

عبارتهای گویا

عبارت گویا چیست؟ کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد.

مثال

$$\frac{2x+1}{x+1}, \frac{x^2-y^2}{x^3-4x+y^2}, \frac{2}{3}, 2xy$$

نکته: اگر در صورت و مخرج یک عبارت کسری یک یا چند جمله‌ای یا چند جمله‌ای برقرار نباشد آن عبارت گویا نیست. (رابطه‌های هارو قدر مطلقى‌ها و ...)

مثال / عبارت‌هاى زیر گویا هستند یا نه؟

$$\frac{\sqrt{x}}{2x+1}, \frac{|x|+2}{|xy|-2x}, \frac{xy-1}{x^3-x^2}$$

نکته: هر عدد گویا یک عبارت گویاست اما هر عبارت گویا یک عدد گویا نیست.

مخرج عبارت  $\frac{x^2+3}{x-1}$  را با ازای  $x=2$  و  $x=1$  بدست آورده

$$x=2 \Rightarrow \frac{2^2+3}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0} = \text{تعریف نشده}$$

مخرج عبارت  $\frac{x-1}{x^2+6x+9}$  با ازای چه مقادیری تعریف نشده است.

$$x^2+6x+9=0$$

$$(x+3)^2=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$$

تعریف نشده = مخرج صفر شود

نکته: دامنه عبارت‌هاى گویا اعدادی هستند که مخرج آن‌ها صفر نمی‌گردد.

(یا در آوری) اگر حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر باشد عددهاى مساوى آن صفر است.  
 $ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

تمرین: دامنه عبارت‌هاى زیر را بدست آورده

$$1) \frac{3}{x^2-1} \quad \begin{cases} x^2-1=0 \\ (x-1)(x+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$\text{دامنه } D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

۲)  $\frac{x-1}{3x^2-7a}$   $3x^2-7a=0$   $x-a=0$   $\frac{x-a=0}{x=a}$   $x+a=0$   $\frac{x+a=0}{x=-a}$   $D = \mathbb{R} - \{\pm a\}$

۳)  $\frac{3a}{a^2-19}$   $a^2-19=0 \Rightarrow (a^2+2)(a+2)(a-2)=0$   
 $\neq 0$   $a=-2$   $a=2$   
 $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

۴)  $\frac{a-3}{3a^3-2a^2-4a}$   $3a(a^2-2a-4)=0$   
 $3a(a-2)(a+2)=0$   
 $a=0$   $a=2$   $a=-2$   
 $D = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

+ ۵)  $\frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}} \Rightarrow$

نکته: برای ساده کردن کسرها عبارت گویا ابتدا آنرا مخزنه در صورت و مخزنج را ساده کنیم

عین: ساده کنیم:

۱)  $\frac{xy-1+xy^2}{x^2-4y^2} = \frac{xy(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{xy}{x+2y}$

۲)  $\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x-5} = \frac{(x+5)(x+2)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+2}{x-1}$

۳)  $\frac{y^4+3y^3+2y^2}{y^2+2y} = \frac{y^2(y^2+3y+2)}{y(y+2)} = \frac{y^2(y+2)(y+1)}{y(y+2)} = y(y+1)$

+ ۴)  $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$

جواب د

$$ع) \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2(x-1) - 4(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \frac{x+2}{1} = x+2$$

تقریب : در مربع چه عبارتی قرار می گیریم :

$$\frac{x^2 - 10x + 25}{4x^2 - 20x} = \frac{x^2 - 25}{\square}$$

همه عملیات را تجزیه می کنیم

$$\frac{(x+5)^2}{4x(x-5)} = \frac{(x+5)(x-5)}{\square}$$

ساده می کنیم

$$\frac{1}{4x} = \frac{x+5}{\square} \Rightarrow \square = 4x(x+5) = 4x^2 - 20x$$

نکته : برای بدست آوردن ضرب و تقسیم عبارات گویا ابتدا همه صورت ها را تجزیه کرده و سپس تا جایی ممکن ساده می کنیم

تجزیه : ساده کن

$$۱) \frac{a^2 - 4a + 4}{4ab - 1ab} \times \frac{6ab + 11ab}{a^2 + a - 6} = \frac{(a-2)^2}{4ab(a-2)} \times \frac{7ab(a+3)}{(a-2)(a+3)} = \frac{7}{4}$$

$$۲) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} \times \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+1)} = 1$$

$$۳) \frac{x^2 - x}{x - 1} \div \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 4} \div \frac{x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \times \frac{x^2+2x+4}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x-2}$$

