عمودمنصف تعمیم داده می شود.



تمرین ۱: نشان دهید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

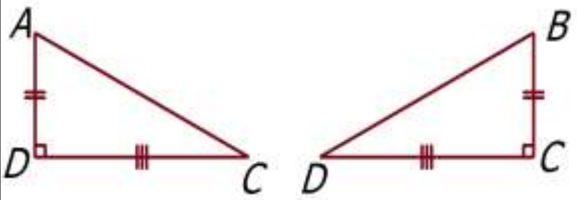
پاسخ:

برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم. در مستطیل داده شده AC و BD قطرهای مستطیل هستند.

می خواهیم نشان دهیم: $\overline{AC} = \overline{BD}$

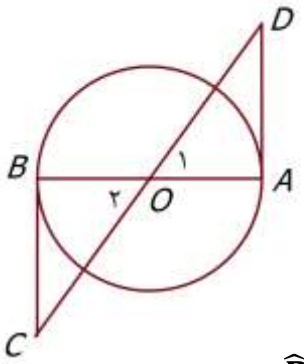
فرض مساله مستطیل بودن چهارضلعی است و می دانیم در مستطیل اضلاع رو به رو دو به دو مساوی و هر چهار زاویه قائمه هستند. با انتخاب دو مثلث مناسب و نشان دادن هم نهشتی بین آن ها می توان تساوی قطرها را نتیجه گرفت . دقت کنیم مثلثهایی را انتخاب کنیم که قطرهای AC و BD اجزای متناظر آن ها باشند.

می توان دو مثلث قائم الزاویه ی ADC و BDC را انتخاب کرد برای درک بهتر این دو مثلث را به صورت جداگانه می کشیم.



طبق فرض مساله و خواص مستطیل استدلال زیر را داریم:

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \widehat{D} = \widehat{C} = ۹۰^{\circ} \\ \overline{DC}: \text{ضلع مشترک هر دو مثلث} \end{matrix}\right\}}_{\text{فرض}} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta ADC \cong \Delta BDC \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{AC} = \overline{BC}}_{\text{حکم}}$$



تمرین۲: در شکل مقابل O مرکز و BC و AD بر دایره مماسند. نشان دهید : $\overline{AD} = \overline{BC}$

پاسخ:

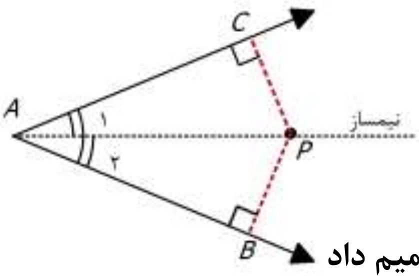
دقت کنیم شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است

پس زوایای A و B قائمه هستند.

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} \overline{OB} = \overline{OA} \\ \widehat{B} = \widehat{A} = ۹۰^{\circ} \\ \widehat{O_۲} = \widehat{O_۱} \end{matrix}\right\}}_{\text{فرض}} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \Delta BOC \cong \Delta AOD \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{BC} = \overline{AD}}_{\text{حکم}}$$

تمرین ۳: نشان دهید فاصله ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو سر زاویه برابر است.

پاسخ: نقطه ی P را روی نیم ساز زاویه ی A در نظر می گیریم.برای نشان دادن فاصله ی P از اضلاع زاویه، از نقطه ی P بردو ضلع زاویه عمود رسم می کنیم و نقطه ی برخورد با ضلع را B و C می نامیم. باید نشان دهیم : $\overline{BP}=\overline{CP}$. دقت کنیم AP وتر مشترک دو مثلث است پس می توان از حالت وتر و یک زاویه تند استفاده کرد.



