Subject:
Year: Month: Date:

هندسه: شاخه‌ای از ریاضیات می‌باشد که پدیده های اطراف ما را شبیه سازی می‌کند.

و مفاهیم آن شهودی و ملموس می‌باشد.

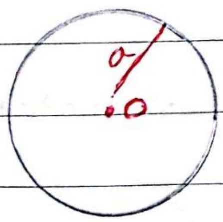
مفاهیم هندسه: ۱- تعاریف: مفاهیمی هستند که به وسیله‌ی اسمی مشخص می‌شوند و پذیرفتن آنها نیاز به دلیل ندارد. ۲- اصول: مفاهیمی هستند که پذیرفتن درستی آنها نیاز به دلیل ندارد (بدیهی). ۳- قضایا: مفاهیم کلی‌ای هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند.

یادآوری: حالت هم‌نهشتی دو مثلث. (ض ز ض). (ض ض ض). (ز ض ز)

(و ز). (و ض) مخصوص مثلث های قائم‌الزاویه.

درس اول " ترسیم های هندسی و استدلال "

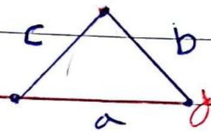
۱- نقاطی را تعیین کنید که از نقطه O به فاصله a باشند.



تمامی نقاط روی دایره‌ی به مرکز O و شعاع a قرار می‌گیرند.

Subject:
Year: Month: Date:

۲_ روش رسم یک مثلث با طول اضلاع a و b و c را توضیح دهید.

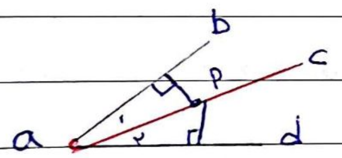


a را می کشیم و سپس با پرگار ۲ کمان از دو سر a به اندازه b و c می کشیم و بعد متصل

برخی خواص نیم ساز و ترسیم آن:

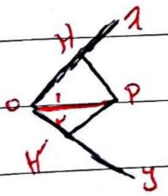
نیم ساز یک زاویه: نیم خطی که از راس زاویه رسم می شود و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

۱_ ثابت کنید هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



$$\left.\begin{array}{l} aP = aP \\ a_1 = a_2 \end{array}\right\} (\text{وز}) \Rightarrow$$

۲_ ثابت کنید نقطه ای که فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد روی نیم ساز زاویه قرار دارد.



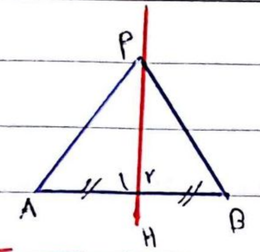
$$\left.\begin{array}{l} PH = PH' \\ oP = oP \end{array}\right\} (\text{وض}) \Rightarrow o\overset{\triangle}{P}H \cong oPH'$$

عمود منصف: به خطی که در وسط یک پاره خط بر آن عمود رسم می شود.

سوال: ثابت کنید فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک اندازه است؟

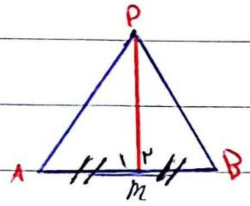
ALYAZ

Subject:
Year: Month: Date:



$$\left.\begin{array}{l} PH = PH \\ H_1 = H_2 \\ AB = HB \end{array}\right\} (\text{ض ز ض}) \Rightarrow P\hat{A}H \cong P\hat{B}H \Rightarrow P' = PB$$

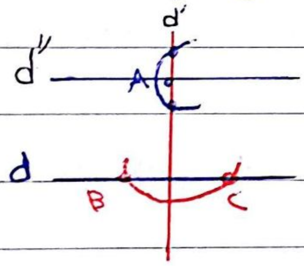
سؤال ۵: ثابت کنید اگر فاصله یک نقطه از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد آن نقطه روی



عمود منصف قرار دارد. از P به وسط AB وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} PA = PB \\ Am = Bm \\ Pm = Pm \end{array}\right\} (\text{ض ض ض}) \Rightarrow P\hat{A}m \cong P\hat{m}B \Rightarrow m_1 = m_2$$

