

فصل سوم: آمار  
درس اول: شاخص های آماری

خط فقر را تعریف کنید. کمینه درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است.



نکته: خط فقر را به دوروش می توان مناسبه کرد که عبارتند از:

- الف) نصف میانگین درآمدهای ماهانه ای افراد جامعه
- ب) نصف میانگین درآمدهای ماهانه ای افراد جامعه

نکته: برای بدست آوردن میانگین چند عدد به این صورت عمل می کنیم:

ابتدا تمام اعداد داده شده را با هم جمع می کنیم و سپس عدد بدست آمده را بر تعداد آنها تقسیم می کنیم.

مثال: میانگین اعداد ۲ و ۹ و ۵ و ۴ و ۷ و ۳ را بدست آورید:

$$(\bar{X}) = \frac{۳+۷+۴+۵+۹+۲}{۶} = \frac{۳۰}{۶} = ۵$$

↳ تعداد این عددها ۶ تا می باشد

نکته: برای بدست آوردن میانگین چند عدد، ابتدا آنها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم و سپس:

الف) اگر تعداد اعداد داده شده فرد باشد، عدد وسط را به عنوان میانگین در نظر می گیریم.

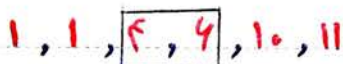
ب) اگر تعداد اعداد داده شده زوج باشد، میانگین دو عدد وسط را به عنوان میانگین در نظر می گیریم.

مثال: میانگین اعداد ۱۱، ۱، ۲، ۹، ۴ را مشخص کنید.



جواب: ابتدا باید آنها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. اکنون چون تعداد این عددها ۵ تا می باشد و عدد فرد است، عدد وسط (یعنی ۴) را به عنوان میانگین در نظر می گیریم.

مثال: میانگین اعداد ۱۰، ۶، ۴، ۱، ۱۱، ۱ را بدست آورید.



$$\text{میانگین} = \frac{۴+۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

جواب: ابتدا باید آنها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. اکنون چون تعداد این عددها ۶ تا می باشد و عدد زوج است، میانگین دو عدد وسط یعنی ۴ و ۶ را به عنوان میانگین در نظر می گیریم.



سؤال امتحانی: اگر درآمد ماهانه ۱۰ نفر از افراد یک شرکت به صورت زیر باشد (برحسب میلیون تومان) با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانگین، چند نفر زیر خط فقر هستند.

۴, ۹, ۱, ۳, ۱۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۹

جواب: ابتدا باید آمارها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم:

۱, ۳, ۴, ۵, ۷, ۹, ۹, ۱۰, ۱۳

اکنون چون تعداد این عددها زوج است پس باید میانگین در عدد وسط را به عنوان میانگین در نظر بگیریم.

$$\text{میانگین} = \frac{۷+۹}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

اکنون می دانیم که خط فقر برابر است با نصف میانگین یعنی:

$$\text{خط فقر} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

بنابراین واضح است که دو نفر از افراد این شرکت زیر خط فقر هستند.

سؤال امتحانی: اگر خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی حدود ۴ هزار تومان برای هر نفر در روز باشد، درآمد ماهانه ۳۰ روز یک خانوادگی که تنزه چقدر باشد، تا این خانواده زیر خط فقر نباشد.

$$\text{حد اقل درآمد یک خانوادگی که تنزی برای یک روز} = ۵ \times ۴۰۰۰ = ۲۰۰۰۰$$

$$\text{حد اقل درآمد این خانوادگی که تنزه برای ۱ ماه (۳۰ روز)} = ۳۰ \times ۲۰۰۰۰ = ۶۰۰۰۰۰$$

یعنی اگر درآمد ماهانه این خانوادگی که تنزه زیر ۶۰۰۰۰۰ تومان در ماه باشد، این خانواده زیر خط فقر قرار دارد.

سؤال امتحانی: اگر درآمد ماهانه ۱۰ نفر از افراد یک شرکت به صورت زیر باشد (برحسب میلیون تومان) با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانگین، چند نفر زیر خط فقر قرار دارند؟

۵, ۱, ۶, ۴, ۳, ۷, ۹, ۲, ۷, ۶



$$\text{میانگین این ۱۰ عدد} = \frac{۵+۱+۶+۴+۳+۷+۹+۲+۷+۶}{۱۰} = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵$$

اکنون می دانیم که خط فقر برابر است با نصف میانگین یعنی:

$$\text{خط فقر} = \frac{۵}{۲} = ۲,۵$$

یعنی افرادی که زیر ۲,۵ میلیون تومان حقوق می گیرند، زیر خط فقر قرار دارند که دو نفر هستند، ۱ و ۲.



شاخص: یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد.