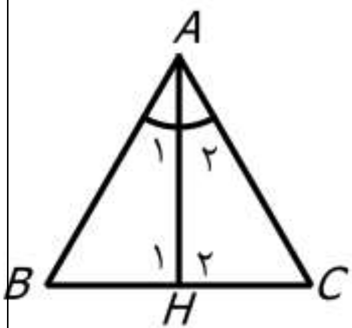
$$\underbrace{\left.\begin{array}{c}\widehat{C}=\widehat{B}=۹۰^\circ\\ AP:\text{وتر مشترک}\\ \widehat{A_1}=\widehat{A_2}\end{array}\right\}}_{\text{فرض}} \xRightarrow{\text{(وتر و یک زاویه ی تند)}} \Delta ACP\cong\Delta ABP \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{PC}=\overline{PB}}_{\text{حکم}}$$

دقت کنیم این استدلال را به هر نقطه ی دیگر روی نیمساز زاویه ی A می توان تعمیم داد

تمرین ۴: نشان دهید در هر مثلث متساوی الاضلاع نیمساز وارد بر قاعده ، عمودمنصف قاعده نیز می باشد.

پاسخ: ABC متساوی الاضلاع و AH نیمساز زاویه A است. باید نشان دهیم: $\widehat{H_1}=\widehat{H_2}=۹۰^\circ$ و $\overline{BH}=\overline{CH}$

نشان می دهیم دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند و از تساوی اجزای متناظر به خواسته ی مساله می رسیم.

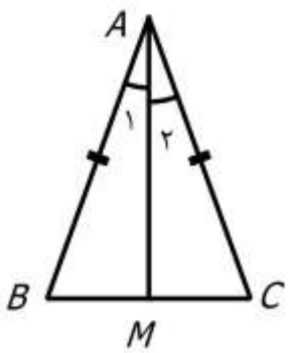


$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB}=\overline{AC}\\ \widehat{A_1}=\widehat{A_1}\\ AH:\text{در هر دو مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ABH\cong\Delta ACH \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \left\{\begin{array}{c}\widehat{H_1}=\widehat{H_2}=۹۰^\circ\\ \overline{BH}=\overline{CH}\end{array}\right.$$

با استدلالی مشابه استدلال بالا این خاصیت به نیمساز های وارد بر قاعده های دیگر هم تعمیم داده می شود.

تمرین ۵: نشان دهید در مثلث متساوی الساقین میانه ی وارد بر قاعده ، نیم ساز راس مثلث است.

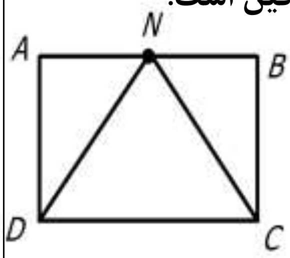
پاسخ:مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده ی BC است . نشان می دهیم: $\widehat{A_1}=\widehat{A_1}$



$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB}=\overline{AC}\\ \overline{MB}=\overline{MC}\\ AH:\text{در هر دو مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta ABH\cong\Delta ACH \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \widehat{A_1}=\widehat{A_1}$$

توجه کنیم که خاصیت اثبات شده برای میانه ی وارد بر قاعده برای میانه ی وارد بر ساق هم قابل تعمیم نیست ، زیرا میانه های دیگر ویژگی های میانه ی وارد بر قاعده ی BC را ندارند.

تمرین ۶: نقطه ی N وسط طول مستطیل ABCD است. ثابت کنید مثلث NBC متساوی الساقین است.

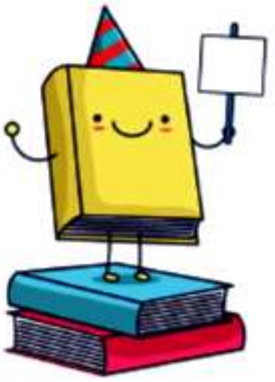


پاسخ: می خواهیم نشان دهیم $\overline{DN} = \overline{CN}$

برای اثبات این حکم دو مثلث AND و BNC که در آن ها DN و CN اجزای متناظرند را در نظر گرفته و هم نهشتی آن ها را اثبات و از تساوی اجزای متناظرشان حکم مساله را نتیجه می گیریم.