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

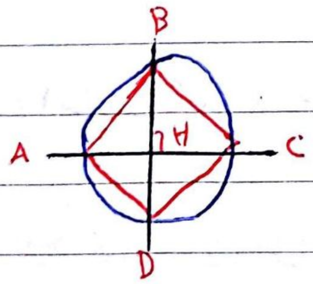


رسم ۸: از نقطه‌ی A خط d' را عمود بر d رسم می‌کنیم

و سپس در نقطه d'' بر d' عمود رسم می‌کنیم که چون

دو خط d و d'' هر دو بر d' عمود هستند پس خودشان موازی اند.

روش رسم مربعی که یک قطر آن داده شده.



رسم: قطر AC را رسم می‌کنیم سپس عمود منصف AC را

رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه H قطع کند به مرکز H و شعاع AH

دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط به دست آمده را به یکدیگر متصل می‌کنیم.

ALYAZ

Subject:
Year: Month: Date:

فصل دوم :

استدلال :

روش های استدلال در هندسه : استقرائی - استنتاجی - غیرمستقیم (برهان خُلف)

استقرائی : نتیجه گیری کلی بر پایه ی مجموعه ای از مشاهدات و اندازه گیری کردن و تکرار یک آزمایش را استدلال استقرائی گوییم، یا به عبارت دیگر استقرا یعنی از جزء به کل رسیدن.

نتایجی که از این روش به دست می آید کاملا قابل اعتماد نیست بلکه همراه با حدس و گمان است.

مثال) نشان دهید مجموع زاویه های داخلی هر ۴ ضلعی محدب، ۳۶۰° است.

استدلال : می دانیم در ۴ ضلعی های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مجاور مکمل همدیگرند، پس مجموع ۴ زاویه آنها ۳۶۰° می شود. در نتیجه هر ۴ ضلعی محدب مجموع زاویه هایش ۳۶۰° است.

توجه : استدلال به کار رفته در مثال بالا استدلال استقرائی است، چون از چند حالت خاص یک نتیجه کلی گرفته ایم. (از جزء به کل رسیدن)

ALYAZ

استنتاجی: استدلال بر پایه حقایقی که درستی آنها را قبول کرده ایم. (تعاریف و مفاهیمی که در هم نهشتی هم استفاده می شود) نتایجی که از این استدلال به دست می آید کاملا درست و قابل اعتماد هستند.

قضیه: مفاهیمی کلی هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند و از آنها در حل مسائل دیگر استفاده می شوند.

قضیه شرطی: به قضیه ای که به صورت جمله شرطی بیان می شود قضیه شرطی گوییم. به جمله ای که بعد از اگر قرار می گیرد فرض و به جمله ی بعد از آنگاه حکم گفته می شود. $p \Rightarrow q$

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم به عبارت شرطی حاصل عکس قضیه گفته می شود که ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیه ی در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبرو به ساق ها مساوی اند

الف) به صورت شرطی بیان کنید. ب) عکس قضیه را بنویسید.

الف) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های روبروی ساق ها با هم برابرند.

Subject:
Year: Month: Date:

ب) اگر در مثلثی دو زاویه باهم برابر باشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین می باشد.

قضیه دو شرطی : اگر عکس یک قضیه درست باشد به آن قضیه و عکسش آن قضیه دو شرطی و به صورت $p \Leftrightarrow q$ نام گذاری می شود.

مثال : قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

حل : قضیه دو شرطی : یک مثلث قائم الزاویه است، اگر و تنها اگر توان دوم یک ضلع برابر مجموعه توان دوم های دو ضلع دیگر باشد.

رفت : اگر مثلث قائم الزاویه باشد آنگاه توان دوم یک ضلع برابر مجموعه توان دوم دو ضلع دیگر.

برگشت : اگر در یک مثلث توان یک ضلع برابر مجموعه توان دوم های دو ضلع دیگر باشد آنگاه آن مثلث قائم الزاویه است.