منظور از شاخص « نرخ بیکاری » چیست؟ نرخ بیکاری عبارتست از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}}$$

نکته: نرخ بیکاری را معمولاً به صورت درصد بیان می کنند.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

مثال: در منطقه ای ۱۴۰۰ نفر شاغل و ۲۰۰ نفر بیکار هستند، نرخ بیکاری در این منطقه چند درصد است؟

الف) ۱۳

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100 = \frac{200}{1800} \times 100 = \frac{20000}{1800} = 11 \frac{1}{9}$$

ب) ۱۲.۵

ج) ۱۱/۱۱

د) ۱۳/۵

$$\begin{aligned} \text{انفراد شامل} + \text{انفراد بیکار} &= \text{جمعیت فعال} \\ &= 200 + 1400 = 1800 \end{aligned}$$

مثال: در یک جامعه با ۱۵۰۰ نفر شاغل، نرخ بیکاری ۲۵ درصد است، چند نفر از افراد این جامعه بیکار هستند، جمعیت فعال چند نفرند.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

$$\text{انفراد بیکار} = x$$

$$\text{انفراد شاغل} = 1500 \Rightarrow \text{جمعیت فعال} = 1500 + x$$

$$25 = \frac{x}{1500 + x} \times 100 \Rightarrow 25(1500 + x) = 100x$$

$$37500 + 25x = 100x$$

$$37500 = 100x - 25x = 75x$$

$$x = \frac{37500}{75} = 500$$

$$\text{جمعیت فعال} = \text{انفراد شاغل} + \text{انفراد بیکار} = 500 + 1500 = 2000$$

$$\text{جمعیت بیکار}$$

نکته: بیکار به فردی بالای ۱۴ سال گفته می شود که حداقل یکی از این شرایط را داشته باشد.

الف) به طور موقت بیکار شده باشد.

ب) در جستجوی شغل باشد.

ج) منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخصی باشد.

لازم به ذکر است که این تعریف از شخص بیکار، برای تمام کشورهای یکسان است.





منظور از شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی چیست؟ به متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه ای از تعداد زیادی کالا و خدمات در طول یک سال گفته می شود.

نکته: این شاخص تعولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می دهد. در واقع سطح قیمتها در یک سال را اندازه گیری کرده و نشان می دهد که با پولمان چقدر می توانیم خرید کنیم یا به اصطلاح قدرت خرید پولمان چقدر است. هر چقدر قیمتها افزایش یابند، قدرت خرید پولمان کاهش می یابد.

مثال: اگر سبد هزینه ی خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد، و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، برای محاسبه ی شاخص بهای نان و گوشت در سال مورد نظر داریم:

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{(1500 \times 200) + (70000 \times 80)}{(1000 \times 200) + (50000 \times 80)} \times 100 = \frac{5900000}{4200000} \times 100 = 140/5$$

منظور از تورم چیست؟ تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم می گویند.

در مثال قبل نرخ تورم با این صورت محاسبه می شود:

$$\text{نرخ تورم} = \left( \text{شاخص بهای گوشت و نان در سال پایه} \right) - \left( \text{شاخص بهای گوشت و نان در سال مورد نظر} \right) = 100 - 140/5 = -40/5\%$$

در واقع هر چقدر شاخص بهای کالا و خدمات بالاتر برود به همان نسبت تورم داشته ایم.

مثال: قیمت یک کالا در سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تومان بود. اگر میزان تورم قیمت این کالا در سال ۱۳۹۸ نسبت به سال ۱۳۹۰ برابر ۶ درصد باشد، قیمت این کالا در سال ۱۳۹۸ چقدر است؟

$$\text{میزان افزایش قیمت} = \frac{90000000}{100} = 900000000 \times \frac{6}{100} = 540000000$$



$$1398 = 150000000 + 900000000 = 240000000$$

مثال: قیمت یک یخچال در سال ۹۶ سی میلیون تومان بود که قیمت آن در سال ۹۷ ده درصد کاهش یافت. قیمت آن در سال ۹۷ چقدر است؟

$$300000000 \times \frac{10}{100} = \frac{300000000}{100} = 3000000000$$

$$97 = 300000000 - 3000000000 = 2700000000$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)



نمونه سوالات امتحانی:

۱- در کشوری، جمعیت بیکار ۴۰ میلیون نفر، و نرخ بیکاری ۵ درصد است. جمعیت فعال این کشور، چند میلیون نفر هستند.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰$$

$$۵ = \frac{۴۰}{F} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۵F = ۴۰۰۰ \Rightarrow F = \frac{۴۰۰۰}{۵} = ۸۰۰$$

که یعنی جمعیت فعال این کشور ۸۰۰ میلیون نفر است

۲- در کشوری جمعیت بیکاران ۴ میلیون نفر و تعداد افراد شاغل ۱۸ میلیون نفر است، شاخص نرخ بیکاری در این کشور چند درصد است؟

$$\text{جمعیت فعال} = \text{تعداد افراد شاغل} + \text{تعداد افراد بیکار} = ۱۸ + ۴ = ۲۰$$

$$\text{شاخص نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰ = \frac{۴}{۲۰} \times ۱۰۰ = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰$$

که نرخ بیکاری در این کشور ده درصد است.

۳- در یک کشور شاخص نرخ بیکاری ۱۵ درصد است. اگر جمعیت فعال این کشور ۲۰ میلیون نفر باشد، تعداد بیکاران را بدست آورید. سپس تعداد افراد شاغل را مشخص کنید.

$$\text{شاخص نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰$$

$$۱۵ = \frac{B}{۲۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۳۰۰ = ۱۰۰B \Rightarrow B = \frac{۳۰۰}{۱۰۰} = ۳$$

جمعیت بیکار ۳ نفر

$$۱۷ = ۲۰ - ۳ \Rightarrow \text{تعداد افراد شاغل} = ۱۷$$

بنابراین در این کشور ۳ میلیون نفر بیکار و ۱۷ میلیون نفر شاغل هستند.