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AN}=\overline{BN}\\ \hat{A}=\hat{B}=\text{۹۰}^\circ\\ \overline{AD}=\overline{BD}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ABH \cong \Delta ACH \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \overline{DN}=\overline{CN} \Rightarrow \Delta NDC: \text{متساوی الساقین است}$$

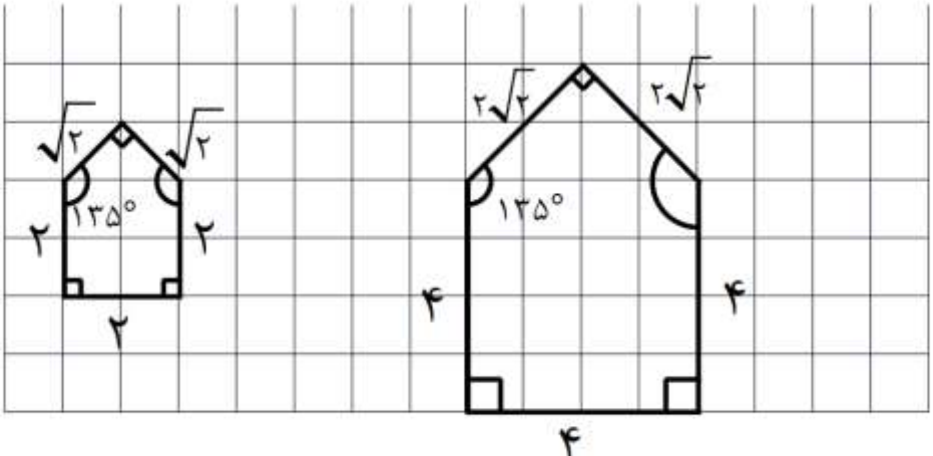
فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.




درس پنجم: شکل های متشابه

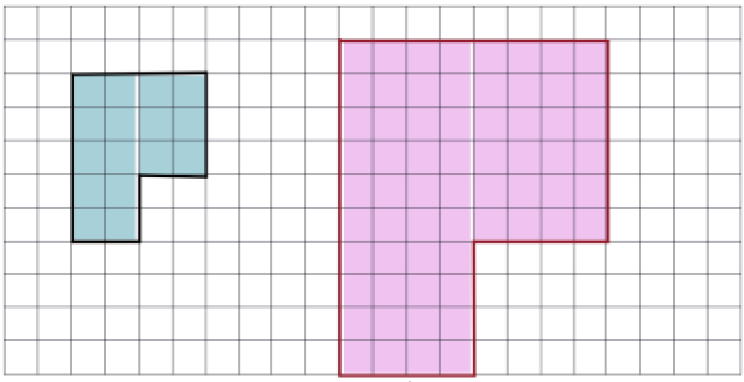
به تصویر مقابل نگاه کنید . در مورد شباهت ها یا تفاوت های این دو تصویر چه چیزی می توان گفت؟

مثال ۱) اندازه ی اضلاع و زوایای شکل های زیر را بنویسید و آن ها را با هم مقایسه کنید.



پاسخ: اندازه ی اضلاع و زوایا روی هر کدام نوشته شده است . با مقایسه ی دو شکل می بینیم زوایای متناظر با هم برابر و اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر کرده اند(دو برابر شده اند)

مثال ۲) در صفحه ی شطرنجی شکلی رسم کنید که اندازه ی اضلاعش دو برابر شکل رسم شده و زاویه های متناظر با هم برابر باشند.



پاسخ

هرگاه در دو چندضلعی با تعداد اضلاع برابر ، همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند(کوچک یا بزرگ شده یا تغییر نکرده باشند) و زوایای متناظر در هر دو شکل با هم برابر باشند آن دو چندضلعی با هم متشابهند.

به نسبت بین دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، **نسبت تشابه** می گویند.

نکته: دو شکل هم نهشت با هم متشابهند و نسبت تشابه آن ها ۱ است.

دو تصویر زیر متشابه نیستند چون متناسب نیستند.


مثال۳: نسبت تشابه دو مربع $\frac{۲}{۷}$ است. اگر ضلع مربع کوچکتر ۶۰ سانتیمتر باشد ضلع مربع بزرگتر چقدر است؟

پاسخ: با استفاده از نسبت تشابه و تناسب بین اضلاع داریم:

$\times ۳۰$

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{۲}{۷} = \frac{۶۰}{x} \qquad x = ۷ \times ۳۰ = ۲۱۰$$

مثال۴: مثلثی به اضلاع ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر با مثلثی که اضلاعش به ترتیب از کوچک به بزرگ $x - ۱$ و ۱۵ و $۲y + ۳$ است متشابهند.