توجه : برای اثبات یک قضیه دو شرطی هم رفت قضیه و هم برگشت آن را ثابت کنیم.

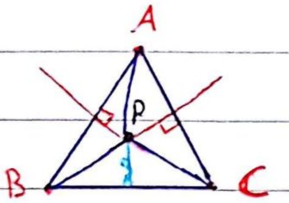
خط های همرس : به چند خط که فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند، و به آن نقطه، نقطه ی همرسی گفته می شود.

ALYAZ

Subject:
Year: Month: Date:

قضیه ۱) در هر مثلث عمودمنصف‌های سه ضلع همرس اند.

فرض: $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث است. حکم: عمودمنصف‌ها همرس‌اند.



استدلال: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.

چون AB و AC تقاطع اند پس عمودمنصف‌های آن‌ها هم در تقاطع می‌باشند و در P هم دیگر را قطع می‌کنند. سپس از P به C، A، B وصل می‌کنیم.

P روی عمودمنصف AB است پس: $PA = PB$

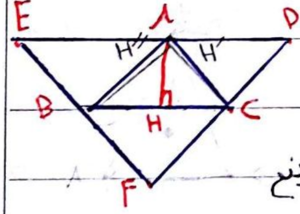
پس P روی عمودمنصف BC قرار دارد یعنی سه عمودمنصف در نقطه P همرس هستند.

$PB = PC$

P روی عمودمنصف AC است پس: $PA = PC$

قضیه ۲) سه ارتفاع هر مثلث همرس اند. حکم: ارتفاع‌ها همرس اند.

فرض: ABC مثلث است.



اثبات: از رأس‌های مثلث ABC سه خط موازی اضلاع ABC رسم می‌کنیم تا مثلث DEF به وجود آید.

$AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$ $\Rightarrow$ (با اضلاع متوازی) ABCD چهارضلعی $\Rightarrow BC = AD$

$AE \parallel BC$, $AC \parallel BE$ $\Rightarrow$ (متوازی الاضلاع) AEBC چهارضلعی $\Rightarrow BC = AE$

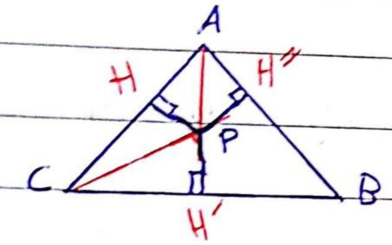
$\Rightarrow AD = AE$

از طرفی $ED \parallel BC$ است و AH عمود بر BC می‌باشد پس بر ED عمود است. در نتیجه AH عمودمنصف ضلع ED می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد BH' عمودمنصف EF و CH'' عمودمنصف

Subject:
Year: Month: Date:

چون DEF می‌باشد عمودمنصف‌های مثلث ABC روی عمودمنصف‌های مثلث DF است یعنی ارتفاع‌های مثلث

عمودمنصف‌ها همرس اند پس ارتفاع‌های ABC نیز همرس اند.



قضیه ۳) در هر مثلث سه نیمساز زاویه‌های داخلی همرسند.

فرض: ABC مثلث است

حکم: سه نیمساز زاویه‌های داخلی همرسند

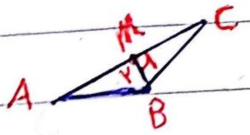
اثبات: نیمساز دو زاویه A و C را رسم می‌کنیم این دو نیمساز در نقطه P همدیگر را قطع می‌کنند.

سپس از نقطه P به سه ضلع عمود می‌کنیم. P روی نیمساز A است: $PH = PH''$ ①

P روی نیمساز C است: $PH = PH'$ ②

$1 و 2 \Rightarrow PH' = PH''$ ⇐ P روی نیمساز B قرار دارد ⇐ در نتیجه سه نیمساز در نقطه P همرسند.

قضیه ۴) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشد آنگاه زاویه روبرو به ضلع بزرگتر بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.