مثال: اگر میانگین درآمد خانوارهای یک کشور ۴ میلیون تومان در ماه باشد (خانواده‌ها که نفره نفره شده‌اند) یک خانوادگی سه نفری با درآمد ماهانه ۱۸۰۰۰۰۰ تومان را در نظر بگیرید. هر یک از اعضای این خانواده

زیر خط فقرند یا بالای خط فقر؟  $\text{خط فقر} = \frac{۴۰۰۰۰۰۰}{۲} = ۲۰۰۰۰۰۰$

خط فقر برای هر عضو خانوادگی که نفری  $= \frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۳} = ۵۰۰۰۰۰$

اعضای خانواده بالای خط فقر هستند  $\Rightarrow \frac{۱۸۰۰۰۰۰}{۳} = ۶۰۰۰۰۰$  سهم هر عضو خانوادگی که نفری از درآمد



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

صفحه



مثال: سرپرست یک خانوادگی ۵ نفری ماهانه ۵۰۰۰۰۰ تومان درآمد دارد. اگر خط فقر را به صورت بین المللی در نظر بگیریم، اعضای این خانواده زیر خط فقرند یا بالای خط فقر؟ چرا؟

پس داریم خط فقر بین المللی معادل ۴۰۰۰ تومان برای هر نفر در یک روز می باشد. بنابراین:

$$۱۲۰۰۰۰ = ۴۰۰۰ \times ۳۰ = \text{مقدار ماهانه ی خط فقر برای هر نفر}$$

$$۱۰۰۰۰۰ = \frac{۵۰۰۰۰۰}{۵} = \text{سهم هر عضو این خانوادگی ۵ نفره از درآمد}$$



بنابراین تمام اعضای این خانواده زیر خط فقر قرار دارند پس باید هر کدام از اعضای این خانواده ۲۰۰۰۰ تومان بیشتر دریافت کنند تا به خط فقر برسند. یعنی باید  $۱۰۰۰۰۰ = ۵ \times ۲۰۰۰۰$  تومان به حقوق سرپرست خانواده اضافه شود تا به خط فقر برسند.

مثال: در یک کشور تعداد بیکاران ۳ میلیون نفر و تعداد شاغلین ۱۷ میلیون نفر است. شاخص نرخ بیکاری در این کشور چند درصد است؟

$$۲۰ = ۳ + ۱۷ = \text{تعداد شاغلین} + \text{تعداد بیکاران} = \text{جمعیت فعال}$$

$$\text{نرخ بیکاری در این کشور} \rightarrow ۱۵ = \frac{۳}{۲۰} \times ۱۰۰ = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰ = \text{نرخ بیکاری}$$

۱۵ درصدی باشد.

شاخص توده ی بدنی یا BMI؛ این شاخص میزان اضافه وزن یا کمبود وزن را نشان می دهد. به همین دلیل به شاخص سلامت هم معروف است و از فرمول زیر بدست می آید.

$$BMI = \frac{\text{وزن}}{(\text{طول قد})^۲} \quad (\text{یا شاخص سلامت})$$

گروه سنی	بماتوباید. آل
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ و بالاتر	۲۷

نکته: وزن باید بر حسب کیلوگرم و طول قد باید بر حسب متر باشد

نکته: بعد از بدست آوردن BMI باید آن را با جدول مقابل مقایسه کنیم تا ببینیم که شخص مورد نظر اضافه وزن دارد یا کمبود وزن

نکته: BMI مخفف «Body Mass Index» می باشد.



مثال: احمد ۱۳ سال سن دارد و وزنش ۵۸ کیلوگرم و طول قدش ۱۶۳ سانتی متر است.  
الف) شاخص سلامت او چقدر است؟  
ب) این شخص امانه وزن دارد یا کمبود وزن؟ چرا؟

$$BMI = \frac{\text{وزن}}{(\text{طول قد})^2} = \frac{58}{(1.63)^2} = \frac{58}{2.6569} \approx 21.8$$

اکنون طبق جدول صفحای قبل، بنا به توباید آل برای یک شخص ۲۴ ساله می باشد ولی از آنجا که بنا به توباید احمد ۲۱٫۸ می باشد، پس احمد کمبود وزن دارد.

شاخص پایه ی آموزش؛ یکی از شاخص های خوانایی که سالهای تحصیل خواننده ی متون انگلیسی را تخمین می زند. به صورت زیر تعریف می شود.

$$[74 \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] = \text{شاخص پایه ی آموزش}$$

که منظور از کلمات دشوار؛ همان کلمات دو هجایی بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات آسان است.

نکته: شاخص پایه ی آموزش عددی طبیعی از ۱ تا ۱۲ می باشد که نشان دهنده ی پایه ی تحصیلی است.

مثال: برای کتابی که هر جمله ی آن به طور متوسط ۱۴ کلمه دارد و لغات دشوار هر جمله ی آن ۱۰ درصد می باشد، شاخص پایه ی آموزش را بدست آورید.

$$[74 \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] = \text{شاخص پایه ی آموزش}$$

$$= [74 \times (14 + 10)] = [912] = 9$$

مثال: در یک کتاب لاتین، درصد لغات دشوار ۴ و میانگین تعداد کلمات در هر جمله برابر ۲۰ می باشد. شاخص پایه ی آموزش چقدر است.

$$[74 \times (20 + 4)] = \text{شاخص پایه ی آموزش}$$

$$= [1014] = 10$$





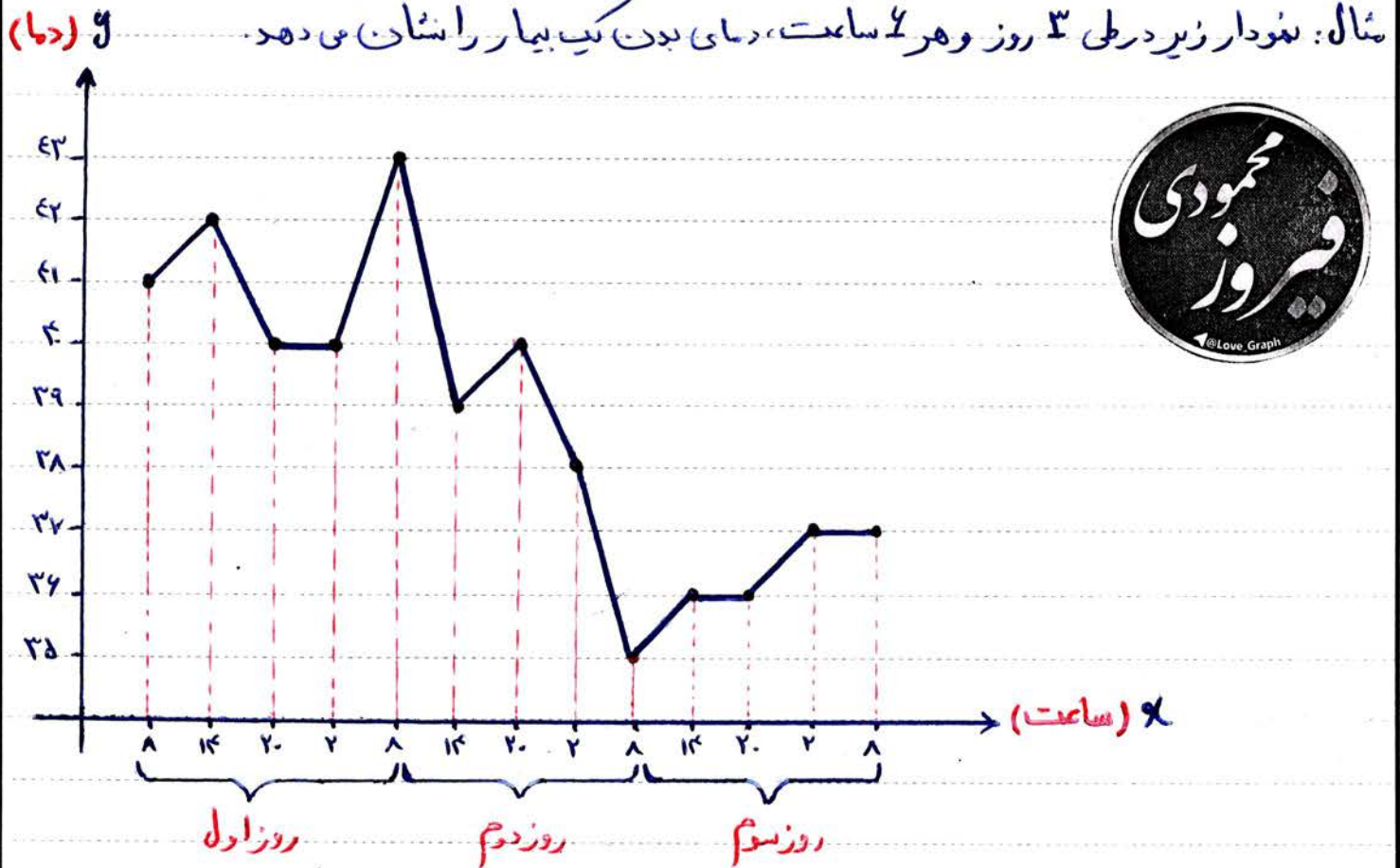
نصل ۳ - آمار

درس ۱: سری های زمانی؟

سری های زمانی؛ داده های هستند که در طی فواصل زمانی منظم جمع آوری می شوند. حال اگر نقاط به دست آمده از جمع آوری داده ها را به هم وصل کنیم، نمودار سری زمانی بدست می آید.

نکته: منظور از نقاط همان نمودار پراکنشی نگاشت است

سؤال: نمودار زیر در طی ۳ روز و هر ۴ ساعت، دمای بدن یک بیمار را نشان می دهد.

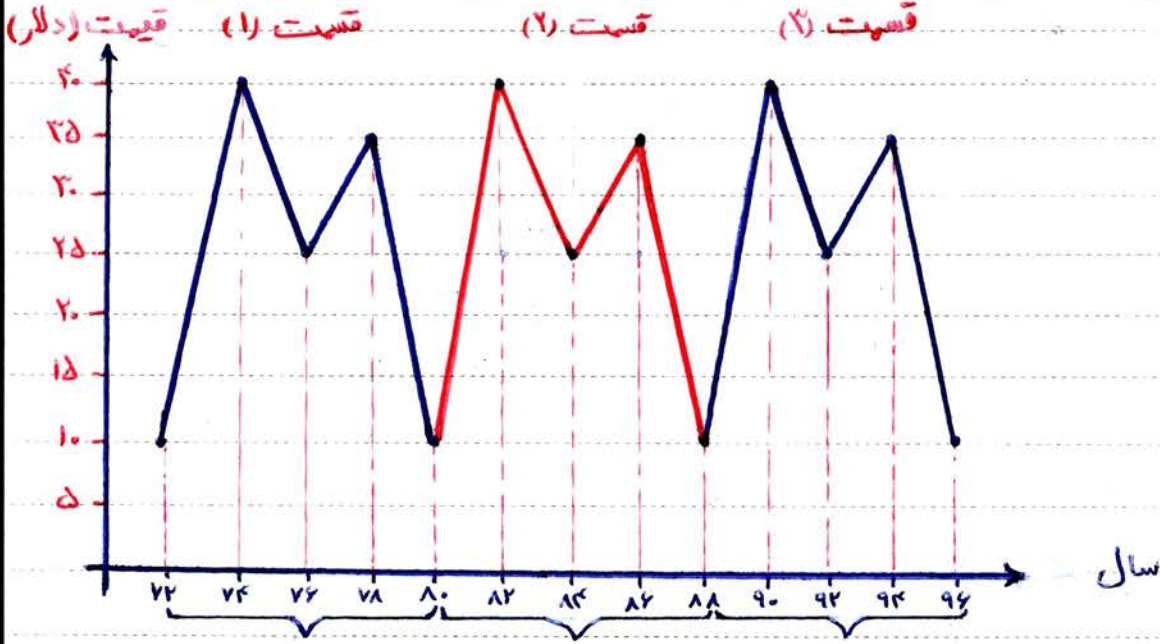


باتوجه به این نمودار، واضح است که ماکزیمم دمای بدن این بیمار ۴۳ درجه و در ساعت ۸ صبح روز دوم است و کمترین دمای بدن این بیمار ۳۵ درجه و در ساعت ۸ صبح روز سوم می باشد.

نکته: بعضی از نمودارهای سری زمانی حالت تکرار شونده دارند، یعنی در مقاطع زمانی خاص، مرتباً تکرار می شوند. این تکرار شدن به ما کمک می کند که بتوانیم اتفاقات و پدیده های را که در آینده رخ می دهند، پیش بینی کنیم. البته وقتی بتوانیم آینده را پیش بینی کنیم، قطعاً می توانیم وضعیت آن پدیده را در گذشته هم مشخص کنیم، در صفحات بعدی این جزوه، در مورد این موضوع مثالهایی ارائه شده است.



مثال: سری زمانی زیر را که مربوط به قیمت طلا در سالهای مختلف می باشد در نظر بگیرید.



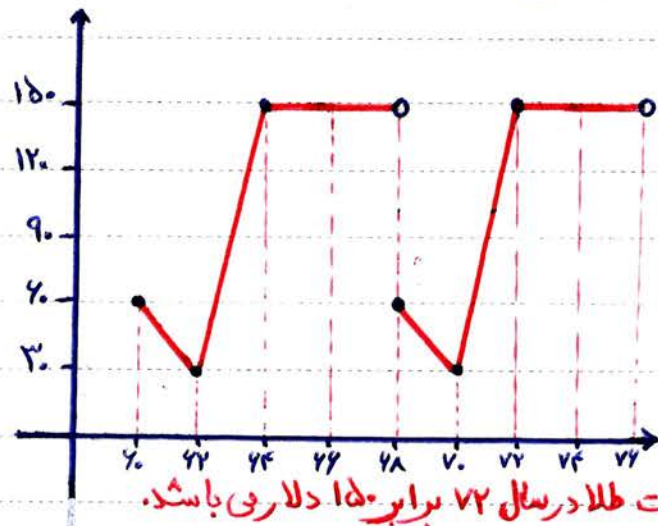
سال ۸                      سال ۸                      سال ۸

باتوجه به این نمودار واضح است که قسمت (۱) هر ۸ سال عیناً تکرار می شود پس می گوئیم که این نمودار دارای دوره تناوب ۸ سال است. اکنون فرض کنید که می خواهیم بدانیم قیمت طلا در سال ۹۸ چقدر است؟ واضح است که سال ۹۸ در این نمودار وجود ندارد ولی چون دوره تناوب این نمودار ۸ می باشد می توانیم ۹۸ را منهای ۸ کنیم تا عدد ۹۰ بدست آید که قیمت طلا در سال ۹۰ برابر ۳۰ دلار می باشد.

سوال: باتوجه به نمودار بالا، قیمت طلا در سال ۷۰ را تخمین بزنید.

جواب: عدد ۷۰ در نمودار دیده نمی شود ولی اگر آن را با ۸ جمع کنیم به عدد ۷۸ می رسیم که در نمودار وجود دارد و قیمت طلا در آن سال ۳۵ دلار می باشد.

مثال: نمودار سری زمانی روبرو متناوب است. با سوالات زیر پاسخ دهید



الف) اختلاف ماکزیمم و مینیمم قیمت طلا چقدر است؟

۲۰ = مینیمم قیمت و ۱۵۰ = ماکزیمم قیمت

اختلاف = ۱۵۰ - ۲۰ = ۱۳۰

ب) دوره تناوب این سری زمانی چقدر است؟

واضح است که نمودار هر ۴ سال یکبار تکرار می شود

پس دوره تناوب آن ۴ می باشد.

ج) قیمت طلا در سال ۷۸ چقدر است؟  $۷۸ - ۴ = ۷۲$  و قیمت طلا در سال ۷۲ برابر ۱۵۰ دلار می باشد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

صفحه



روش بدست آوردن معادله خط گذرنده از دو نقطه دلخواه:

موضوع را با یک مثال بیان می کنیم

مثال: معادله خط گذرنده از نقاط  $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  را بیابید

$$\text{شیب خطی باشد} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 7}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = +2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = +2(x - 3) \Rightarrow y - 7 = +2x - 6$$

$$y = +2x - 6 + 7 \Rightarrow y = +2x + 1 \rightarrow \text{معادله خط}$$

مثال: معادله خط گذرنده از نقاط  $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  را بیابید.

$$\text{شیب خط} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{0 - (-1)} = \frac{-3}{+1} = -3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -3(x - (-1))$$

$$y - 5 = -3(x + 1) \Rightarrow y - 5 = -3x - 3$$

$$y = -3x - 3 + 5 \Rightarrow y = -3x + 2 \rightarrow \text{معادله خط}$$

مثال: الف) معادله خط گذرنده از نقاط  $\begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$  را مشخص کنید.

ب) مختصات نقطه ای از این خط را بدست آورید که طول آن +۱ باشد.

ج) مختصات نقطه ای از این خط را بدست آورید که عرض آن +۷ باشد.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$\text{شیب خط} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (+2)}{0 - (-1)} = \frac{-3 - 2}{0 + 1} = \frac{-5}{+1} = -5$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (+2) = -5(x - (-1))$$

$$y - 2 = -5(x + 1)$$

$$y - 2 = -5x - 5$$

$$y = -5x - 5 + 2 \Rightarrow y = -5x - 3 \rightarrow \text{معادله خط مورد نظر}$$

جواب قسمت (ب)

$$x = +1 \Rightarrow y = -5 \times (+1) - 3$$

$$\Rightarrow y = -5 - 3 = -8$$

$$\text{نقطه ای مورد نظر} = \begin{bmatrix} +1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

جواب قسمت (ج)

$$y = +7 \Rightarrow +7 = -5x - 3$$

$$5x = -3 - 7 = -10$$

$$x = \frac{-10}{5} = -2$$

$$\text{نقطه ای مورد نظر} = \begin{bmatrix} -2 \\ +7 \end{bmatrix}$$



منظور از درون یابی چیست؟ یعنی بین دو داده‌ی مشخص، مقدار داده‌ی مورد نظرمان را تخمین بزنیم

مثال: جدول زیر تعداد مشتریان یک فروشگاه در ساعات مختلف را نشان می‌دهد.

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
تعداد مشتریان فروشگاه	۴۰	۶۶	۲۸	۹۴	۱۰۰	۵۰	۹۱	۱۸	۳۴

باتوجه به این جدول واضح است که تعداد مشتریها در ساعت ۱۶ برابر صدتاً و در ساعت ۲۲ برابر هجده تا می باشد. حال فرض کنید که می‌خواهیم به طور تقریبی تعداد مشتریها در ساعت ۹ صبح را بدست آوریم روش کار به این صورت است.

می‌دانیم که ساعت ۹ صبح بین ساعت‌های ۸ و ۱۰ می‌باشد. لذا به کمک نقاط  $[۴۰]$  و  $[۱۰]$  معادله‌ی خط را بدست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} x_2 & \rightarrow & 10 \\ y_2 & \rightarrow & 17 \\ \hline x_1 & \rightarrow & 8 \\ y_1 & \rightarrow & 40 \end{matrix}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 40}{10 - 8} = \frac{23}{2} = 11.5$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 40 = 11.5(x - 8)$$

$$y - 40 = 11.5x - 92$$

$$y = 11.5x - 92 + 40 \Rightarrow y = 11.5x - 52$$



الکون نقطه کافی است که در معادله‌ی خط داده شده، به جای  $x$  عدد ۹ را قرار دهیم.

$$x = 9 \Rightarrow y = 11.5 \times 9 - 52 = 53$$

یعنی فروشگاه در ساعت ۹ صبح تقریباً ۵۳ مشتری دارد.

الکون فرض کنید که تعداد واقعی مشتریان در ساعت ۹ صبح ۵۵ مشتری بود. است و ما به صورت تقریبی عدد ۵۳ را بدست آوردیم، بنابراین به قدر مطلق اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده خطای درون یابی گفته می‌شود که آن را با  $e$  نمایش می‌دهیم.

$$e = \text{مقدار تخمین زده شده} - \text{مقدار واقعی}$$

$$e = |55 - 53| = 2$$

در مثال قبل خطای درون یابی برابر است با ۲.



منظور از برون یابی چیست؟ تخمین داده های بعد یا قبل از داده های ثبت شده را برون یابی می گویند

مثال: جدول زیر تعداد یخچالهای فروخته شده ی یک فروشگاه در پنج روز را نشان می دهد.

روز	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد یخچالهای فروخته شده	۴	۸	۱۰	۱۲	۳۲

با توجه به جدول واضح است که تعداد یخچالهای فروخته شده در روز چهارم ۱۲ عدد و تعداد یخچالهای فروخته شده در روز دوم ۸ عدد می باشد. حال فرض کنید که می خواهیم بدانیم که این فروشگاه در روز ششم تقریباً چند یخچال را به فروش می رساند که روشی کار به این صورت است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{میانگین روزها} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3 \\ \text{میانگین فروش} = \frac{4+8+10+12+32}{5} = \frac{70}{5} = 14 \end{array} \right. \Rightarrow \text{نقطه ی میانگین} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

از روی جدول مشخص است که نزدیک ترین نقطه به روز ششم، روز پنجم است، لذا نقطه ی دوم را به صورت  $\begin{bmatrix} 5 \\ 32 \end{bmatrix}$  در نظر می گیریم بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$\text{شیب خط} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{32 - 14}{5 - 3} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 14 = 9(x - 3)$$

$$y - 14 = 9x - 27$$

$$y = 9x - 27 + 14$$

$$\Rightarrow y = 9x - 13 \rightarrow \text{معادله ی خط}$$

اکنون برای بدست آوردن میزان فروش در روز ششم فقط کافی است که با جای  $x$  عدد ۶ را قرار دهیم  
 بنابراین میزان فروش در روز ششم ۴۱ یخچال می باشد.  
 به صورت تقریبی

اگر مقدار واقعی فروش در روز ششم ۳۹ یخچال باشد، خطای برون یابی عبارت است از:

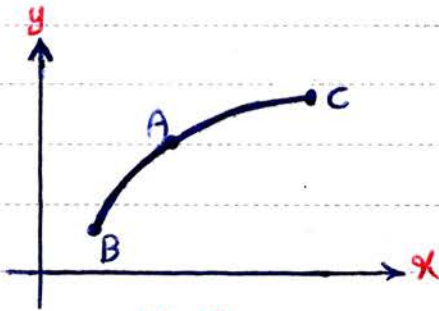
$$e = | \text{مقدار تخمین زده شده} - \text{مقدار واقعی} | = | 39 - 41 | = | -2 | = 2$$



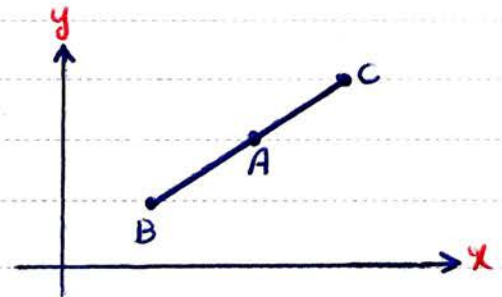


نکته ی مهم: اثر نمودار سری زمانی به شکل خط مستقیم باشد، درون یابی و برون یابی هیچ خطایی نخواهند داشت ولی اثر به شکل منحنی باشد، در آن خطا داریم.

مثال: در نمودار (الف) درون یابی در نقطه ی A خطا ندارد ولی در نمودار (ب) درون یابی در A خطا ندارد.



(ب)



(الف)

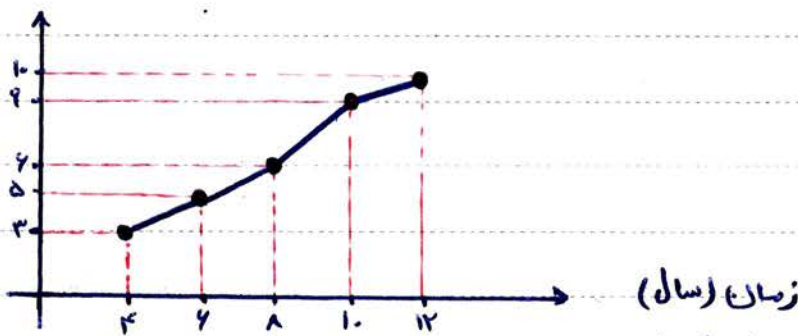
نمونه ی سوالات استخوانی:

مثال: میانگین درآمد سالانه ی مدیران بانکی در یک شهر به صورت زیر است.

سابقه ی کار (سال)	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
درآمد (میلیون تومان)	۳	۵	۶	۹	۱۰

(الف) نمودار سری زمانی جدول مقابل را رسم کنید

(ب) درآمد شخصی با سابقه ی کار ۱۱ سال را به روش درون یابی تخمین بزنید.



جواب (الف)

جواب (ب) چون سال یازدهم بین سالهای ۱۲ و ۱۱ قرار دارد پس:

$$\begin{matrix} [10] \rightarrow x_2 \\ [9] \rightarrow y_2 \\ [12] \rightarrow x_1 \\ [10] \rightarrow y_1 \end{matrix}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 10 = \frac{1}{2}(x - 12)$$

$$y - 10 = \frac{1}{2}x - 6$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 + 10$$

$$y = \frac{1}{2}x + 8 \rightarrow \text{ملاحظه خط}$$

الکون نقطه باید بجای x عدد ۱۱ را قرار دهیم؟

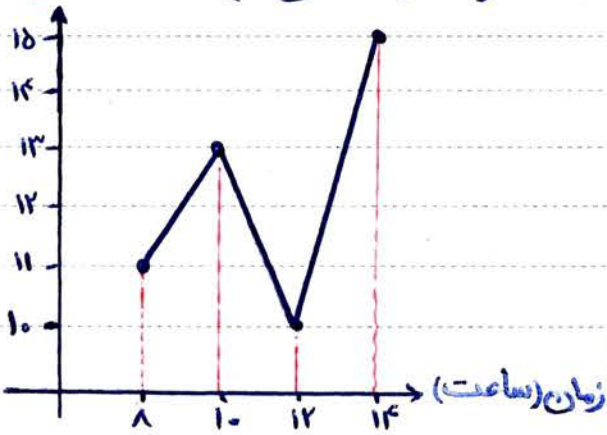
$$x = 11 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \times 11 + 8 = 5,5 + 8 = 13,5$$

یعنی با ۱۱ سال سابقه تقریباً ۱۳,۵ میلیون تومان حقوق دریافت می کند.





مثال: در نمودار سری زمانی روبرو، قیمت کالا را در ساعت ۹ صبح درویابی کنید، پس قیمت کالا را در ساعت ۱۵ برویابی کنید (در محاسبات خود از قسمتهای اعشاری صرف نظر کنید). قیمت (دلار)



جواب الف) ساعت ۹ بین ساعت های ۸ و ۱۰ قرار دارد پس؛

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 13}{8 - 10} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 13 = 1(x - 10) \Rightarrow y - 13 = x - 10$$

$$y = x - 10 + 13$$

$$y = x + 3$$

$$x = 9 \Rightarrow y = 9 + 3 = 12 \text{ دلار}$$

الکتون باید به جای ۹ عدد ۱۰ را قرار دهیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{میانگین زمانها} = \frac{8 + 10 + 12 + 14}{4} = \frac{44}{4} = 11 \\ \text{میانگین قیمتها} = \frac{11 + 13 + 10 + 15}{4} = \frac{49}{4} \approx 12 \end{array} \right. \Rightarrow \text{نقطه ی میانگین} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ (جواب ب)}$$

و از روی جدول واضح است که نزدیکترین نقطه به ساعت ۱۵، ساعت ۱۴ می باشد، پس؛

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15 - 12}{14 - 11} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 12 = 1(x - 11)$$

$$y - 12 = x - 11 \Rightarrow y = x - 11 + 12 \Rightarrow y = x + 1$$

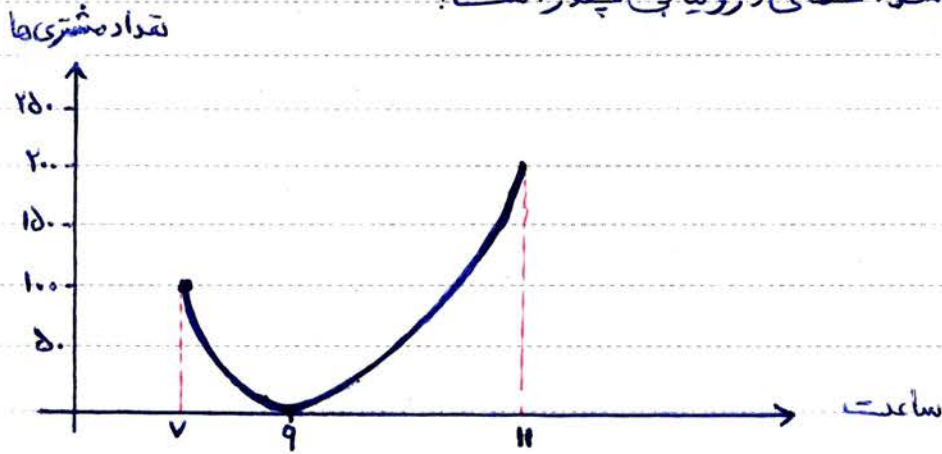
$$x = 15 \Rightarrow y = 15 + 1 = 16 \text{ دلار}$$

الکتون باید به جای ۹ عدد ۱۵ را قرار دهیم.





مثال: با توجه به نمودار روبرو، تعداد مشتری‌ها را در ساعت ۱۰ صبح در ویبای کنید، اگر تعداد دقیق مشتری‌ها در ساعت ۱۰ صبح برابر ۹۶ باشد. خطای در ویبای چقدر است؟



جواب: می‌دانیم که ساعت ۱۰ صبح بین ساعت‌های ۹ و ۱۱ قرار دارد پس:

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 200 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 200}{9 - 11} = \frac{-200}{-2} = +100 = 100$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 200 = 100(x - 11)$$

$$y - 200 = 100x - 1100$$

$$y = 100x - 1100 + 200 \Rightarrow y = 100x - 900$$

الکون باید به جای  $x$  عدد ۱۰ قرار دهیم.

تعداد تقریبی مشتری‌ها در ساعت ۱۰ صبح  $\rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 100 \times 10 - 900 = 1000 - 900 = 100$

$$(e) \quad | \text{مقدار تخمین زده شده} - \text{مقدار واقعی} | = | 96 - 100 | = | -4 | = 4$$

مثال: درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

- الف) اگر نمودار سری زمانی به صورت منحنی باشد، در ویبای و برویابی هیچ خطایی ندارند. **x**
- ب) خطای در ویبای و برویابی عبارتست از مجموع مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده. **x**
- ج) از نمودار سری زمانی متناوب می‌توان اطلاعات نسبتاً دقیقی در مورد گذشتگان و آینده بدست آورد. **✓**
- د) خطای در ویبای سری زمانی که به صورت خط باشد، صفر است. **✓**
- ه) برون‌یابی به این معنی است که بین در داده‌ی مشخص، داده‌ی مورد نظرمان را تخمین بزنیم. **x**
- ت) همیشه مقدار بدست آمده از برون‌یابی یا درون‌یابی بیشتر از مقدار واقعی است. **x**