الف) نسبت تشابه دو شکل را بنویسید.

ب) مقدار **x** و **y** را محاسبه کنید.

پاسخ: چون اضلاع دو مثلث به ترتیب کوچک به بزرگ نوشته شده اند پس تناسب بین اضلاع به صورت زیر است:

$\frac{۴}{x-۱} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۷}{۲y+۳}$ پس نسبت تشابه آن ها $\frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$ یا ۱ به ۳ است.

با تشکیل تناسب اضلاع و محاسبه ی آن ها داریم:

$$۲y + ۳ = ۳ \times ۷ = ۲۱ \rightarrow \quad ۲y = ۲۱ - ۳ = ۱۸ \quad \rightarrow y = ۱۸ \div ۲ = ۹$$

$$x - ۱ = ۴ \times ۳ = ۱۲ \quad \rightarrow \quad x = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

> در درس مطالعات اجتماعی با نقشه و کاربرد نقشه آشنا شدید . نقشه ها شکل های متشابه با طبیعت می باشند و در نقشه نسبت تشابه را مقیاس می نامند. در مطالعات هشتم در مورد مقیاس در نقشه مطالبی را آموخته اید.

مثال۵: مقیاس یک نقشه ۲۰۰۰۰ : ۱ است. اگر فاصله ی دو مدرسه در نقشه**cm** ۴ باشد ، فاصله ی این دو میدان در واقعیت چقدر است؟

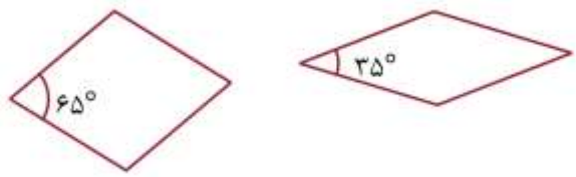
$\times ۴$

$$\frac{\text{فاصله در نقشه}}{\text{فاصله ی واقعی}} = \frac{۱}{۲۰۰۰۰} = \frac{۴}{x} \qquad x = ۴ \times ۲۰۰۰۰ = ۸۰۰۰۰\ cm = ۸۰۰\ m$$

مثال۶: با یک مثال نشان دهید جملات زیر نادرستند.

الف) هر دو لوزی دلخواه متشابهند.

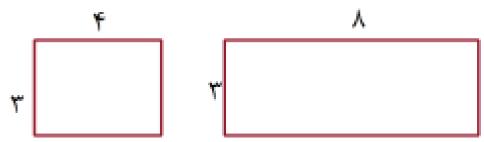
در این دو شکل زوایای متناظر برابر نیستند



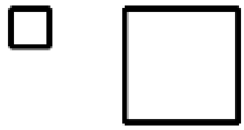
ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند.

در این دو شکل اضلاع متناظر متناسب نیستند

(نسبت طول ها ۱ به ۲ است ولی عرض ها برابرند)



نکته۱: هر دو مربع دلخواه و هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه و در حالت کلی هر دو چندضلعی منتظم با تعداد اضلاع مساوی دلخواه با هم متشابهند.



مثال۷: اضلاع دو مربع داده شده ۱ و ۳ سانتیمتر است.

الف) نسبت تشابه دو مربع را بنویسید. $\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{۱}{۳}$

ب) محیط دو مربع را محاسبه کنید و نسبت محیط دو مربع را محاسبه کنید. چه رابطه ای با نسبت تشابه دو مربع و نسبت محیط های آن ها وجود دارد؟

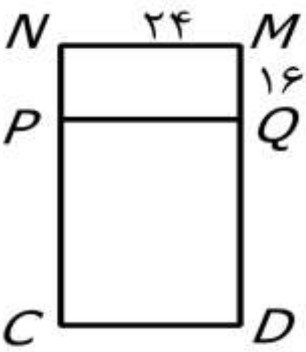
نسبت محیط دو مربع با نسبت تشابه آن ها برابر است. $\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{\text{محیط مربع کوچک}}{\text{محیط مربع بزرگ}}$