صورت را غرض

$$۴) \frac{3x^2y^3 - 5xy^2}{-yx^2} \div \frac{25x^2 - 9y^2}{5xy + 3y^2} \times \frac{x^2}{y^2} =$$

$$\begin{aligned}
 \text{ع) } \frac{3xy^2 - 2xy^2}{-yx^2} &= \frac{2xy^2 - 2xy^2}{2xy + 3y^2} \times \frac{x^2}{y^2} = \\
 &= \frac{xy^2(2y - 2x)}{-yx^2} \times \frac{y(2x + 3y)}{(2x - 3y)(2x + 3y)} \times \frac{x^2}{y^2} = 1
 \end{aligned}$$

نکته: برای جمع و تفریق عبارات کسری باید ابتدا مخرج مشترک پیدا کنیم.

$$\text{۱) } \frac{3x-4}{12} - \frac{2x+4}{18} = \frac{3(3x-4) - 2(2x+4)}{36} = \frac{9x-12-4x-8}{36} = \frac{5x-20}{36}$$

$$\text{۲) } \frac{a+b}{a} - \frac{b-a}{b} = \frac{b(a+b) - a(b-a)}{ab} = \frac{ba + b^2 - ab + a^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$\text{۳) } \frac{x-3}{4x^2} - \frac{3+2x^2}{12x^3} + \frac{3}{x} = \frac{3x(x-3) - (3+2x^2) + 36x^2}{12x^3} = \frac{3x^2 - 9x - 3 - 2x^2 + 36x^2}{12x^3} = \frac{34x^2 - 9x - 3}{12x^3}$$

نکته: مخرج مشترک = ۳۶ = ابتدا تجزیه پس عامل مشترک با بران بیشتر و عامل غیر مشترک

$$\begin{aligned}
 \text{۴) } \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1} &= \frac{x(x+1) + (x-1) - (4x-2)(1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + x - 1 - 4x + 2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{۵) } \frac{3x^2-3x}{x^2-3x+2} + \frac{2}{2-x} = \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x-2)} + \frac{x}{-(x-2)} = \frac{3x}{x-2} - \frac{x}{x-2} = \frac{2x}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{۶) } \frac{-4}{x^2+2x-3} + \frac{2}{x^2+x-6} &= \frac{-4}{(x+3)(x-1)} + \frac{2}{(x+3)(x-2)} = \\
 &= \frac{-4(x-2) + 2(x-1)}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{-4x+8+2x-2}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{-2x+6}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{۷) } \frac{ax^2+b}{2x-1} + \frac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2} - \frac{ax^2-b}{2x+1} =$$

نکته: عبارت‌ها گویای مرکب عبارتند که صورت و مخرج آن‌ها عبارت گویای دیگری

مخرج ساده کنید

$$1) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}} = \frac{\frac{a+1-a}{a(a+1)}}{\frac{a+1+a}{a(a+1)}} = \frac{\frac{1}{a(a+1)}}{\frac{2a+1}{a(a+1)}} = \frac{1}{2a+1}$$

$$2) \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - 2x + 6}{x^2}}{\frac{x^2 - x - 2}{x^2}} = \frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$3) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{-\frac{x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

مخرج: اگر  $\frac{ax^2 - ax}{fx} \times \frac{3x+6}{x^2+x-2} = 6$  مقدار  $a$  را بدست آید

$$\frac{ax(x-1)}{fx} \times \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 6$$

ابتدا تجزیه می‌کنیم

$$\frac{a}{f} \times x^3 = 6 \Rightarrow \frac{3}{2} a = 6 \Rightarrow a = 4$$

پس باید ساده کرد

مخرج: مقدار  $a, b$  را بدست آید

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{ax-a+bx+b}{(x+1)(x-1)} = \frac{(a+b)x - a+b}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a+3=2 \Rightarrow |a=1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b=1 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\frac{vx-d}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

$$\frac{vx-d}{x^2-2x-3} = \frac{ax+a+bx-3b}{(x-3)(x+1)} = \frac{(a+b)x + a-3b}{x^2-2x-3}$$

$$\begin{cases} a+b=v \\ a-3b=-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+3b=3v \\ a-3b=-d \\ \hline 4a=3v-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=v \\ 3+b=v \Rightarrow |b=3| \end{cases}$$

نقده تقسیم بر جمله برکت جمله : (مانند عددی که تعداد را عمل می کنیم)

$$80x^3y^2z^5 \div 14xy^3 = \frac{80x^3y^2z^5}{14xy^3} = 2x^2yz^5$$

تقسیم چند جمله بر یک جمله : هر جمله صورت را بر جمله مخارج تقسیم می کنیم. مثال /

$$(1x^5y^6 - 14x^2y^2 + 2y^3) \div (-2x^2y) = \frac{1x^5y^6 - 14x^2y^2 + 2y^3}{-2x^2y} =$$

$$= \frac{1x^5y^6}{-2x^2y} + \frac{14x^2y^2}{2x^2y} - \frac{2y^3}{2x^2y} = -\frac{1}{2}x^3y^5 + 7y - \frac{1}{x^2}y^2$$

تقسیم چند جمله بر چند جمله : ابتدا مقوم و مقوم کس را بر حسب توان ها نزولی متغیر می نوسیم

مخرج مقوم کس :  $\frac{مقوم کس}{مخرج مقوم}$  باقی مانده

$$1) \quad \begin{array}{r} 6x^2 - 24x + 12 \\ - 4x^2 + 24x \\ \hline -2x + 12 \\ - 2x - 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\frac{x-4}{6x-2} \quad \frac{4x^2}{x} = 4x$$

27	Δ
- 25	Δ
-----	
2	

نوع : تقسیم ناجایی ادامه دارد که درص باقی مانده از درص مقوم کس کمتر شود.

$$2) \quad \begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x - 1 \\ - 5x^2 + 5x \\ \hline x - 1 \\ - x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3) \quad \begin{array}{r} 2x^5 + x^4 - x^3 + 1 \\ - 2x^5 + 2x^4 \\ \hline 3x^4 - x^3 + 1 \\ - 3x^4 + 3x^3 \\ \hline 2x^3 + 1 \\ - 2x^3 + 2x^2 \\ \hline 2x^2 + 1 \\ - 2x^2 + 2x \\ \hline 2x + 1 \end{array}$$

ساده نظر: برای باقی مانده بدون انجام تقسیم کافی است ریشه مقدم عمده را در مقوم جایگزین کرد.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 2 \quad | \quad x+2 \\ \underline{-3x^2 - 6x} \phantom{+ 2} \\ -11x + 2 \\ \underline{11x + 22} \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

تعیین ریشه ۱

$$\Rightarrow 3(-2)^2 - 5(-2) + 2 = 12 + 10 + 2 = 24$$

تعیین: اگر باقی مانده تقسیم  $2x^2 - 5x + a$  بر  $x - 2$  برابر ۳ باشد، مقدار  $a$  چیست؟

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \\ 2(2)^2 - 5(2) + a &= 3 \\ 8 - 10 + a &= 3 \\ \boxed{a = 5} \end{aligned}$$

تعیین: چند جمله‌ای  $x^3 + ax^2 + 4x - 2$  بر  $x + 1$  بخش پذیر است، مقدار  $a$  چیست؟

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \\ (-1)^3 + a(-1)^2 + 4(-1) - 2 &= 0 \\ -1 + a - 4 - 2 &= 0 \\ \boxed{a = 7} \end{aligned}$$

تعیین: اگر خارج قسمت تقسیم  $x^2 - 4x + b$  بر  $x + a$  برابر  $x - 3$  و باقی مانده  $-3$  باشد، مقدار  $a$  و  $b$  را بدست آورید.

حل: وقت کنید به استخوان تقسیم: باقی مانده + (خارج قسمت  $\times$  مقوم عمده) = مقوم

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + b &= (x+a)(x-3) - 3 \\ x^2 - 4x + b &= x^2 + (a-3)x - 3a - 3 \end{aligned}$$

بنابراین جایگزین

$$a - 3 = -4$$

$$\boxed{a = -1}$$

$$-3a - 3 = b$$

$$-3(-1) - 3 = b$$

$$\boxed{0 = b}$$

پایان فصل  $\checkmark$