فرض: $AC > BC$

حکم: $\hat{B} > \hat{A}$

اثبات: روی ضلع AC پاره خط CM را طوری جدا کنیم که $CM = CB$ باشد و سپس از M به B وصل می‌کنیم:

$CM = CB \Rightarrow$ متساوی الساقین $\overset{\triangle}{CBM} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1 \quad (1)$

می‌دانیم در هر مثلث اندازه‌ی هر زاویه خارجی از هر کدام از زاویه‌های داخلی غیرمجاور بزرگتر است یعنی:

$\hat{M}_1 > \hat{A} \xrightarrow{(1)} \hat{B}_1 > \hat{A}\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A}$

چون B_1 جزئی از B است $B > B_1\}$

ALYAZ

Subject:
Year: Month: Date:

گزاره: به هر جمله‌ی خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد گزاره گوییم. ممکن است ما از درست
بودن یا نادرست بودن آن جمله اطلاع نداشته باشیم. مثال گزاره ← $7>3$

توجه: اگر یک گزاره از یک جمله‌ی خبری درست شده باشد به آن گزاره ساده گوییم و اگر ترکیبی از
چند گزاره ساده باشد به آن گزاره مرکب گوییم. مثال: ساده ← ۱۰ عددی زوج است.
مرکب ← ۷ عددی اول و از ۵ بزرگتر است.

نقیض یک گزاره: به عبارتی که ارزش آن دقیقاً خلاف ارزش یک گزاره باشد نقیض آن گزاره
گوییم. مثال: ۵ عددی زوج است ← این چنین نیست که ۵ عددی زوج است.

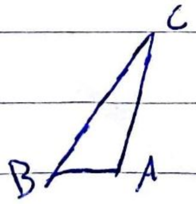
توجه: در صورت نوشتن هر گزاره با استفاده از یک مثال نقض می‌توان نقیض را نوشت.

برهان خلف: در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و نقیض آن درست می‌باشد و
سپس از استنتاج به یک تناقض با فرض مسئله یا یک عبارت غیر ممکن می‌رسیم که این
نشان دهنده این است که خلاف حکم نادرست است یعنی حکم درست است.

قضیه ۵) اگر در مثلث دو زاویه نابرابر باشد آنگاه ضلع روبرو به زاویه بزرگتر بزرگتر است از
ضلع روبرو به زاویه کوچکتر.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

حکم: $BC > AC$



Subject:
Year: Month: Date:

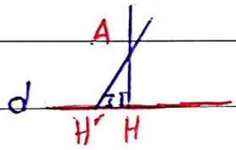
اثبات: فرض کنیم $BC \not> AC$ یعنی $BC = AC$ یا $BC < AC$ است.

اگر $BC = AC$ باشد $A\hat{B}C$ متساوی الساقین است یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ و این فرض خلف است.

اگر $BC < AC$ باشد بنا به قضیه ۲ $\hat{A} < \hat{B}$ و این فرض خلف است.

یعنی فرض خلف نادرست است در نتیجه حکم $BC > AC$ درست می باشد.
$AC > BC$ درست

سوال: از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط نمی توان بیش از یک خط



خط d و نقطه A خارج آن: فرض

بر آن عمود کرد. از A فقط یک عمود بر d کشیده می شود: حکم

اثبات: فرض کنیم از نقطه A دو عمود بر d رسم می شود. (فرض خلف)، در این حالت $AH'H$ یک مثلث خواهد بود که مجموع زاویه های داخلی آن از ۱۸۰ درجه بیشتر است و این غیر ممکن است ... پس از نقطه A فقط یک خط می توان عمود رسم کرد.

مثال نقض: به مثالی که کلیت درستی حکم را رد می کند.

مثال: درستی یا نادرستی احکام زیر را مشخص کنید، در صورت نادرستی مثال نقض را مشخص کنید. الف) همه ی اعداد صحیح مثبت می باشند. غلط ← $-3 \in Z$

ب) برای هر عدد طبیعی n عبارت 2^n+1 اول است. غلط ← $n=3 \quad 2^3+1=9$

ALYAZ