ج) مساحت دو مربع را محاسبه کنید و نسبت مساحت دو مربع را محاسبه کنید. چه رابطه ای با نسبت تشابه دو مربع و نسبت مساحت های آن ها وجود دارد؟

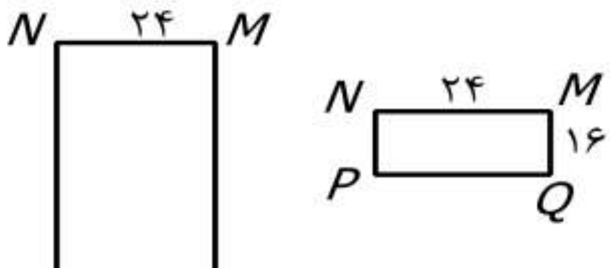
نسبت مساحت دو مربع با مجذور نسبت تشابه آن ها برابر است. $(\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹} = \frac{\text{مساحت مربع کوچک}}{\text{مساحت مربع بزرگ}}$

نکته۲: اگر نسبت تشابه دو شکل $\frac{a}{b}$ باشد نسبت محیط های آنها $\frac{a}{b}$ و نسب مساحت آن ها $(\frac{a}{b})^۲$ است.

مثال۸: دو مستطیل MNPQ و MNCD متشابهند. اندازه ی پاره خط NC را محاسبه کنید.



پاسخ: ابتدا برای تشخیص بهتر اضلاع دو مستطیل را جداگانه ترسیم می کنیم (شکل۱)



شکل ۱

دقت کنیم طول مستطیل کوچک (MN و PQ) و عرض مستطیل بزرگ (MNوCD) با هم برابرند

بنابراین: $$\frac{MN}{NC} = \frac{MQ}{MN} \Rightarrow \frac{۲۴}{NC} = \frac{۱۶}{۲۴} \Rightarrow NC = \frac{۲۴\times۲۴}{۱۶} = ۳۶$$

مثال۹) مثلثی به اضلاع ۵ و ۳ و ۴ با مثلثی دیگر به محیط ۳۶ متر متشابه است . اضلاع مثلث بزرگتر را محاسبه کنید.

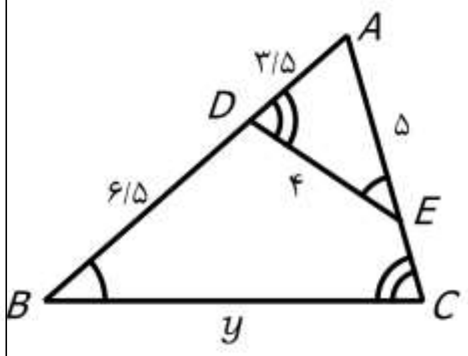
پاسخ: محیط مثلث اول برابر است با : $p_1 = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$

طبق نکته ی۲ نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط آن ها برابر است

پس $\text{نسبت تشابه} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$

بنابراین اضلاع مثلث دوم سه برابر مثلث اول و به ترتیب ۱۵ و ۹ و ۱۲ است.

مثال۱۰) دو مثلث ABC و ADE متشابهند و زوایای متناظرشان در شکل مشخص شده است. تناسب بین اضلاع را بنویسید و مقدار y را محاسبه کنید.



پاسخ : با توجه به تساوی زوایای متناظر اضلاع متناسب را مشخص می کنیم.

$\widehat{B} = \widehat{E}$ پس اضلاع مقابل به این دو زاویه یعنی AC و AD با هم متناسبند.

$\widehat{C} = \widehat{D}$ پس اضلاع مقابل به این دو زاویه یعنی AB و AE با هم متناسبند.

زاویه ی A در هر دو مثلث مشترک است پس اضلاع روبه رو به آن در دو مثلث یعنی BC و DE با هم متناسبند .

با توضیحات بالا تناسب بین اضلاع برابر است با : $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$

دقت کنیم $\overline{AB} = ۶/۵ + ۳/۵ = ۱۰$

پس : $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{۵}{۱۰} = \frac{۴}{y} \rightarrow y = \frac{۴\times۱۰}{۵} = ۸$

فرزندم! نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان