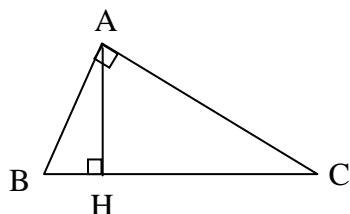


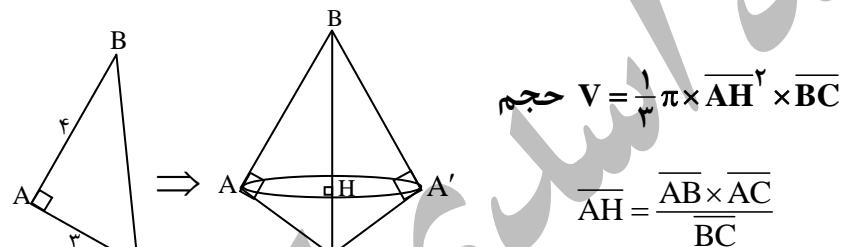
قسمت اول: هندسه

مثلث قائم‌الزاویه:



$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{BC}^2 \\ \overline{AH}^2 &= \overline{HB} \times \overline{HC} \\ \overline{AC}^2 &= \overline{CH} \times \overline{BC} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BH} \times \overline{BC} \\ \overline{AB} \times \overline{AC} &= \overline{AH} \times \overline{BC} \end{aligned}$$

مثال: مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه قدر است؟

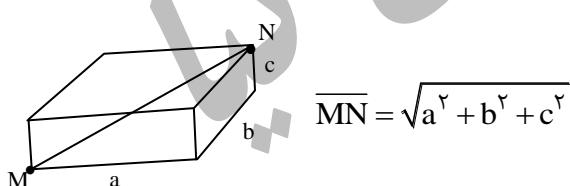


$$\text{حجم } V = \frac{1}{3}\pi \times \overline{AH}^2 \times \overline{BC}$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$$

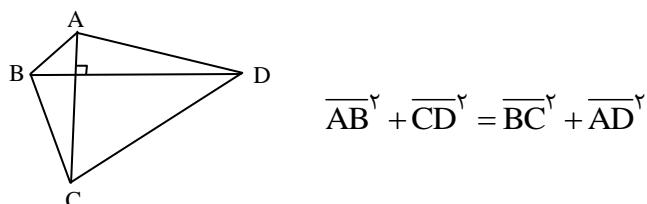
فیثاغورس:

اندازه‌ی قطر مکعب مستطیل:



$$\overline{MN} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

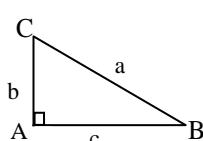
نکته: در هر چهارضلعی که قطرهایش برهم عموداند، داریم:



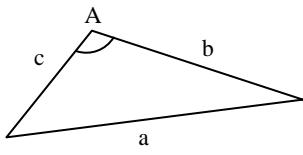
$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$$

نکته: اگر ضلع مقابل به A را با a ، و ضلع مقابل به B را با b و ضلع مقابل به C را با c نمایش دهیم، داریم:

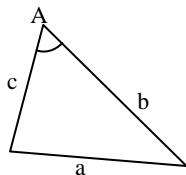
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$



$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

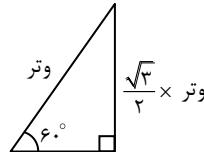
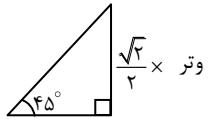
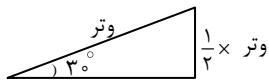


نکته: در هر مثلث قائم الزاویه :

- ضلع مقابل به زاویهٔ 30° درجه، نصف وتر است.

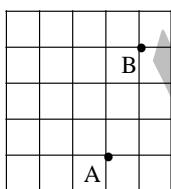
- ضلع مقابل به زاویهٔ 45° درجه، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است.

- ضلع مقابل به زاویهٔ 60° درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.



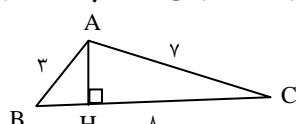
نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

سوال ۱: در صفحه‌ی شطرنجی زیر، یک مورچه می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B که در پشت این صفحه است، برود. اگر طول هر پاره خط کوچک، ۱ واحد باشد، طول کوتاه‌ترین مسیری که مورچه باید طی کند، چقدر است؟

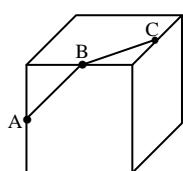


- (۱) $2\sqrt{3}$
- (۲) $3\sqrt{2}$
- (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- (۴) $\sqrt{20}$

سوال ۲: در مثلث ABC، ارتفاع نظیر ضلع ۸ سانتی‌متری را رسم کردیم. در این صورت اندازهٔ HC چه‌قدر است؟ اندازهٔ زاویهٔ B، چند درجه است؟

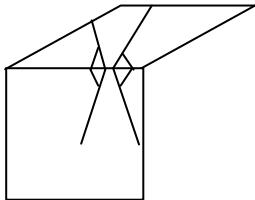


سوال ۳: در مکعب مقابل، اندازهٔ زاویهٔ B، چند درجه است؟ نقاط A و B و C، وسط اضلاع هستند.

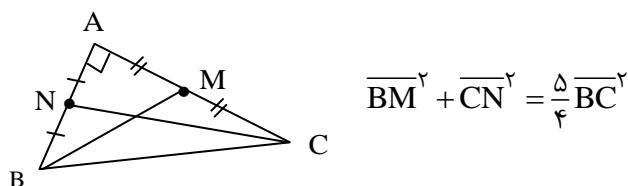


- (۱) 150°
- (۲) 135°
- (۳) 120°
- (۴) 90°

نکته: هرگاه ۲ صفحه برهم عمود باشند. هر دو خطی که روی یال مشترک با یکدیگر برخورد می‌کنند، برهم عمودند.

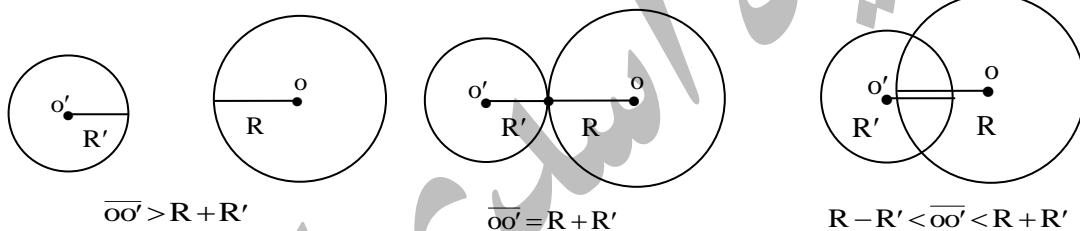


نکته: در هر مثلث قائم الزاویه، مجموع مربعات دو میانه‌ی نظیر ضلع‌های قائم، برابر است با $\frac{5}{4}$ مربع وتر است:

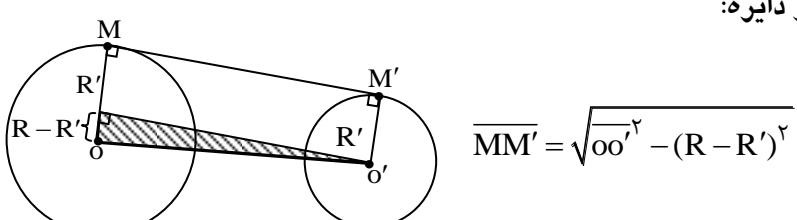


دایره:

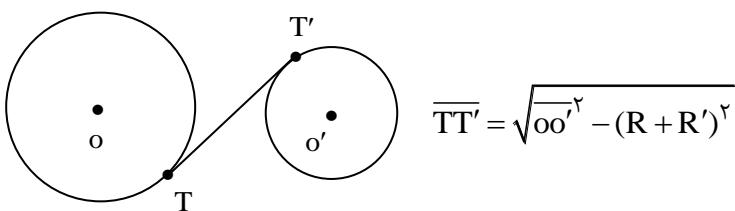
وضعیت ۲ دایره نسبت به هم:



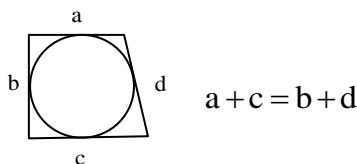
نکته: طول مماس مشترک خارجی دو دایره:



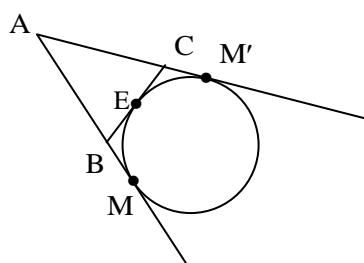
نکته: طول مماس مشترک داخلی دو دایره:



نکته: هرگاه بر دایره‌ای ۲ مماس رسم کنیم، طول مماس‌ها باهم برابر است.
نتیجه: در چهارضلعی محیطی همواره داریم:



نتیجه: در شکل زیر، محیط مثلث ABC همواره ثابت است و مستقل از حالت قرار گرفتن مماس BC بر دایره است. زیرا $\overline{CE} = \overline{CM}'$ و همچنین $\overline{BE} = \overline{BM}$ است.



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\hat{M} = \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \quad \text{؛ زاویه} \\ \overline{MA} \times \overline{MD} = \overline{MB} \times \overline{MC} \quad \text{؛ ضلع}$$

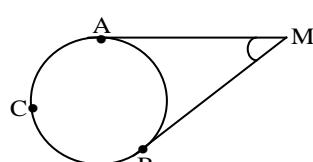
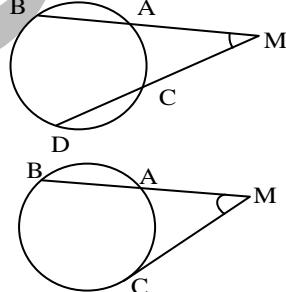
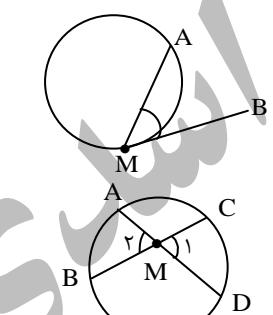
$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \quad \text{؛ زاویه} \\ \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD} \quad \text{؛ ضلع}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2} \quad \text{؛ زاویه} \\ \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \quad \text{؛ ضلع}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} \quad \text{؛ زاویه}$$

$$\hat{M} + \widehat{AB} = 180^\circ \quad \text{؛ زاویه} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \quad \text{؛ ضلع}$$

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



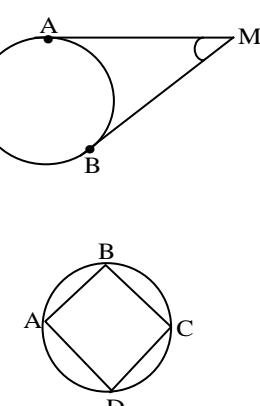
۴- زاویه‌ی خارجی با یک ضلع مماس

۲- زاویه‌ی داخلی

۳- زاویه‌ی خارجی

۱- زاویه‌ی ظلّی

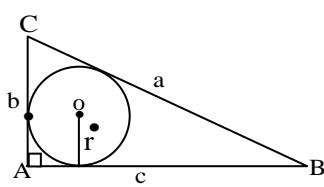
رابطه‌های زیر را در دایره‌ها به خاطر بسپارید:



۵- زاویه‌ی خارجی با دو ضلع مماس

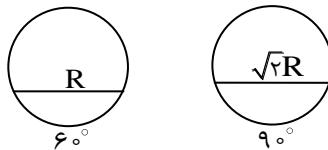
۶- چهارضلعی محاطی

نکته: شعاع دایره‌ی محاطی در هر مثلث قائم‌الزاویه با وتر a و باضلع‌های قائم b و c از رابطه‌ی



$$r = \frac{b+c-a}{2}$$

نکته: وترهای نظیر کمان‌های 60° و 90° درجه برحسب R برابرند با:

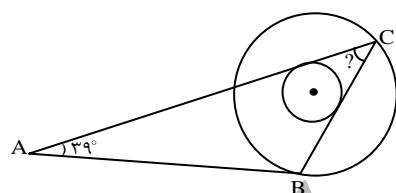


نکته: مساحت مثلث ABC با ضلع‌های a , b و c برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2}$$

سوال ۴: در شکل زیر دو دایره‌ی هم مرکز وجود دارد که در آن وتر BC بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس شده است. از A ، مماس AB را بر دایره‌ی بزرگ‌تر و مماس AC را بر دایره‌ی کوچک‌تر رسم می‌کنیم. اگر



$\hat{A} = 39^\circ$ باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی C چند درجه است؟

- (۱) ۳۴
(۲) ۴۲
(۳) ۴۵
(۴) ۵۲

۶ هندسه‌ی نهم: همنهشتی

سوال ۵: کدام عبارت زیر درست است؟

الف) اگر محیط دو مثلث باهم برابر باشند، دو مثلث با یکدیگر همنهشت‌اند.

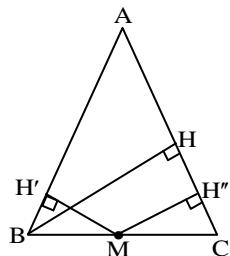
ب) اگر مساحت دو مثلث باهم برابر باشند، دو مثلث با یکدیگر همنهشت‌اند.

ج) اگر هم محیط و هم مساحت دو مثلث با یکدیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشت‌اند.

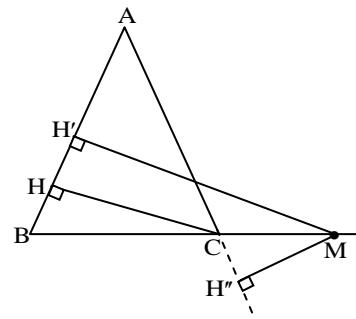
د) اگر محیط و یک زاویه از مثلثی با محیط و یک زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث با یکدیگر همنهشت‌اند.

ه) اگر محیط و دو زاویه از مثلثی با محیط و دو زاویه از مثلثی برابر باشند، دو مثلث با یکدیگر همنهشت‌اند.

نکته: در هر مثلث متساوی الساقین داریم:

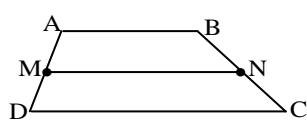


$$\overline{MH'} + \overline{MH''} = \overline{BH}$$



$$\overline{MH'} - \overline{MH''} = \overline{CH}$$

نکته: در هر ذوزنقه هرگاه وسط دو ساق را به هم وصل کنیم، داریم:



$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$$

تشابه:

سوال ۶: کدام جمله درست است؟

۱- دو چند ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه هستند.

۲- دو n ضلعی منتظم همواره باهم متشابه هستند...

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ضلع‌ها، نسبت نیمسازها، نسبت ارتفاع‌ها، نسبت میانه‌ها و نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.

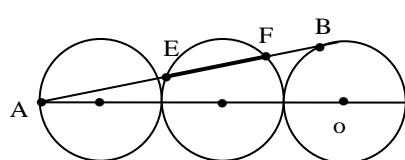
نکته: در دو شکل متشابه، نسبت مساحت‌ها، با مجذور نسبت تشابه آن‌ها برابر است.

نکات تشابه در مثلث‌های قائم‌الزاویه:

- برابر بودن یک زاویه‌ی تند.
- متناسب بودن ضلع‌های قائم.
- متناسب بودن وتر و یک ضلع.
- متناسب بودن وترها و ارتفاع‌های نظیر دو وتر.

سوال ۷: در شکل زیر، ۳ دایره‌ی مساوی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر برهم مماس‌اند و مرکز آن‌ها روی یک خط

راست قرار دارد. اگر مماس AB را رسم کنیم، طول وتر EF چند سانتی‌متر است؟



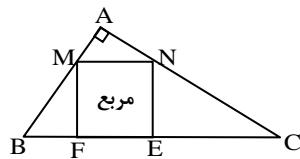
۱۶) ۱

۱۲) ۲

۸) ۳

۶) ۴

سوال ۸: در شکل زیر چند جفت مثلث متشابه وجود دارد؟



- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

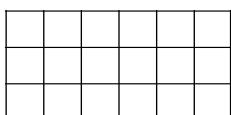
نکته: در شکل فوق، داریم:

$$\text{مساحت مربع} = \overline{BF} \times \overline{EC}$$

نکته: هر شکل با خودش همنهشت و متشابه است.

نکته: در دو مستطیل متشابه، نسبت عرض به طول آنها باهم برابر است.

سوال ۹: در شکل زیر چند مستطیل متشابه با مستطیل بزرگ وجود دارد؟

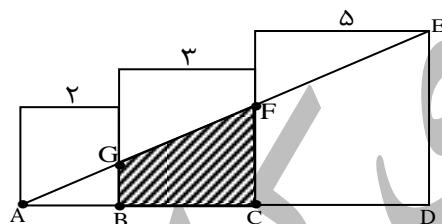


- ۲۸ (۲)
- ۴۰ (۴)
- ۳۴ (۳)

نکته: دو مستطیل که زاویه‌ی بین قطرهایشان باهم برابر باشد، با یکدیگر متشابه هستند.

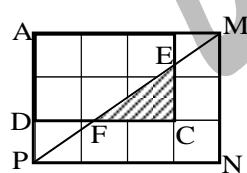


سوال ۱۰: مساحت قسمت رنگی چند واحد است؟



- ۴ (۱)
- ۴/۷۵ (۲)
- ۵/۲۵ (۳)
- ۵/۵ (۴)

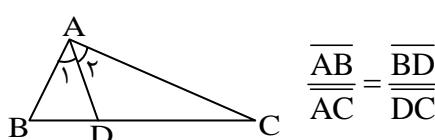
سوال ۱۱: در شکل زیر، مساحت قسمت مشترک دو شکل چند واحد است؟



- $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{25}{24}$ (۱)
- $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳)

نکته: در هر مثلث با رسم نیمساز داریم:

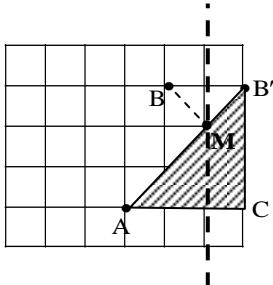
اثبات از طریق مساحت.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

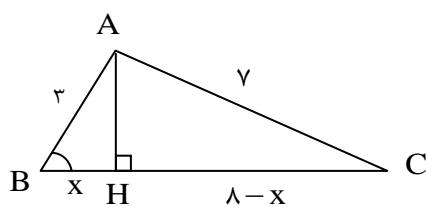
نکته: هرگاه مختصات رئوس شکل را a برابر کنیم، شکل به وجود آمده با شکل اولیه متشابه است. نسبت محیط این دو شکل، a و نسبت مساحت این دو شکل، a^2 است.

پاسخنامه تشریحی سؤالات قسمت اول (هندرسه)



$$\begin{aligned}\overline{AB'}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2 \\ \Rightarrow \overline{AB'}^2 &= 3^2 + 3^2 = 18 \\ \overline{AB'} &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

۱- گزینه‌ی (۲)



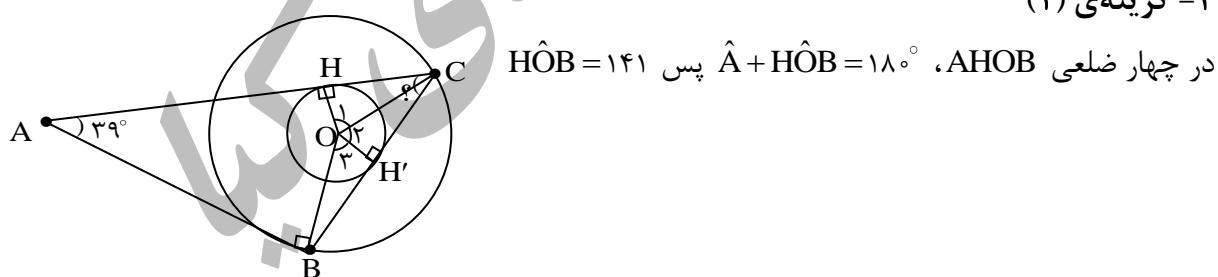
$$\begin{aligned}\overline{AH}^2 &= 3^2 - x^2 \\ \overline{AH}^2 &= 7^2 - (8-x)^2 \\ \Rightarrow 9 - x^2 &= 49 - 64 + x^2 + 16x \Rightarrow x = \frac{24}{16} = 1.5 \Rightarrow HC = 6/5\end{aligned}$$

-۲

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABH$ ، چون \overline{BH} نصف \overline{AB} است، پس $\hat{B}AH = 30^\circ$ و درنتیجه $\hat{B} = 60^\circ$ درجه است.

۳- گزینه‌ی (۴) 90° درجه

۴- گزینه‌ی (۱)



در چهار ضلعی $AHOB$ ، $\hat{A} + \hat{H}OB = 180^\circ$ پس $\hat{AHOB} = 141^\circ$

از طرفی مثلث‌های OHC و OHB هم نهشت هستند پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3$ است. پس مجموع سه زاویه \hat{O}_1 و \hat{O}_2 و \hat{O}_3 برابر است با:

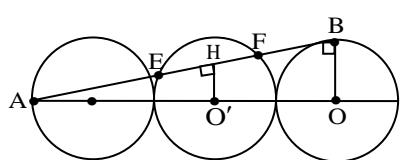
$$360^\circ - 141^\circ = 219^\circ$$

پس زاویه \hat{O}_1 می‌شود $219^\circ \div 3 = 73^\circ$ در نتیجه زاویه $\hat{HOH}' = 146^\circ$ و در نتیجه زاویه $C = 34^\circ$ درجه است.

۵- گزینه‌ی (هـ)

۶- گزینه‌ی (۲)

(۱) - گزینه‌ی

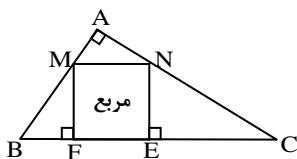


$$\begin{aligned} \triangle AO'H &\sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{O'H}}{\overline{OB}} \\ &\text{تساوی ۲ زاویه} \\ &\Rightarrow \frac{3^\circ}{5^\circ} = \frac{\overline{O'H}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{O'H} = 6 \end{aligned}$$

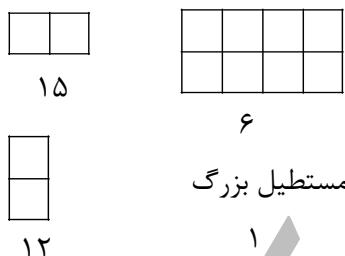
رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث $O'EH$:

$$\overline{O'H}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{O'E}^2 \Rightarrow 6^2 + \overline{EH}^2 = 100 \Rightarrow \overline{EH} = 8 \Rightarrow \overline{EF} = 16$$

(۴) - گزینه‌ی

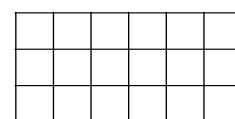


- $\triangle (AMN, BMF), (\triangle AMN, ENC)$
 $\triangle (BMF, ENC), (\triangle AMN, ABC)$
 $\triangle (BMF, ABC), (\triangle ENC, ABC)$



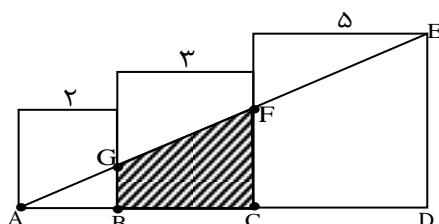
$$15 + 6 + 12 + 1 = 34$$

(۳) - گزینه‌ی



(۵) - گزینه‌ی

$$\begin{aligned} \triangle AFC &\sim \triangle AED \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{ED}} \Rightarrow \overline{FC} = \frac{2}{5} \overline{AD} \\ \triangle ABG &\sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{FC}} \Rightarrow \overline{BG} = 1 \\ S_{BCFG} &= \frac{(\frac{2}{5} \cdot 5 + 1) \times 3}{2} = 5/25 \end{aligned}$$



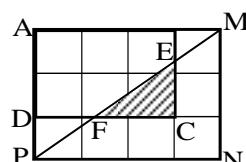
(۶) - گزینه‌ی

$$\triangle BME \sim \triangle MAP \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{BE} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} - \overline{BE} = 2 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\triangle PDF \sim \triangle PAM \Rightarrow \frac{\overline{FD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{FD} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{FC} = \overline{DC} - \overline{FD} = 3 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{5}{3}} \Rightarrow S_{\triangle EFC} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{24}$$



قسمت دوم: مجموعه‌ها و احتمال

سوال ۱: اگر $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_1 = \{1\}$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی A_{10} با چه عددی شروع می‌شود؟

(۵۶) ۴

(۵۵) ۳

(۴۶) ۲

(۴۵) ۱

نکته: در نمایش مجموعه‌ها با علامت ریاضی، اگر $n^{n+1}(-)$ یا $\frac{n(n+1)}{2}(-)$ به کار رود، عضوها یکی در میان منفی و مثبت می‌شوند و اگر $\frac{n(n+1)+1}{2}(-)$ یا $\frac{n(n+1)}{2}(+)$ استفاده شود، عضوها دو تا در میان منفی و مثبت می‌شوند.

نکته: برای به دست آوردن تعداد شمارنده‌های طبیعی هر عدد، آن عدد را به عوامل اول تجزیه کرده و سپس به هر توان ۱ واحد اضافه کرده و توان‌های جدید را در هم ضرب می‌کنیم.

سوال ۲: مجموعه‌ی $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1620}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$ چند عضو دارد؟

(۲۰) ۴

(۳۰) ۳

(۴۰) ۲

(۶۰) ۱

نکته: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد به‌طوری که مجموع عضوهای آن عدد M باشد، مجموع عضوهای همه‌ی زیرمجموعه‌های A برابر است با: $2^{n-1} \times M$

سوال ۳: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ را نوشتیم. مجموع عضوهای همه‌ی زیرمجموعه‌های A چه قدر است؟

(۶۴) ۴

-۳۲ (۳)

۳۲ (۲)

(۶۴) ۱

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی هر مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی آن برابر است و تعداد هر کدام 2^{n-1} است. (n تعداد کل عضوهاست)

سوال ۴: تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی مجموعه‌ی $A = \{2, 5, 8, \dots, 104\}$ چندتاست؟

(۲۳۰) ۴

۲۳۴ (۳)

۲۵۳ (۲)

(۲۱۰۴) ۱

نکته: تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء برابر است با ترکیب r از n :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

سوال ۵: یک مجموعه‌ی 10 عضوی، چند زیرمجموعه‌ی 3 عضوی دارد؟

(۶۴) ۴

۱۰۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

(۱۲۸) ۱

سوال ۶: به چند طریق می‌توان ۳ زیرمجموعهٔ غیرتھی A و B و C از مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ نوشت به‌طوری‌که رابطهٔ $A \cap B = C$ برقرار باشد؟

۵۴) ۴

۵۲) ۳

۴۵) ۲

۲۵) ۱

* مجموعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰ را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید، چند زیرمجموعهٔ می‌توان نوشت که:

سوال ۷: حتماً عضوهای ۳ و ۵ را دارا است؟

۲۳) ۴

۲۵) ۳

۲۶) ۲

۲۸) ۱

سوال ۸: شامل عضوهای ۳ و ۵ باشد ولی عضوهای ۷ و ۸ و ۹ را شامل نباشد؟

۲۷) ۴

۲۶) ۳

۲۵) ۲

۲۴) ۱

سوال ۹: اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن، دقیقاً ۸ باشد؟

۲۹) ۴

۲۸) ۳

۲۷) ۲

۲۶) ۱

سوال ۱۰: اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن، حداقل ۸ باشد؟

۲۶) ۴

۲۷) ۳

۲۸) ۲

۲۹) ۱

نکته: به مجموعه‌ای که فقط یک عضو داشته باشد، مجموعهٔ یکانی می‌گویند.

سوال ۱۱: مجموعه‌های A و B و C به ترتیب دارای ۲، ۳ و ۴ عضو هستند و هر دو تایشان حداقل یک عضو مشترک دارند. $A \cup B \cup C$ حداقل و حداقل‌تر چند عضو دارد؟

۹, ۳) ۴

۹, ۲) ۳

۴, ۲) ۲

۷, ۴) ۱

سوال ۱۲: چند زیرمجموعهٔ متمایز از مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ می‌توان نوشت به‌طوری‌که هر دو زیرمجموعهٔ دلخواه آن، حداقل در ۲ عضو مشترک باشند؟

۲۱) ۴

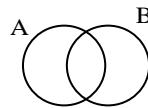
۲۲) ۳

۲۳) ۲

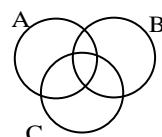
۲۴) ۱

نکته:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ &\quad - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



سوال ۱۳: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی با ۲۱۰ که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشند، چند تا است؟

۱۵۲) ۴

۱۵۴) ۳

۱۴۷) ۲

۱۴۸) ۱

سوال ۱۴: A ، B و C ، سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد عضوهای $A - B$ ، $B - C$ ، $A - C$ و $C - A$ برابر ۳، ۲، ۲ و ۵ است. تعداد عضوهای مجموعه $A - C$ چند تا است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

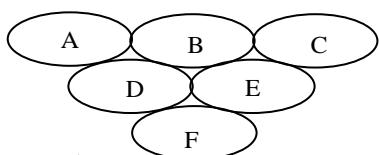
۰ (۱)

نکته:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

سوال ۱۵: A و B و C ، سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $A - B = D$. در این صورت کدام گزینه حتماً درست است؟



$F \subseteq (A \cap C)$ (۳)

$B \subseteq F$ (۲)

$F \subseteq C$ (۱)

$(D \cap C) \subseteq F$ (۵)

$(A \cap C) \subseteq F$ (۴)

* در یک کیسه، ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سیاه وجود دارد. ۲ توپ به تصادف، یکی پس از دیگری بدون جایگزینی، از کیسه برداشتیم. به سوالات زیر پاسخ دهید.

سوال ۱۶: احتمال آن که توپ اول قرمز و توپ دوم آبی باشد، چهقدر است؟

 $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{10}{33}$ (۳) $\frac{12}{33}$ (۲) $\frac{5}{33}$ (۱)

سوال ۱۷: احتمال آن که یک توپ قرمز و دیگری آبی باشد، چهقدر است؟

 $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{10}{33}$ (۲) $\frac{12}{33}$ (۱)

سوال ۱۸: احتمال آن که دو توپ هم‌رنگ باشند، چهقدر است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{19}{66}$ (۳) $\frac{10}{33}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۱)

سوال ۱۹: احتمال آن که دو توپ هم‌رنگ نباشند، چهقدر است؟

 $\frac{19}{66}$ (۴) $\frac{23}{33}$ (۳) $\frac{15}{33}$ (۲) $\frac{47}{66}$ (۱)

سوال ۲۰: در پرتاب ۳ تاس، احتمال این که مجموع اعداد رو شده، بزرگ‌تر از ۵ باشد، چهقدر است؟

 $\frac{187}{216}$ (۴) $\frac{201}{216}$ (۳) $\frac{206}{216}$ (۲) $\frac{209}{216}$ (۱)

سوال ۲۱: علی ارقام یک تا ۹ را روی ۹ کارت نوشت و در کیسه‌ای انداخت. سپس ۴ کارت از آن پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کند و آن‌ها را به ترتیب بعد از بیرون آمدن کنار هم قرار می‌دهد. احتمال آن که عدد ۴ رقمی به دست بیاید که اختلاف رقم یکان و هزارگان آن ۴ باشد، چهقدر است؟

 $\frac{5}{27}$ (۴) $\frac{5}{72}$ (۳) $\frac{5}{36}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۱)

سوال ۲۲: اگر $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) = \frac{9}{4}$ باشد، کمترین مقدار عبارت $P(A) + P(B) + P(C)$ کدام است؟

(۴) ۱/۵

(۳) ۱

(۲) ۰/۵

(۱) ۰

احتمال‌های غیرهمشانس

سوال ۲۳: سه دونده a_1 ، a_2 و a_3 با هم مسابقه می‌دهند. اگر احتمال برد a_1 ، a_2 برابر احتمال برد a_3 و احتمال برد a_2 ، دو برابر احتمال برد a_3 باشد، احتمال این که a_1 یا a_2 برنده شود، چقدر است؟

(۴) ۰/۹

(۳) $\frac{8}{9}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۱) $\frac{6}{7}$

سوال ۲۴: نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۴ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال این که فاصله‌ی این نقطه از نزدیک‌ترین رأس مربع، کوچک‌تر از ۲ باشد، چه‌قدر است؟

(۴) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۱) $\frac{\pi}{3}$

سوال ۲۵: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول آن‌ها به ترتیب ۱ و ۵/۰ متر است. قطعه‌ی بزرگ‌تر را دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه ۳ قطعه چوب حاصل می‌شود. احتمال این که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدنه‌ند، چه‌قدر است؟

(۴) ۱

(۳) ۰/۵

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۰/۲۵

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت دوم (مجموعه‌ها و احتمال)

۱- گزینه (۲) به آخرین عدد در هر مجموعه توجه کنید:

$$A_1 \rightarrow 1, \quad A_2 \rightarrow 1+2=3, \quad A_3 \rightarrow 1+2+3=6, \quad A_4 \rightarrow 1+2+3+4=10.$$

پس آخرین عدد در مجموعه $A_9 = 45 + 1 = 46$ با $A_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ و در نتیجه شروع می‌شود.

۲- گزینه (۱)

$$1620 = 2^3 \times 3^4 \times 5 \rightarrow (2+1) \times (4+1) \times (1+1) = 3 \times 5 \times 2 = 30 \Rightarrow 30 \times 2 = \boxed{60}$$

۳- گزینه (۳)

$$2^{n-1} \times M = 2^4 \times \left[\underbrace{-3 + (-2) + 0 + 1 + 2}_{-2} \right] = -32$$

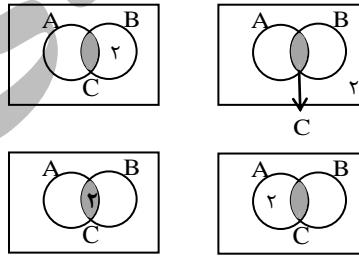
۴- گزینه (۳)

$$\frac{10-2}{3} + 1 = 34 + 1 = 35 \Rightarrow 2^{35-1} = 2^{34}$$

۵- گزینه (۲)

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

۶- گزینه (۲)



هر عضو، ۴ حالت می‌تواند داشته باشد، پس در کل می‌توان $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ مجموعه با شرط

نوشت. $A \cap B = C$

۷- گزینه (۱)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

$$2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

۸- گزینه (۲)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

$$2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2^5$$

۹- گزینه (۳)

$$\left. \begin{array}{l} \text{کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 1 \\ \text{بزرگترین عضو} \\ \rightarrow 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 2^7$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 2 \\ \text{بزرگترین عضو} \\ \rightarrow 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 2^7$$

$$\Rightarrow 2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^8$$

۱۰- گزینه (۱) حداقل ۸ یعنی ۸ یا ۹ باشد:

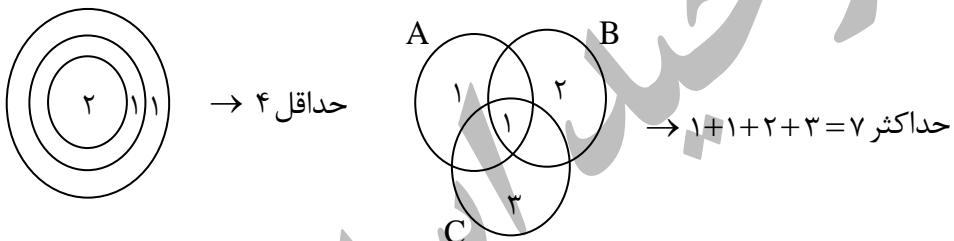
$$\left. \begin{array}{l} \text{کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 1 \\ \text{بزرگترین عضو} \\ \rightarrow 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 2^8$$

با توجه به حل سؤال ۹، 2^8 زیرمجموعه نیز می‌توان برای ۸ اختلاف نوشت.

$$2^8 + 2^8 = 2 \times 2^8 = 2^9$$

پس مجموع آن‌ها برابر است با:

۱۱- گزینه (۱)



۱۲- گزینه (۳) زیرمجموعه‌های ۴ عضوی، ۵ عضوی و ۶ عضوی جواب مسئله هستند:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$$

۱۳- گزینه (۳)

$$n(\bar{5}) = n(\bar{3}) + n(\bar{2}) - n(\bar{5} \cap \bar{3})$$

$$n(\bar{5} \cap \bar{3}) = n(\bar{5}) + n(\bar{3}) - n(\bar{5} \cup \bar{3})$$

$$= 210 \underbrace{|}_{\bar{2}} + 210 \underbrace{|}_{\bar{3}} + 210 \underbrace{|}_{\bar{5}} - 210 \underbrace{|}_{\bar{6}} - 210 \underbrace{|}_{\bar{10}} + 210 \underbrace{|}_{\bar{15}} + 210 \underbrace{|}_{\bar{30}}$$

$$= 105 + 70 + 42 - 35 - 21 - 14 + 7 = 154$$

۱۴- گزینه (۳) با رسم نمودار ون داریم:

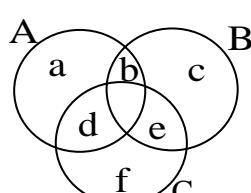
$$n(A - B) = a + d = ۳ \quad (۱)$$

$$n(B - C) = b + c = ۲ \quad (۲)$$

$$n(B - A) = e + c = ۲ \quad (۳)$$

$$n(C - A) = e + f = ۴ \quad (۴)$$

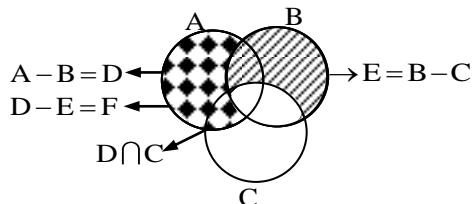
$$n(C - B) = f + d = ۵ \quad (۵)$$



$$(۱) + (۲) \Rightarrow (a + d) + (b + c) = ۳ + ۲ = ۵$$

$$(۳) + (۵) \Rightarrow (e + c) + (f + d) = ۲ + ۳ = ۵$$

$$\Rightarrow (a + b) + \overbrace{(c + d)}^{۳} = ۵ \Rightarrow (a + b) = ۲ \Rightarrow n(A - C) = a + b = ۲$$



۱۵- گزینه (۵) با تبدیل به نمودار ون داریم:
با توجه به نمودار مقابل، قسمت رنگی در سمت چپ شکل،
 $A - B = D$ است و قسمت رنگی در سمت راست شکل،
 $B - C = E$ است و $D \cap E = F$ است. پس
است و اشتراک D با C ، زیرمجموعه خودش
 $(D \cap C) \subseteq F$ است.

۱۶- گزینه (۱)

توب دوم آبی و توب اول قرمز

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

۱۷- گزینه (۲)

دیگری آبی و یک توب قرمز

توب دوم قرمز و توب اول آبی یا توب دوم آبی و توب اول قرمز

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{5}{11}\right) = \frac{1}{33}$$

۱۸- گزینه (۳) دو توب همنگ باشند:

دومی سیاه و اولی سیاه یا دومی آبی و اولی آبی یا دومی قرمز و اولی قرمز

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{3}{12} \times \frac{2}{11}\right) = \frac{5}{33} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22} = \frac{19}{66}$$

۱۹- گزینه (۱) دو توب همنگ نباشند:

احتمال همنگ بودن $-1 =$ احتمال همنگ نبودن $\Rightarrow 1 =$ احتمال همنگ نبودن + احتمال همنگ بودن

$$\Rightarrow 1 - \frac{19}{66} = \frac{47}{66}$$

۲۰- گزینه (۱)

$(1,1,1)(2,1,1), (1,2,1)(1,1,2)(2,2,1)(2,1,2), (1,2,2)$

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \Rightarrow 216 - 7 = 209 \Rightarrow \frac{209}{216}$$

۲۱- گزینه (۲)

می‌توان جای یکان و اختلاف آنها ۴ است.
هزارگان را عوض کرد.

$$\frac{5 \times 7 \times 6 \times 2}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{36}$$

(۴) - گزینه ۲۲

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A \cap C) \geq P(A) + P(C) - 1$$

$$P(B \cap C) \geq P(B) + P(C) - 1$$

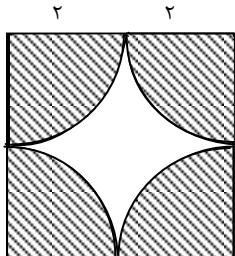
$$\Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \geq \underbrace{2(P(A) + P(B) + P(C))}_{\frac{9}{4}} - 3 = \frac{3}{2} = 1.5$$

(۱) - گزینه ۲۳

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = 1 \Rightarrow 4P(a_3) + 2P(a_2) + P(a_1) = 1$$

$$\Rightarrow P(a_3) = \frac{1}{7}, P(a_2) = \frac{2}{7}, P(a_1) = \frac{4}{7} \Rightarrow P(a_1) + P(a_2) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

(۲) - گزینه ۲۴

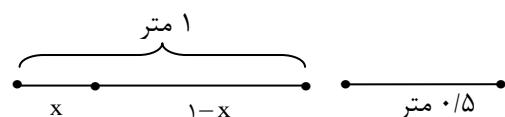


$$\text{احتمال} = \frac{\text{مساحت ۴ ربع دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{4 \times \frac{1}{4} \times \pi r^2}{4 \times 4} = \frac{\pi}{4}$$

(۳) - گزینه ۲۵ طبق نامساوی مثلثی، هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر باشد. سه قطعه چوب داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x + 0.25 > 1-x \Rightarrow x > 0.25 \\ (1-x) + 0.25 > x \Rightarrow x < 0.75 \end{array} \right\} \Rightarrow \{x | 0.25 < x < 0.75\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{0.75 - 0.25}{1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$



قسمت سوم: معادله‌ی خط

سوال ۱: نمودار $3x^2y + 2xy^2 - 6xy = 0$ نمایش است.

توضیح: قرینه نسبت به محور طول، محور عرض، مبدأ، نیمساز ناحیه‌ی ۱ و ۳ و نیمساز ناحیه‌ی ۲ و ۴ را بدانید.

سوال ۲: معادله‌ی قرینه‌ی خط $3x - 2y = 1$ نسبت به محور طول کدام است؟

$$2x - 3y = 1 \quad (2) \qquad 3x + 2y = 1 \quad (1)$$

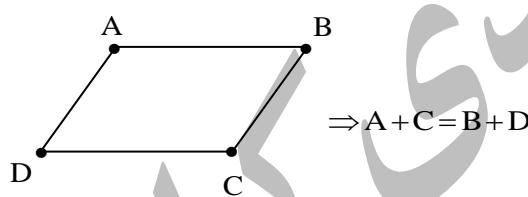
$$x + y = 1 \quad (4) \qquad 3x - 2y = 1 \quad (3)$$

نکته: مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB:



$$M = \frac{A + B}{2}$$

نکته: در مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع، مجموع مختصات دو رأس مقابل، با مجموع مختصات دو رأس مقابل دیگر، برابر است:



$$\Rightarrow A + C = B + D$$

نکته: حرکات شتابدار، خطی نیستند. مثلاً برخواستن یا نشستن هواپیما، انداختن سنگ یا تیر. همچنین مساحت دایره نسبت به شعاع یا حاصل‌ضرب ۲ عدد صحیح متواالی، رابطه خطی نیستند.

نکته: معادله‌ی خطهای مبدأ گذر که از نقطه‌ی A $= \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ می‌گذرند، به صورت $y = \frac{y_A - y}{x_A - x} x$ است.

مثال: معادله‌ی خطی که از مبدأ و نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، $y = \frac{-3}{5}x$ است.

سوال ۳: زاویه‌ای که خط $x - \sqrt{3}y = 0$ با جهت مثبت محور طول می‌سازد، چند درجه است؟

۱۵۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۶۰ (۲)

۳۰ (۱)

نکته: در سوالاتی که می‌گوید به‌ازای جمیع مقادیر m یا a، اجازه داریم هر عددی حقیقی را به‌جای m یا a قرار دهیم.

سوال ۴: خط با معادله $y + a = 0$ به ازای جمیع مقادیر a ، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

سوال ۵: بر روی خط $3x + 5y = 37$ ، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

(۱) بی‌شمار
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

نکته: معادله خطی که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q می‌باشد، از رابطه $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ به دست

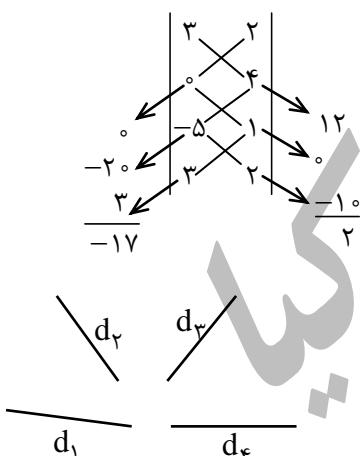
می‌آید.

مثال: معادله خطی بنویسید که طول از مبدأ آن $\frac{1}{3}$ و عرض از مبدأ آن -2 باشد.

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow 3x - \frac{1}{2}y = 1$$

نکته: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن داده شده است (روش بند کفشه):

مثال: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌باشد، چند واحد است؟



$$\Rightarrow S = \frac{|-12 - 2|}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$

توجه: شیب سطح شیبدار با شیب خط، متفاوت است.

سوال ۶: کدام یک از چهار خط زیر، دارای شیب کمتری هستند؟

- (۱) d_1
(۲) d_2
(۳) d_3
(۴) d_4

توجه: نام دیگر شیب، ضریب زاویه است.

نکته: شیب خطی که از نقاط $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ می‌گذرد برابر است با:

نکته: شرط قرار گرفتن ۳ نقطه روی یک خط راست (استقامت):

شیب $AB = BC$ یا شیب $AB = AC$ یا شیب $BC = AC$

نکته: فاصله از نقطه:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی A = $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ از خط $ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: مساحت مربعی که یک رأس آن نقطه‌ی A = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و یک ضلع آن روی خط $4x - 3y - 2 = 0$ قرار دارد،

چند واحد است؟

جواب:

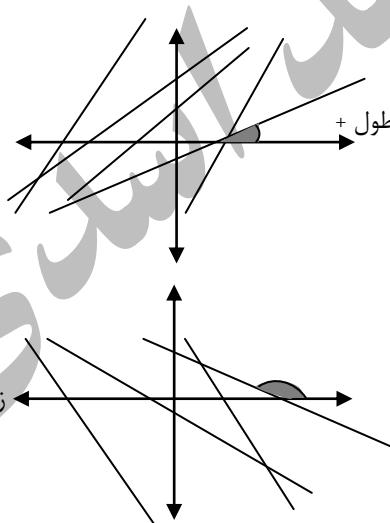
$$4x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 2 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

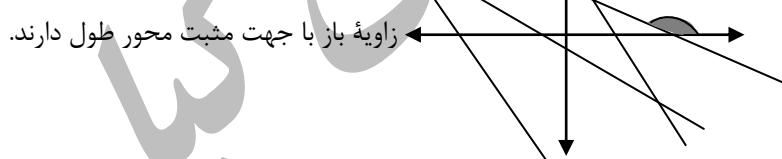
شیب خط:

نکته:

(الف) شیب این خطوط، مثبت است: طول زاویه تند با جهت مثبت محور طول دارند.



(ب) شیب این خطوط، منفی است:



نکته: شیب خطی که طول از مبدأ آن، p و عرض از مبدأ آن q می‌باشد برابر است با: $-\frac{q}{p}$.

نکته: شرط موازی بودن دو خط: برابر بودن شیب‌های آن‌ها است.

نکته: شرط عمود بودن دو خط: حاصلضرب شیب‌هایشان، ۱- باشد یا شیب یکی از خطها، قرینه و معکوس دیگری باشد.

نکته: نقطه‌ی برخورد دو خط، با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست می‌آید.

سوال ۷: قرینه خط (a) به معادله $x - y = 4$ را نسبت به خط $3x - 2y = 1$ رسم کردیم و نام آن را (a') گذاشتیم. مختصات نقطه‌ی برخورد خط (a) و (a') کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -11 \end{bmatrix} \quad (1)$$

سوال ۸: یک عدد صحیح مثبت است. خطهای $y = mx - 1$ و $y = 13x + 11$ را در نقطه‌ای با مختصات صحیح قطع کرده‌اند. در این صورت m برابر است با:

(۴) فقط ۵

(۳) فقط ۶

(۲) ۴ یا ۵ یا ۶

(۱) فقط ۴

نکته: شرایط وجود جواب برای دستگاه دو معادله و دو مجهول:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دو خط متقطع‌اند. پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

دو خط موازی‌اند پس نقطه‌ی برخورد ندارند. یعنی دستگاه جواب ندارد.

دو خط برهم منطبق‌اند پس بی‌شمار جواب وجود دارد.

سوال ۹: m چند باشد تا دستگاه $\begin{cases} x + my + z = -1 \\ 2x + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$ جواب داشته باشد ولی منحصر به فرد نباشد؟

(۴) برای m مقداری وجود ندارد.

(۳) ۱

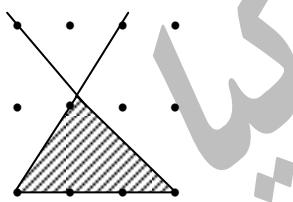
(۲) -۱

(۱) -۲

نکته: مقدار مساحت محصور بین خطوط به معادله $y = cx + nd$ ، $y = mx + np$ ، $y = ax + nb$ و $y = dx + p$ ، $y = ax + b$ و $y = mx + p$ است.

به طور مثال مقدار مساحت محصور بین خطوط $y = -x + 25$ و $y = 2x - 15$ و $y = 3x + 20$ و $y = -x + 35$ برابر ۵۰ است. مساحت محصور بین خطوط به معادله‌های $y = 3x + 4$ و $y = 2x - 3$ و $y = -x + 7$ و $y = 2x + 3$ برابر ۱۰ است.

سوال ۱۰: مساحت قسمت رنگی در شکل مقابل چند واحد است؟



(۱) ۲

(۲) ۱/۸

(۳) ۱/۶

(۴) ۱/۵

سوال ۱۱: مساحت سطح محصور در نمودار $x^2y + xy^2 - xy = 0$ چه قدر است؟

(۴) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۱) ۱

سوال ۱۲: دو عدد حقیقی بین ۰ و ۲ انتخاب کردیم. احتمال آن‌که مجموع دو عدد انتخاب شده، بین ۱ و ۲ باشد، چه قدر است؟

(۴) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۱) $\frac{1}{8}$

سوال ۱۳: علی می‌خواست با یک سرعت ثابت، از شهر A به شهر B برود. او حساب کرد که اگر سرعتش، ۵ km/h بیشتر شود، ۵ ساعت زودتر می‌رسد و اگر سرعتش ۱۰ km/h بیشتر شود، ۸ ساعت زودتر می‌رسد. سرعت ثابت او در ابتدا چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

(۴) ۲۵

(۳) ۲۰

(۲) ۱۵

(۱) ۱۰

پاسخ تشریحی سؤالات قسمت سوم (معادله‌ی خط)

۱- از ۳ خط تشکیل شده است:

$$3x^2y + 2xy^2 - 6xy = 0 \Rightarrow xy(3x + 2y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

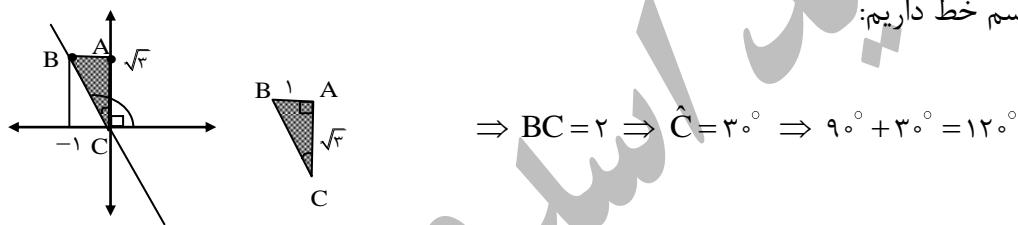
۲- گزینه (۱)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{محور طول}]{\text{قرینه نسبت به}} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

کافی است در معادله‌ی خط، به جای y ، $-y$ قرار دهیم:

$$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2(-y) = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 1$$

۳- گزینه (۳) با رسم خط داریم:



۴- گزینه (۴) به جای a دو مقدار قرار داده و دو معادله خط به دست آمده را درون دستگاه قرار داده و مختصات برخورد را به دست آوریم یا ابتدا عددی به جای a قرار دهیم که مضرب x صفر شود و پس از به دست آوردن y ، به جای a عددی قرار دهیم که مضرب y صفر شود و بتوانیم x را به دست آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0x + \left(-\frac{3}{2} + 1\right)y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = -1 \\ a = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3} + 1\right)x + 0y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۵- گزینه (۲)

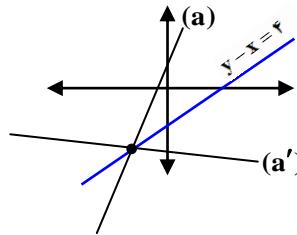
$$5y = 3x - 3x \Rightarrow y = \frac{3x - 3x}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 5 \\ x = 9 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- گزینه (۲)

۷- گزینه (۱) خط (a) و خط (a') تقارن (یعنی $x - y = 4$) یکدیگر رادر یک نقطه قطع می‌کنند. پس کافی است نقطه برخورد خط (a) (یعنی $1 = 3x - 2y$) و خط تقارن (یعنی $4 = x - y$) را به دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} -2 \times \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -8 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \\ &\underline{\quad\quad\quad} \\ x = -7 &\Rightarrow y = -11 \end{aligned}$$



-۸- گزینه (۳) با حل دستگاه، x را برحسب m به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 11 \times \begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ mx - y = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ 11mx - 11y = 11 \end{cases} \\ &\underline{\quad\quad\quad} \\ (11m + 13)x = 711 &\Rightarrow x = \frac{711}{11m + 13} \end{aligned}$$

تجزیه ۷۱۱ می‌شود 79×3^2 . پس $11m + 13$ باید شمارنده‌ی ۷۱۱ باشد و شمارنده‌های ۷۱۱، اعداد $\{1, 3, 9, 79, 237, 711\}$ هستند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 11m + 13 = 1 \Rightarrow m = -\frac{12}{11} \\ 11m + 13 = 3 \Rightarrow m = -\frac{10}{11} \\ 11m + 13 = 9 \Rightarrow m = -\frac{4}{11} \\ 11m + 13 = 79 \Rightarrow \boxed{m = 6} \\ 11m + 13 = 237 \Rightarrow m = \frac{224}{11} \\ 11m + 13 = 711 \Rightarrow m = \frac{698}{11} \end{array} \right\} \text{غیر قابل قبول است.} \Rightarrow \text{فقط } m = 6 \text{ قابل قبول است.}$$

-۹- گزینه (۲) z را برحسب x به دست می‌آوریم و در دستگاه، جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2x + z = 1 &\Rightarrow z = 1 - 2x \\ \Rightarrow \begin{cases} x + my + (1 - 2x) = -1 \\ mx + y - (1 - 2x) = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -x + my = -2 \\ (m+2)x + y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

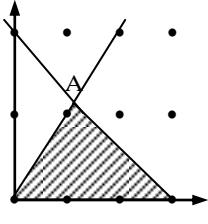
شرط انطباق دو خط را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{-1}{m+2} = \frac{m}{1} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

-۱۰- گزینه (۲)

خط (۱) : $y = x$

خط (۲) : $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 6$



$$\begin{cases} y = x \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 2x + 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

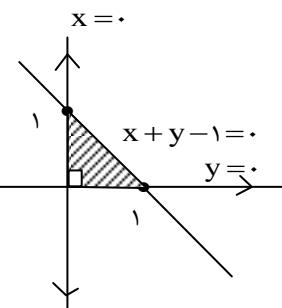
$$S = \frac{\frac{6}{5} \times 3}{2} = \frac{18}{10} = 1.8$$

۱۱- گزینه (۳)

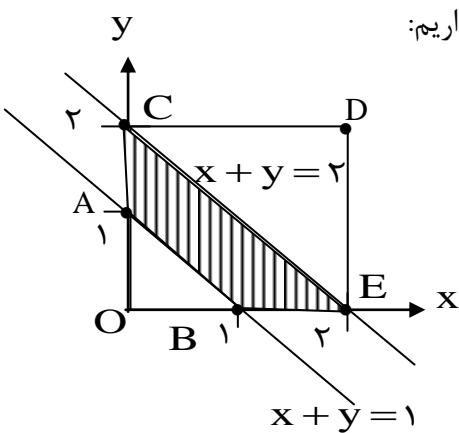
$$x^2y + xy^2 - xy = 0 \Rightarrow xy(x+y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

x	0
y	0

$$S = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$



۱۲- گزینه (۲) دو عدد حقیقی را x و y در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله $x < 2$ و $y < 2$ است.
از طرفی $x+y < 1$ می‌باشد. با توجه به نمودار رسم شده‌ی مقابل داریم:



$$S_{ABEC} = S_{OCE} - S_{OAB} = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{ABEC}}{S_{OCDE}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 \times 2} = \frac{3}{8}$$

۱۳- گزینه (۲) اگر علی با سرعت اولیه‌ی V_1 در مدت زمان t به شهر B می‌رسید، با توجه به مفروضات مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (V_1 + \Delta)(t - \Delta) = V_1 t \\ (V_1 + 10)(t - \lambda) = V_1 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta t - \Delta V_1 = 2\Delta \\ 10t - \lambda V_1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow V_1 = 15$$

توضیح: دانشآموز عزیز، از کتاب مرشد نهم فصل ۶، سوال‌های ۳۲۰، ۳۲۱ و ۳۲۲ را تمرین کنید.

قسمت چهارم: عبارت‌های جبری

درجه:

نکته: ابتدا عبارت داده شده را ساده کنید و سپس به سؤالات درجه پاسخ دهید.

سؤال ۱: درجهٔ عبارت $x^6 - 2x^3y^6 + 3x^2y^5 - y^6 + x^4y^4$

بر حسب x, y -

بر حسب xy , y می‌شود زیرا:

$$(xy)^6 x^6 - 2(xy)^3 y^6 + 3(xy)^2 y^5 - y^6 \times (xy)^0 + \underline{\underline{(xy)^4 y}}$$

بر حسب xy , y می‌شود زیرا:

$$(xy^2)^6 x^6 - 2(xy^2)^3 y^6 + 3(xy^2)^2 y^5 - (xy^2)^0 y^6 + (xy^2)^4 x^2 y$$

سؤال ۲: عبارت $(x+y+z+v+w)(z+v+w+p+q)$ پس از ساده شدن، چند جمله دارد؟

۲۵ (۴)

۲۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

نکته: اگر $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

اگر $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

سؤال ۳: اگر $x < 0$ باشد، کمترین مقدار عبارت $\frac{2x^4 - 3x^2 + 2}{x^2}$ چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: اگر مجموع چند عبارت نامنفی، صفر شود، هر یک از آن‌ها صفر هستند.

سؤال ۴: مقدار y در سؤال مقابل چه قدر است؟

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 1 = 0$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

۰ (۱)

سؤال ۵: اگر $3ab = -a^3b - 7b$ و $3ab = -3a^3b + ab - 9b$ باشد، مقدار a چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: در سؤالات شرطی، می‌توانید به جای متغیرها، اعداد دلخواه قرار دهید تا در شرط صدق کنند. سپس

آن اعداد را درون عبارت قرار داده و حاصل را به دست آورید.

سوال ۶: اگر $x + y = 2$ باشد، حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$$x^4 + y^4 - x^3y^2 - x^2y^3 + 16xy$$

-۱۶ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

-۸ (۱)

سوال ۷: اگر $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z = -14$ باشد، حاصل $x + y - z$ چه قدر است؟

۱۶ (۴)

-۱۰ (۳)

۶ (۲)

۰ (۱)

سوال ۸: اگر $\frac{(x-y)(x+y+z)^2}{x^5+y^5+z^5}$ باشد، حاصل عبارت $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ چه قدر است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

نکته: در عبارت‌های درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ ، کمترین ($a > 0$) یا بیشترین ($a < 0$) مقدار به‌ازای

$$x = -\frac{b}{2a}$$

سوال ۹: کمترین مقدار عبارت $\frac{3}{4}x^2 - 7x + 1$ چه قدر است؟

-۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

سوال ۱۰: کوچکترین عدد طبیعی n به‌طوری که عبارت $4^{1000} + 4^{623} + \dots + 4^n$ مربع کامل باشد، چه قدر است؟

۲۱۵ (۴)

۲۴۵ (۳)

۳۴۵ (۲)

۱۲۴۶ (۱)

سوال ۱۱: معادله‌ی $1 = 9^x - 6^x - 4^x - 3^x + 2^x$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

جواب ندارد.

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

سوال ۱۳: حاصل عبارت $\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{\dots}}}}$ چه قدر است؟

۱۳ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

سوال ۱۴: عبارت $33x^2 + ax + 33$ را به حاصل ضرب دو، دو جمله‌ای درجه اول با ضرایب صحیح تجزیه می‌کنیم. در این صورت در مورد a کدام عبارت درست است؟

۴) نمی‌توان مشخص کرد.

۳) صفر است.

۲) زوج است.

۱) فرد است.

سوال ۱۵: عدد طبیعی $-x$ ، یکی از شمارنده‌های عبارت $10 - 2x + 3x^2$ است. در این صورت حاصل جمع کل مقادیری که می‌توان به جای x قرار داد، چه قدر است؟

۵۱ (۴)

۴۹ (۳)

۴۳ (۲)

۳۹ (۱)

سوال ۱۶: اگر $a^2 - a - 10 = 0$ باشد، کدام عبارت زیر در مورد حاصل عبارت $(a+1)(a+2)(a-4)$ درست است؟

- ۲) مثبت و گنگ است.
۴) گویای غیرصحیح است.

نکته: برای به دست آوردن مجموع ضرایب در عبارت های جبری، کافی است به جای متغیرها، عدد ۱ قرار داد.

سوال ۱۷: مجموع ضرایب در حاصل عبارت زیر، چقدر است؟

$$(1398x^7 - 1399y^5)(3x^6 - 1)(7x^2 + 4xy^5 - 2y)$$

$$\circ \quad (4) \quad -63 \quad (3) \quad +18 \quad (2) \quad -18 \quad (1)$$

نامعادله

سوال ۱۸: نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{(x^4 + 1)(3x + 6)}{x^2 - 3x} > 0$$

نکته: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$$|x| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x \geq b \\ \text{یا} \\ x \leq -b \end{cases}$$

سوال ۱۹: مجموعه جواب نامعادله $|x|(1+x) < 0$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

سوال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$ کدام است؟

$$\{x | x \geq 3\} \quad (4) \quad \{x | x \geq 2\} \cup \{1\} \quad (3) \quad \{x | 1 < x < 2\} \quad (2) \quad \{1, 2\} \quad (1)$$

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ، همواره داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

اثبات:

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

نکته: مجموع مربعات دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر از ۲ برابر حاصل ضرب آنها است زیرا:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

نکته: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ، میانگین ۲ عدد، بزرگتر یا مساوی جذر حاصل ضرب آن دو عدد است زیرا:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نکته: مربع مجموع دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر یا مساوی ۴ برابر حاصل ضرب آنها است:

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

سوال ۲۱: چند عدد دو رقمی وجود دارد که اگر جای رممهای آن را عوض کنیم، عدد حاصل حداقل ۳ برابر عدد اولیه می‌شود؟

۵) ۴

۶) ۳

۸) ۲

۱۰) ۱

و جد اسدی کیا

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت چهارم (عبارت‌های جبری)

۱- در متن درس نوشته شده است.

$$5 \times 5 = 25$$

۲- گزینه (۳) تعداد کل جملات قبل از ساده کردن:

$$ZV, ZW, VW$$

$$25 - 3 = 22$$

تعداد جملات پس از ساده شدن

۳- گزینه (۴)

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 2x^2 - 3 + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3 \Rightarrow 2 \times 2 - 3 = 1$$

۴- گزینه (۳)

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} + x^2 + y^2 - \underline{6x} - 2x - 2y + 2xy + \underline{9} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (x + y - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3} \\ x + y - 1 = 0 \Rightarrow 3 + y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2} \end{cases} \Rightarrow x + y = 3 - 2 = 1$$

۵- گزینه (۴)

$$\left. \begin{array}{l} -3a^2b + ab - 9b = 0 \\ +a^2b + 3ab + 9b = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -2a^2b + 4ab - 2b = 0$$

$$\Rightarrow -2b(a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

۶- گزینه (۳) کافی است به جای مثلاً x ، مقدار صفر و به جای y ، عدد ۲ قرار دهیم. داریم:

$$0 + 2^4 - 0 - 0 + 0 = 16$$

۷- گزینه (۲) عدد ۱۴ را به صورت $4 + 1 + 9$ می‌نویسیم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

در نتیجه $x + y - z = 2 + 1 + 3 = 6$ است.

-۸- گزینه (۱) دو طرف شرط را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2x^r + 2y^r + 2z^r = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$x^r + x^r + y^r + y^r + z^r + z^r - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x-y)^r + (x-z)^r + (y-z)^r = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \Rightarrow x=y=z \\ y-z=0 \end{cases}$$

-۹- گزینه (۲)

$$x = \frac{-(-7)}{2 \times 1 \frac{3}{4}} = \frac{7}{\frac{5}{4}} = 2 \Rightarrow 3 \times (2)^r - 7 \times (2) + 1 = -1$$

-۱۰- گزینه (۳)

$$2^n + 2^{1246} + 2^{000} \Rightarrow \begin{cases} (2^n + 2^{1000})^2 \Rightarrow 2 \times 2^n \times 2^{1000} = 2^{1246} \Rightarrow n = 245 \\ (2^n + 2^{623})^2 \Rightarrow 2^1 \times 2^n \times 2^{623} = 2^{000} \Rightarrow n = 1376 \end{cases}$$

پس $n = 245$ جواب مسئله است.

-۱۱- گزینه (۲) اگر $3^x = b$ و $2^x = a$ باشد، داریم:

$$2^x + 3^x - 4^x + 5^x - 9^x = 1$$

$$\Rightarrow a + b - a^r + ab - b^r = 1$$

دو طرف را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2a + 2b - 2a^r + 2ab - 2b^r = 2$$

$$\Rightarrow (a-b)^r + (a-1)^r + (b-1)^r = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a=b=1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

پس $a = b = 1$ در نتیجه $x = 0$ است.

-۱۲- گزینه (۳) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) = 15 \times 17 \times 257 = 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 257^1$$

$$\Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \Rightarrow 16 \times 2 = 32$$

-۱۳- گزینه (۴)

$$A = \sqrt{1^0 + 3\sqrt{1^0 + 3\sqrt{1^0 + 3\sqrt{\dots}}}}$$

$$A^r = 1^0 + 3A \Rightarrow A^r - 3A - 1^0 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+2) = 0 \Rightarrow A = 5$$

(۲) - ۱۴ گزینه‌ی

$$(Mx^r + ax + N) = (Mx + N)(Fx + E) = MFx^r + (M \cdot E + N \cdot F)x + N \cdot E$$

$$\Rightarrow M \cdot F = 33, \quad M \cdot E + N \cdot F = a, \quad N \cdot E = 33$$

۳۳ عددی فرد است، پس $M \cdot E + N \cdot F$ نیز فرد هستند پس a حتماً زوج است.

(۱۵) - گزینہ

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 1 = \\ \hline -3x^2 + 8x \\ \hline 4x + 1 \\ \hline -4x - 8 \\ \hline 9 \\ \end{array}$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، عدد ۱۸ باید بر $-2 - x$ بخش‌پذیر باشد. با توجه به این که $-2 - x$ باید طبیعی باشد، پس $-2 - x$ یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ است که برای x مقدارهای ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۱ و ۲۰ بهدست ممکن است.

(1) گنہ ۱۶

$$a^r - a - 1 = 0 \Rightarrow a^r = a + 1.$$

$$\begin{aligned}(a+1)(a+2)(a-4) &= (a^2 + 3a + 2)(a - 4) = (a^2 + 3a + 2)(a - 4) \\&= 4(a + 2)(a - 4) = 4(a^2 - a - 12) = 4(-12) = -48 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(۱) - ۱۷ گزینه‌ی

$$(1398 - 1399)(3 - 1)(7 + 4 - 2) = -18$$

- 1 -

$$\frac{\overbrace{(x^2+1) \times (3x+6)}^{x \neq -2} }{\underbrace{x(x-3)}_{x=3}} > 0 \Rightarrow$$

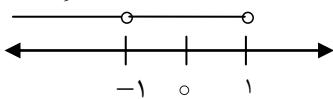
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$3x + 6$	-	+	+	+	+
x	-	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	+	+
$\frac{(x^2 + 1)(3x + 6)}{x(x - 2)}$	-	+	-	+	+

- 19

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - |x| > 0 \Rightarrow 1 > |x| \Rightarrow -1 < x < 1 \\ 9 \\ 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{array} \right. \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{رابطہ (1)}$$

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - |x| < 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array} \right. \\ \text{و} \\ 1 + x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{array} \right. \Rightarrow x < -1 \quad \text{رابطه (۲)}$$

رابطه (۲) \cup رابطه (۱)

- ۲۰- گزینه (۳) عدد ۱ و ۲ در نامعادله صدق می‌کنند پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. عدد ۳ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه (۳) جواب است.

- ۲۱- گزینه (۳) آن عدد را \overline{xy} در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overline{yx} \geq 3\overline{xy} \Rightarrow 1 \cdot y + x \geq 3 \cdot x + 3y \Rightarrow 7y \geq 29x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \geq \frac{29}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4 \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \in \left\{ \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{9}{2} \right\}$$

پس اعداد دو رقمی ممکن عبارت‌اند از ۲۹, ۱۹, ۱۸, ۱۷, ۱۶, ۱۵ که تعداد آن‌ها ۶ تا است.

قسمت پنجم: عبارات گویای جبری

۱- دامنهٔ تعریف عبارات گویای جبری:

نکته مهم: دامنهٔ هر عبارت گویای جبری، قبل از ساده کردن آن به دست می‌آید

$$x > 1 \quad (4)$$

$$x \geq 1 \quad (3)$$

سوال ۱: دامنهٔ تعریف عبارت $\frac{\sqrt{x-1}}{x+|x|}$ کدام است؟

$$x > 0 \quad (2) \quad 0 < x \leq 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \{x \mid x \geq 1\} \quad (2) \\ \{x \mid -3 < x \leq 0\} \cup \{x \mid x \geq 1\} \quad (4) \end{aligned}$$

سوال ۲: دامنهٔ تعریف $\sqrt{\frac{x^2-x}{x+3}}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \{x \mid x < -3\} \quad (1) \\ \{x \mid x < -3\} \cup \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \quad (3) \end{aligned}$$

نکته: در معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$

اگر $a+b+c=0$ باشد، همواره یکی از جوابها $+1$ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

اگر $b=a+c=0$ باشد، همواره یکی از جوابها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

سوال ۳: دامنهٔ عبارت گویای $\frac{x^2+1}{5x^2-3x-2}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \left\{ 1, -\frac{2}{5} \right\} \quad (4)$$

$$\mathbb{R} - \left\{ -1, \frac{2}{5} \right\} \quad (3)$$

$$\mathbb{R} - \{1\} \quad (2)$$

$$\mathbb{R} - \{-1\} \quad (1)$$

سوال ۴: اگر $\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$ باشد، مقدار $A+B+C$ چه قدر است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

۲- تقسیم بر چندجمله‌ای

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای، تقسیم را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجهٔ باقیمانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر شود.

به طور مثال اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ ۳ باشد، باقیمانده حداکثر از درجهٔ ۲ است.

نکته: برای به دست آوردن باقیمانده یک تقسیم، می‌توان ابتدا ریشه یا ریشه‌های مقسوم‌علیه را به دست آورده و در مقسوم جایگذاری کنیم.

مثال:

$$\begin{array}{l} x^5 - 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 \mid x^2 + 1 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow |x^2 = -1| \end{array}$$

اکنون مقسوم را برحسب x^2 می‌نویسیم:

$$x^5 - 7x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1 \Rightarrow (x^2)^2 \times x - 7(x^2)^2 + 2(x^2)x - 5x^2 + 1$$

در این مرحله، هر جا x^2 داریم، ۱- قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & (-1)^2 \times x - 7(-1)^2 + 2(-1)x - 5(-1) + 1 \\ & = x - 7 - 2x + 5 + 1 = -x - 1 \quad \text{باقیمانده} \end{aligned}$$

نکته: $x^n - y^n$ همواره بر $x - y$ بخش‌پذیر است. $n \in \mathbb{N}$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x^n - x^n = 0 \quad \text{باقیمانده}$$

اثبات:

نکته: اگر n زوج باشد، $x^n - y^n$ همواره بر $x + y$ بخش‌پذیر است زیرا:

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow x^n - (-x)^n = 0 \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد.}$$

نکته: اگر n فرد باشد، $x^n + y^n$ همواره بر $x + y$ بخش‌پذیر است، زیرا:

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow x^n + (-x)^n = 0 \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد.}$$

سؤال ۵: عدد $23^7 + 7^7$ بر کدام عدد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

سؤال ۶: اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای A بر $x - 1$ ، برابر با ۲ و باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $2x - 4$ برابر باشد، باقیمانده‌ی تقسیم A بر $(x - 1)(2x - 4)$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

نکته: اگر باقیمانده‌ی A بر C ، برابر R_1 و باقیمانده‌ی B بر C ، برابر R_2 باشد آن‌گاه باقیمانده‌ی تقسیم:

تقسیم:

(۱) $A \pm B$ بر C برابر است با $R_1 \pm R_2$.(۲) $A \times B$ بر C برابر است با $R_1 \times R_2$.توجه: اگر درجه‌ی $R_1 \times R_2$ ، از درجه‌ی C بیشتر شود، باید $R_1 \times R_2$ را بر C تقسیم کرد.سؤال ۷: اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای A بر $(x - 2)(x + 1)$ و باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای B بر $2x^3 - x^2 - 4x - 3$ ، برابر باشد، باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $A \times B$ بر $2x^3 - 2x^2 - 4x - 3$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



سوال ۸: یک نفر شروع به پیاده روی به صورت رفت و برگشت کرد. جاده او به ترتیب مسطح و سپس سربالایی بود. کل رفت و برگشت او ۱۲۰ دقیقه طول کشید. اگر سرعت این فرد روی جاده مسطح 4 km/h و در سربالایی 3 km/h باشد، او در این پیاده روی چند کیلومتر راه رفته است؟

۱۰ km (۴)

۸ km (۳)

۷/۵ km (۲)

۶ km (۱)

عبارت‌های رادیکالی

سوال ۹: اگر عبارت $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}}$ را گویا کنیم، مخرج چه مقدار می‌شود؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۳ (۱)

سوال ۱۰: ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+3}$ کدام است؟

 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}-1$ (۳) $\sqrt{3}+1$ (۲) $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}-3$ (۱)

رادیکال مرکب:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}} , \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

مثال: رادیکال مرکب $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5-\sqrt{24}} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=24 \end{cases} \Rightarrow C = \sqrt{A^2 - B} \Rightarrow C = \sqrt{25-24} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

سوال ۱۱: بیشترین مقدار طبیعی n که رابطه زیر در آن برقرار می‌شود، کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 15$$

۲۵۵ (۴)

۲۴۰ (۳)

۲۲۵ (۲)

۲۱۵ (۱)

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت پنجم (عبارات گویای جبری)

۱ - گزینه (۳)

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$x + |x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq -x \Rightarrow x > 0 \quad \text{رابطه (۲)}$$

(۱) $x \geq 1$ رابطه (۲)

۲ - گزینه (۴) از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج را پیدا می‌کنیم.
داریم:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	+	+
x	-	-	+	+	+
$x + 3$	-	+	+	+	+
$\frac{x^2 - x}{x + 3}$	-	+	+	-	+

جواب

۳ - گزینه (۳) با توجه به این که $5 + (-3) + (-2) = 0$ می‌شود، داریم:

$$5x^2 - 3x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, \quad x \neq \frac{2}{5} \Rightarrow \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$$

۴ - گزینه (۴)

$$\begin{aligned} \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} &= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 + C}{(x^2 + 1)(x + 1)} \\ &= \frac{(A + C)x^2 + (A + B)x + (B + C)}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)(x + 1)} \\ \begin{cases} A + C = 1 \\ A + B = 2 \\ B + C = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع} \\ 2A + 2B + 2C = 6 \\ A + B + C = 3 \end{cases} \Rightarrow A + B + C = 3 \end{aligned}$$

۵ - گزینه (۴) به شرط فرد بودن n ، بر $x + y$ بخش‌پذیر است. پس $2^3 + 7 = 3^2 + 7^2$ بر ۲۳+۷=۳۰ و بر شمارنده‌های ۳۰ بخش‌پذیر است پس بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

۶- گزینه (۲) باقیمانده تقسیم بر $(x-4)(2x-4)$ باید حداقل از درجه ۱ باشد یعنی به صورت $ax+b$ داریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow a \times 1 + b = 2 \Rightarrow [a+b=2] \quad \text{رابطهی (۱)}$$

$$2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow a \times 2 + b = 3 \Rightarrow [2a+b=3] \quad \text{رابطهی (۲)}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=1$ و $b=1$ یعنی باقیمانده برابر است با $x+1$.

۷- گزینه (۴) باقیمانده تقسیم $A \times B$ بر $x^3 - 2x^2$ برابر است با $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 4x^3 + x - 3 = (x+1)(4x^2 - 3x + 1)$. چون درجهی باقیمانده باید از درجهی مقسوم‌علیه کم‌تر باشد، باید $4x^2 - 3x + 1$ را بر $x^3 - 2x^2$ تقسیم کنیم که در این صورت باقیمانده $9x - 3$ به دست می‌آید.

۸- گزینه (۳) می‌دانیم $\frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}} = \text{زمان}$.

اگر x ، طول سطح مسطح و y طول سطح شیبدار باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x + y = 4 \text{ km} \quad \text{طول مسیر رفت}$$

در نتیجه کل مسیر $4+4=8 \text{ km}$ است.

۹- گزینه (۴)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{2}} \times \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}} = \frac{\frac{A}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}}{\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}} = \frac{A}{2+3+2\sqrt{6}-2} \\ & = \frac{A}{2\sqrt{6}-2} = \frac{A}{2(\sqrt{6}-1)} \times \frac{(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}+1)} = \frac{A(\sqrt{6}+1)}{10} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه (۴)

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+3} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۱- گزینه (۴) اگر صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{1 \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{1 \times (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \leq 15 \\ & \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} \leq 15 \\ & \Rightarrow \sqrt{n+1}-1 \leq 15 \Rightarrow \sqrt{n+1} \leq 16 \Rightarrow n+1 \leq 256 \Rightarrow n \leq 255 \end{aligned}$$

قسمت ششم: حجم

نکته: هرگاه ضلع‌های جسمی را a برابر کنیم، مساحت جانبی و مساحت کل آن a^2 برابر و حجم آن a^3 برابر می‌شود.

مثال: به بُعدهای جسمی 20% افزودیم. در این صورت درصد افزوده شده به مساحت جانبی و مساحت کل آن، برابر است با:

$$100\% + 20\% = 120\% \Rightarrow \frac{120}{100} \times \frac{120}{100} = \frac{144}{100} \Rightarrow 144\% - 100\% = 44\%$$

نکته: اگر طول یال‌های مکعبی را k برابر کنیم، طول قطر آن نیز $k\sqrt{3}$ برابر می‌شود.

نکته: هر مکعب، دارای ۹ صفحه‌ی تقارن است.

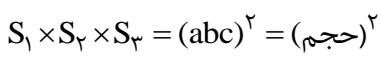
نکته: هرگاه یک مکعب با تاکردن سیم بسازیم. تعداد یال‌های آن حداقل ۱۵ می‌شود. زیرا ۳ یال تکرار می‌شود.

نکته: مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

نکته: برای رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B روی مکعب به ضلع a ، کوتاه‌ترین مسیر برابر است با

$$AB = a\sqrt{5}$$

نکته: در هر مکعب مستطیل، حاصلضرب مساحت ۳ وجه مشترک در یک رأس، با مجبور حجم آن برابر است:



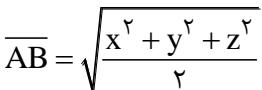
$$S_1 \times S_2 \times S_3 = (abc)^3 = (\text{حجم})$$

نکته: هر مکعب مستطیل، ۳ صفحه‌ی تقارن دارد. (مکعب مستطیل مکعب مربع نباشد)

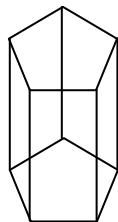
نکته: اندازه‌ی قطر هر مکعب مستطیل با طول و عرض و ارتفاع a , b و c برابر است با:

$$\text{قطر} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

نکته: اگر اندازه‌ی قطرهای ۳ وجه مشترک در یک رأس از یک مکعب مستطیل x , y و z باشد، قطر مکعب مستطیل برابر است با



$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}$$



$$(10 + 7) - 2 = 15$$

نکته: در هرم‌ها و منشورها همواره داریم:

$$\text{تعداد یال‌ها} = 2 - (\text{تعداد وجه‌ها} + \text{تعداد رأس‌ها})$$

مثال:

نکته: در هر منشور، تعداد یال‌ها همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

نکته: در هر منشور، همواره تعداد رأس‌ها بر ۲ بخش‌پذیر است.

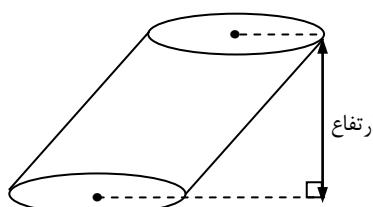
نتیجه: در هر منشور حاصلضرب تعداد یال‌ها در تعداد رأس‌ها، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

نکته: در هر منشور، داریم:

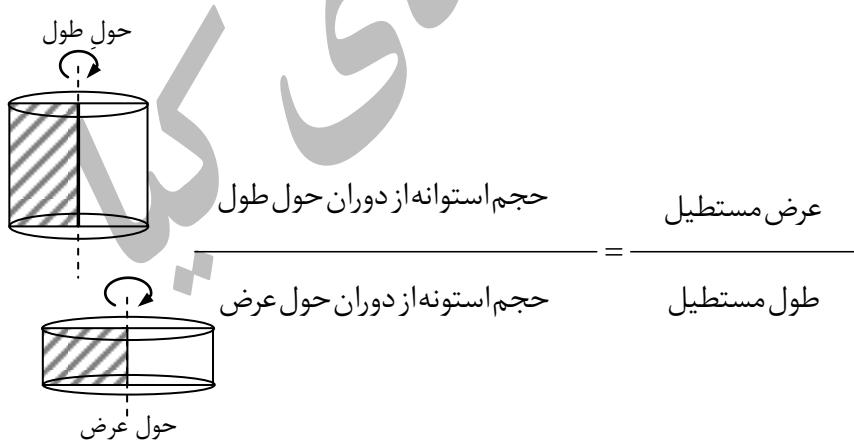
$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم}$$

توجه: در منشورهای مایل، ارتفاع، فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی است که قاعده‌های شکل روی آن قرار دارند:



نکته: اگر یک مستطیل را یک بار حول طول آن و بار دیگر حول عرضش دوران دهیم، استوانه به وجود می‌آید. داریم:



سؤال ۱: در شکل زیر، یک گیاه دقیقاً ۵ دور با شیب ثابت دور میله‌ای به ارتفاع ۱m و محیط ۱۵cm پیچیده است. طول ساقه‌ی گیاه چقدر است؟



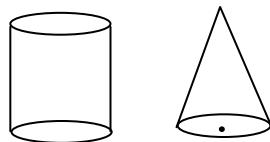
(۱) ۰/۷۵ متر

(۲) ۱ متر

(۳) ۱/۲۵ متر

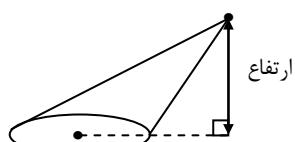
(۴) ۱/۵ متر

مخروط



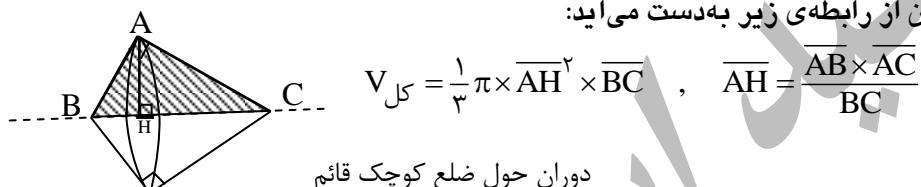
نکته: هرگاه قاعده‌ی یک مخروط با قاعده‌ی یک استوانه و هم‌چنین ارتفاع مخروط با ارتفاع استوانه برابر باشد، در این صورت حجم

$$\text{مخروط} = \frac{1}{3} \text{ حجم استوانه} \text{ است. پس } V = \frac{1}{3} S \cdot h$$



نکته: در مخروط مایل، ارتفاع، فاصله‌ی ردس مخروط از صفحه‌ی قاعده است.

نکته: از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وترش، دو مخروط به‌دست می‌آید که از قاعده به یکدیگر چسبیده‌اند که حجم کل آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

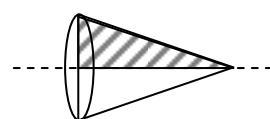


دوران حول ضلع کوچک قائم

نکته: نسبت حجم مخروط‌های به‌دست آمده از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول اضلاع قائم آن برابر است با:



دوران حول ضلع کوچک قائم

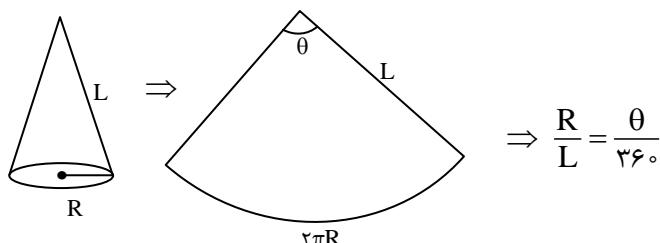


دوران حول ضلع بزرگ قائم

$$\frac{\text{ضلع بزرگ قائم}}{\text{ضلع کوچک قائم}} = \frac{\text{حجم مخروط از دوران حول ضلع قائم کوچک}}{\text{حجم مخروط از دوران حول ضلع قائم بزرگ}}$$

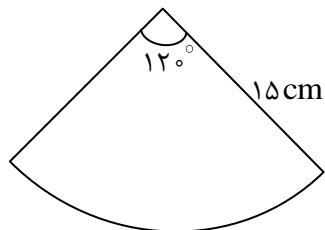
نکته: حجم حاصل از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a حول یک ضلع آن برابر است با:

نکته: از گستردگی مخروط قائم به شعاع R و طول مولا L ، قطاع یک دایره به شعاع L حاصل می‌شود. اگر θ زاویه‌ی این قطاع باشد، داریم:



$$\Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

سوال ۲: حجم مخروطی که اگر سطح جانبی آن را باز کنیم، قطاعی 120° به شعاع ۱۵ سانتی‌متر به دست می‌آید، چند سانتی‌متر مکعب است؟



$$\frac{250\sqrt{3}}{2}\pi \quad (1)$$

$$\frac{150\sqrt{3}}{2}\pi \quad (2)$$

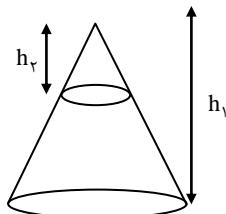
$$\frac{150\sqrt{2}}{3}\pi \quad (3)$$

$$\frac{250\sqrt{2}}{3}\pi \quad (4)$$

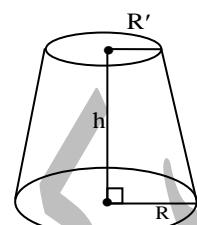
نکته: مساحت جانبی و مساحت کل هر مخروط به شعاع قاعده‌ی R و مولد L برابر است با:

$$\pi RL = \pi R^2 L = \text{مساحت کل مخروط}$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی مخروطی، یک برش بزنیم، نسبت حجم مخروط کوچک به حجم مخروط اولیه برابر با مکعب نسبت ارتفاع آن‌ها است:

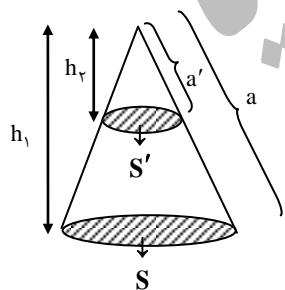


$$\frac{\text{حجم کوچک}}{\text{حجم کل}} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3$$



$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR')$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی مخروطی، بر آن برش بزنیم، رابطه‌های زیر برقرار می‌شود:



$$\frac{a'}{a} = \frac{R'}{R} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2$$

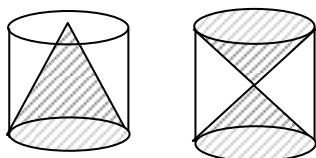
سوال ۳: مخروطی به ارتفاع ۳ را با دو صفحه که موازی قاعده‌اش است، به سه شکل هم حجم بریده‌ایم.

مخروط در چه ارتفاع‌هایی بریده شده است؟

$$3 - \sqrt[3]{9}, 3 - \sqrt[3]{18} \quad (2) \quad 1, 2$$

$$\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \quad (4) \quad \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{3} \quad (3)$$

سوال ۴: دو استوانه‌ی شکل زیر هماندازه‌اند حجم مخروط محاط در استوانه‌ی سمت چپ را با V و حجم دو مخروط سمت راست را با W نمایش می‌دهیم. چه رابطه‌ای بین V و W برقرار است؟



$$V > W \quad (1)$$

$$V < W \quad (2)$$

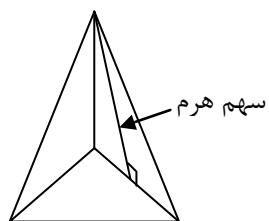
$$V = W \quad (3)$$

(۴) هر یک از ۳ حالت فوق می‌تواند برقرار باشد.

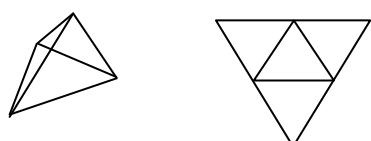
هرم

سهم هرم: ارتفاع هر وجه جانبی از هرم را سهم می‌گویند.

هرم منتظم: هرمی است که قاعده‌ی آن چندضلعی منتظم باشد و پای ارتفاع آن، مرکز قاعده باشد. در هرم منتظم، وجه‌های جانبی، مثلث متساوی‌الساقین هستند.



چهاروجهی منتظم: هرمی است که هر ۴ وجه آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



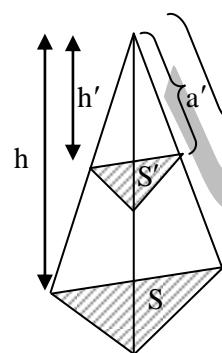
نکته: در این هرم (۴وجهی منتظم) به یال a داریم:

$$= \text{ارتفاع هرم}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} a^2$$

$$= \text{مساحت کل هرم}$$

نکته: هرگاه به موازات قاعده‌ی یک هرم، بر آن برش ایجاد کنیم، رابطه‌های زیر در آن برقرار می‌شود:



$$\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h}$$

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

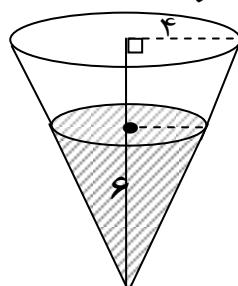
$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3$$

نکته: در هر چهاروجهی منتظم به اندازه‌ی یال a ، همواره داریم:

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} a \quad \text{شعاع کره‌ی محاطی}$$

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4} a \quad \text{شعاع کره‌ی محیطی}$$

سوال ۵: درون مخروطی به ارتفاع ۸ واحد، مقداری آب به ارتفاع ۶ وجود دارد. اگر سنگی درون آن بیاندازیم، آب آنقدر بالا می‌آید که مخروط کاملاً پر می‌شود. حجم سنگ بر حسب π چه قدر است؟



$$\frac{74\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{32\pi}{3} \quad (4)$$

$$18\pi \quad (1)$$

$$\frac{14\pi}{3} \quad (3)$$

کره:

$$\text{نکته: حجم کره با قطر } D \cdot \frac{\pi}{6} D^3$$

نکته: مکعب به یال a را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

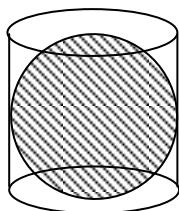
$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \text{شعاع کره محاطی} \quad r = \frac{1}{2} a$$

نکته: اگر S مساحت کره به شعاع R باشد، داریم:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

نکته: نسبت حجم به مساحت هر کره برابر است با ثلث شعاع کره:

نکته: حجم کره محاط شده درون یک استوانه، همواره $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است.



سؤال ۶: ارتفاع و قطر قاعده‌ی یک مخروط قائم ۱۲ cm است. مخروط را پر از آب کرده و کره‌ای را تا حد ممکن در مخروط فرو می‌بریم. دقیقاً نصف کره خارج از آب می‌ماند. پس از خارج کردن کره، تقریباً چند سانتی‌متر مکعب آب داخل مخروط باقی می‌ماند؟

(۴) 30π

(۳) 35π

(۲) 40π

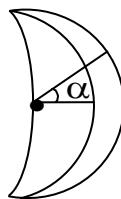
(۱) 50π

نکته: حجم و مساحت قاقج کروی:

$$V = \frac{\alpha}{360} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{قاقج کروی}$$

$$S = \frac{\alpha}{360} \times 4\pi R^2 \quad \text{پوسته‌ی قاقج کروی}$$

$$S = \frac{\alpha}{360} \times 4\pi R^2 + \pi R^2 = 1 \frac{\alpha}{9} \pi R^2 \quad \text{کل قاقج کروی}$$



سؤال ۷: گنجایش یک لوله‌ی بزرگ و چهار لوله‌ی کوچک برحسب مترمکعب در ساعت برابر اعدادی طبیعی هستند. گنجایش لوله‌ی بزرگ $6m^3/h$ بیشتر از یک لوله‌ی کوچک است. چهار لوله‌ی کوچک با یکدیگر می‌توانند استخری را ۲ ساعت سریع‌تر از لوله‌ی بزرگ پر کنند. بزرگ‌ترین حجم ممکن برای استخر چند مترمکعب است؟

(۴) ۸۲

(۳) ۷۸

(۲) ۷۲

(۱) ۶۴

سؤال ۸: نقطه‌ای به تصادف از درون یک مکعب انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این نقطه درون بزرگ‌ترین مخروط (درون این مکعب) قرار گرفته باشد، چقدر است؟

(۴) $\frac{\pi}{18}$

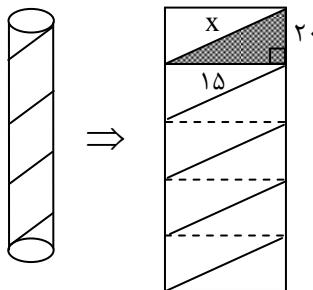
(۳) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{\pi}{12}$

(۱) $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$

پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت ششم (حجم)

۱- گزینه (۳) اگر استوانه و گیاه پیچیده به آن را از بالا تا پایین برش داده و آن را باز کنیم، شکل به صورت زیر می‌شود که با رابطه‌ی فیثاغورس می‌توان نوشت:



$$x^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow x = \sqrt{400 + 225} = 25 \text{ cm}$$

در نتیجه طول ساقه‌ی گیاه، $5 \times 25 = 125$ سانتی‌متر است.

۲- گزینه (۴)

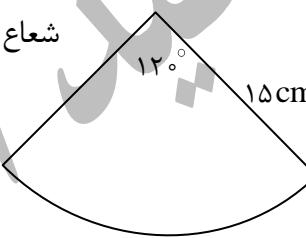
$$\frac{R}{L} = \frac{\theta}{360^\circ} \Rightarrow \frac{R}{15} = \frac{12^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

شعاع قاعده‌ی محروط

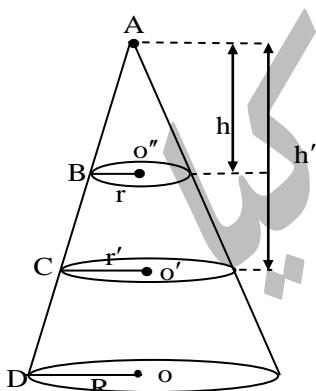
$$\Delta AOB: L^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + 5^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 25 \times 10\sqrt{2} = \frac{250\sqrt{2}}{3}\pi$$



۳- گزینه (۲)



$$O''B \parallel OD \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{AO} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{3} \Rightarrow r = \frac{Rh}{3}$$

$$\text{محروط کل } V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{Rh}{3}\right)^2 \times h = \frac{1}{3} \times V$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{9}h^2 R^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \pi R^2 \times 3\right) \Rightarrow h = \sqrt[3]{9}$$

۴- گزینه (۲)

برشی که در C زده‌ایم، محروطی ایجاد کرده است که حجم آن $\frac{2}{3}$ حجم کل است.

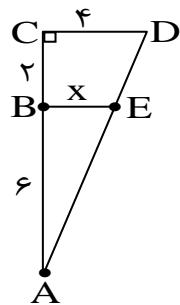
پس می‌توان نوشت:

$$\frac{r'}{R} = \frac{h'}{3} \Rightarrow r' = \frac{Rh'}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{9}h'^2 R^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \times 3\right) \Rightarrow h' = \sqrt[3]{18}$$

پس ارتفاع‌های برش از طرف قاعده برابرند با $3 - \sqrt[3]{9}$ و $3 - \sqrt[3]{18}$.

۵- گزینه (۳) با هم برابرند.

۵- گزینه (۲)



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 3$$

حجم آب - حجم مخروط = حجم سنگ

$$= \frac{1}{3}\pi \overline{DC}^2 \times \overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{BE}^2 \times \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{3}\pi(4^2 \times 8 - 3^2 \times 6) = \frac{74\pi}{3}$$

۶- گزینه (۲)

$$\Delta AHC: \overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$$

$$\Delta AHC: \overline{AH} \times \overline{HC} = \overline{HH'} \times \overline{AC} \Rightarrow \overline{HH'} = \frac{6 \times 12}{\sqrt{180}}$$

شعاع نیم کرده

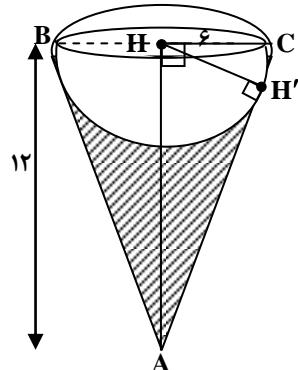
پس می توان نوشت:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6 \times 12}{\sqrt{180}} \right)^2 \Rightarrow V = \frac{1152}{5\sqrt{5}}\pi \text{ نیم کرده}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 12 = 144\pi \text{ مخروط}$$

$$V = 144\pi - \frac{1152}{5\sqrt{5}}\pi \underbrace{\approx}_{104\pi}$$

آب باقی مانده



۷- گزینه (۲) اگر ظرفیت لوله‌ی کوچک، a باشد، پس ظرفیت لوله‌ی بزرگ $a+6$ است. اگر لوله‌های کوچک در مدت زمان x ساعت استخر را پر کنند، پس لوله‌ی بزرگ در $x+2$ ساعت استخر را پر می‌کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، داریم:

$$V = 4a \times x = (a+6)(x+2) \Rightarrow 4ax = ax + 2a + 6x + 12$$

$$\Rightarrow 3ax - 2a - 6x - 12 = 0 \Rightarrow (a-2)(3x-2) - 16 = 0 \Rightarrow (a-2)(3x-2) = 16$$

اکنون مسئله ۵ حالت دارد که آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$a-2=1 \Rightarrow 3x-2=16 \Rightarrow x=6 \Rightarrow V=4 \times 3 \times 6 = 72$$

$$a-2=2 \Rightarrow 3x-2=8 \Rightarrow x=\frac{10}{3} \Rightarrow V=4 \times 4 \times \frac{10}{3} = \frac{160}{3} \approx 53.3$$

$$a-2=4 \Rightarrow 3x-2=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow V=4 \times 6 \times 2 = 48$$

$$a-2=8 \Rightarrow 3x-2=2 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow V=4 \times 10 \times \frac{4}{3} = \frac{160}{3} \approx 53.3$$

$$a-2=16 \Rightarrow 3x-2=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow V=4 \times 18 \times 1 = 72$$

با بررسی ۵ حالت نوشته شده، مشخص است که بزرگ‌ترین حجم ممکن برای استخر ۷۲ واحد است.

-۸- گرینه (۲) اگر ضلع مکعب را a در نظر بگیریم، حجم آن a^3 می‌شود. از طرفی ارتفاع مخروط نیز a و شعاع قاعده‌ی مخروط، $\frac{a}{2}$ است. داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مخروط}}{\text{مکعب}} V = \frac{\frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a}{a^3} = \frac{\frac{a^3 \pi}{12}}{a^3} = \frac{\pi}{12}$$

و جد اسدی کیا

قسمت هفتم: توان و ریشه

$$. \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{اگر } a > 0 \quad \text{نکته:}$$

سوال ۱: در مورد $\sqrt[3]{-8}$ چه می‌توان گفت؟

سوال ۲: در مورد $\frac{1}{3}(-8)$ چه می‌توان گفت؟

نکته؛ اگر a^n باشد، a تعریف شده نیست. $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{4}}$ تعریف شده نیستند. پس در عبارت

$a^n > a$ باشد.

$$\sqrt[mn]{\sqrt{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{نکته: اگر } a > 0 \text{ باشد.}$$

سوال ۳: حاصل عبارت مقابل به صورت عدد تواندار کدام است؟

$$7^{23^2} \times (7^2)^{3^2} \times ((7^2)^3)^2$$

(۱) 7^{1084}
 (۲) 7^{542}
 (۳) 7^{346}
 (۴) 7^{36}

سوال ۴: حاصل عبارت $2^{23} \times 2^{24} \times 2^{25} \times 2^{26} \times 2^{27} \times 2^{28} \times 2^{29}$ به صورت عدد تواندار کدام است؟

۲۳۳۱-۱ (۴) ۲۳۳۱-۱ (۳) ۲۳۳۱ (۲) ۲۳۳۰ (۱)

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n : \text{نكهه}$$

سوال ۵: حاصل عبارت $(7^{100} + \dots + 7^2 + 7^1 + 7^0)$ به صورت عدد تواندار کدام است؟

$\gamma^{1.01}$ (4) $\gamma^{1.07}$ (3) $\gamma^{1.08}$ (2) $\gamma^{1.01}$ (1)

سوال ۶: حاصل عبارت $((\dots((1+4)+4)+\dots+(1+4))+4)$ که تعداد ۴ها در آن ۱۰۰ تا می‌باشد، چه قدر است؟

$$\frac{1}{3}(41^{\circ\circ} - 10^{\circ\circ}) \quad (2)$$

$$r^{100} - \frac{100(100+1)}{r} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} (\varphi^{100} - \varphi) (\varphi$$

$$\frac{1}{\pi}(\varphi^{1 \circ 1} - \varphi) \quad (3)$$

سوال ۱۵: نفر اول، عدد ۱ را نوشت. نفر دوم عدد ۲ و نفر سوم و به بعد، عدد ما قبل را به قبل تقسیم کرد.
دهمین دانش‌آموز چه عددی را می‌نویسد؟

۲۳۴ (۴)

۲^{-۵۵} (۳)

۲۵۶ (۲)

۲^{-۱۰} (۱)

سوال ۱۶: معکوس عدد $\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$ کدام است؟
 - $\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$ (۴) - $\sqrt{17} + 3\sqrt{2}$ (۳) - $17 - 3\sqrt{2}$ (۲) - $17 + 3\sqrt{2}$ (۱)

سوال ۱۷: کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به ازای آن رابطه‌ی

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$$

برقرار باشد، کدام است؟

۱۰۲۰۰ (۴)

۵۱۲۱ (۳)

۱۰۰۰۰ (۲)

۱۰۰۰ (۱)

سوال ۱۸: حاصل عبارت $A = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+\dots}}}$ برابر است با:
 ۶ $\sqrt{2}$ (۴) ۶ (۳) ۲ $\sqrt{6}$ (۲) ۴ $\sqrt{3}$ (۱)

سوال ۱۹: اگر $(2+\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^4 = 136$ باشد، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از $(2+\sqrt{2})^4$ کدام است؟

۶۷ (۴)

۱۰۲ (۳)

۶۹ (۲)

۱۳۵ (۱)

سوال ۲۰: ساده شده‌ی عبارت $\sqrt[۳]{\frac{۹۶^۳ + ۱۶^۳}{۳۳^۳ + ۵۵^۳}}$ کدام است؟

 $\frac{۳۲}{۲۲}$ (۴) $\frac{۲۲}{۳۲}$ (۳) $\frac{۶۴}{۱۱}$ (۲) $\frac{۳۲}{۱۱}$ (۱)

پاسخ تشریحی سوالات قسمت هفتم (توان و جذر)

۱- عدد (-۲)

۲- تعریف نشده است.

۳- گزینه (۲)

$$\gamma^{2^3} = \gamma^2 = \gamma^{512}, (\gamma^2)^{3^2} = (\gamma^2)^9 = \gamma^{18}, ((\gamma^2)^3)^2 = \gamma^{12} \Rightarrow \gamma^{512} \times \gamma^{18} \times \gamma^{12} = \gamma^{542}$$

۴- گزینه (۳)

$$\underbrace{\gamma^1 + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \dots + \gamma^{3^0}}_{\gamma^{21}} = \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \dots + \gamma^{3^0} - 1 = \gamma^{31} - 1$$

۵- گزینه (۱)

$$\underbrace{\gamma^{2^0} + 6 \times \gamma^{2^0}}_{\gamma^{22}} + 6 \times \gamma^{2^1} + 6 \times \gamma^{2^2} + \dots + 6 \times \gamma^{1^0} = \gamma^{1^0}$$

۶- گزینه (۳) از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر استفاده می‌کنیم:

$$4(1+4) = 4+4^2$$

$$4(1+4(1+4)) = 4(1+4+4^2) = 4+4^2+4^3$$

⋮

$$4(1+4(1+4(\dots(1+4(1+4))))\dots) = 4+4^2+4^3+\dots+4^{1^0}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{1^0} \\ 4A = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{1^0} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 3A = 4^{1^0} - 4 \Rightarrow A = \frac{1}{3}(4^{1^0} - 4)$$

۷- گزینه (۱)

$$\left. \begin{array}{l} A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \\ 3A = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} 2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

۸- طرفین وسطین می‌کنیم. داریم:

$$2^{1^0^0}(1+2^{99}) \boxed{ } 2^{99}(1+2^{1^0^0}) \Rightarrow 2^{1^0^0} + 2^{1^0^0} \boxed{ } 2^{99} + 2^{1^0^0} \Rightarrow 2^{1^0^0} \boxed{>} 2^{99}$$

۹- گزینه (۲)

$$\left. \begin{array}{l} 2^{49} + 1 = (2^7)^7 + 1 = 128^7 + 1 \\ 5^{21} + 1 = (5^3)^7 + 1 = 125^7 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 125^7 + 1 < \underbrace{126^7 < 127^7 < 128^7}_{\text{عدد}} < 128^7 + 1$$

۱۰- گزینه (۱)

$$\therefore \underbrace{1398 \times 1^0}_{\text{رقم n-6}}^{n-1} = 1 / 398 \times 1^0^{-(n-5)} \times 1^0^{n-1} = 1 / 398 \times 1^0^{-n+5+n-1} = 1 / 398 \times 1^0^4$$

۱۱- گزینه (۲) عدد $2^{21} \times 3^3 \times 9216$ امین عدد طبیعی است.

$$2^{21} \times 3^3 = 1024 \times 9 = 9216 \Rightarrow 9216 \div 2 = 4608$$

۱۲- گزینه (۴)

$$8^1 = (2^3)^1 = 2^3 = (2^5)^6 = 32^6$$

$\Rightarrow 2^6, 2^6, 3^6, 4^6, \dots, 32^6$ تا است.

۱۳- گزینه (۲) عدد داده شده را a در نظر بگیرید. عدد بدست آمده در هر مرحله، به صورت زیر است:

مرحله (۱)	مرحله (۲)	مرحله (۳)
$2a - 1$	$2(2a - 1) - 1$	$2(2(2a - 1) - 1) - 1$
	$= 2^3 a - 2^3 - 2 - 1$	$= 2^9 a - 2^9 - 2^8 - \dots - 2 - 1$

در مرحله (۹۹) داریم:

$$2^{99} a - (\underbrace{2^{98} + 2^{97} + 2^{96} + \dots + 2 + 1}_{2^{99} - 1}) = 2^{99} a - 2^{99} + 1 = 2^{100} + 1 \Rightarrow 2^{99} a = 2^{100} + 2^{99}$$

$$\frac{\div 2^{99}}{} \rightarrow a = 2 + 1 = 3$$

۱۴- گزینه (۴)

$$15 = 3 \times 5 \xrightarrow[\text{مرحله ۱}]{} 2 \times 3 \times 5 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{} 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{} 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{} 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \xrightarrow[\text{ضرب در ۳}]{} 2^6 \times 3^3 \times 5^4$$

۱۵- گزینه (۴) اعداد زیر به دست می‌آیند:

$$1, 2^1, 2^{-1}, 2^2, 2^{-3}, 2^5, 2^{-8}, \dots$$

اگر عدد ۱ را، 2^0 در نظر بگیریم و قدر مطلق توانها را در نظر بگیریم، اعداد $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ به دست می‌آیند که جملات دنباله‌ی فیبوناتچی هستند. پس دهمین دانش‌آموز، عدد 2^{34} را می‌نویسد.

۱۶- گزینه (۴)

$$\sqrt{17} - 3\sqrt{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\sqrt{17} - 3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17} + 3\sqrt{2}}{\underbrace{17 - 18}_{-1}} = -\sqrt{17} - 3\sqrt{2}$$

۱۷- گزینه (۴) با گویا کردن مخرج کسرها، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$-1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots - \sqrt{n} + \sqrt{n+1} = -1 + \sqrt{n+1} \geq 100$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1} \geq 101 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\quad} n+1 \geq 10201 \Rightarrow n \geq 10200$$

۱۸- گزینه (۳)

$$A = 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \dots}}} \xrightarrow{\quad} A = 2\sqrt{3 + A}$$

$$\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\quad} A^2 = 4(3 + A) \Rightarrow A^2 - 4A - 12 = 0 \Rightarrow (A - 6)(A + 2) = 0 \begin{cases} A = 6 \\ A = -2 \end{cases}$$

۱۹- گزینه (۱) حاصل عبارت $(\sqrt{2}-2)^4$ ، بین ۰ و ۱ است. پس می‌توان نوشت:

$$(2+\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^4 = 136 \Rightarrow (2+\sqrt{2})^4 = 136 - \underbrace{(2-\sqrt{2})^4}_\text{بین ۰ و ۱}$$

بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر، عدد ۱۳۵ است. $\Rightarrow 135 < (2+\sqrt{2})^4 < 136$

۲۰- گزینه (۱)

$$\sqrt[3]{\frac{96^3 + 160^3}{33^3 + 55^3}} = \sqrt[3]{\frac{(2^5 \times 3)^3 + (2^5 \times 5)^3}{(3 \times 11)^3 + (5 \times 11)^3}} = \sqrt[3]{\frac{215 \times 3^3 + 215 \times 5^3}{3^3 \times 11^3 + 5^3 \times 11^3}}$$

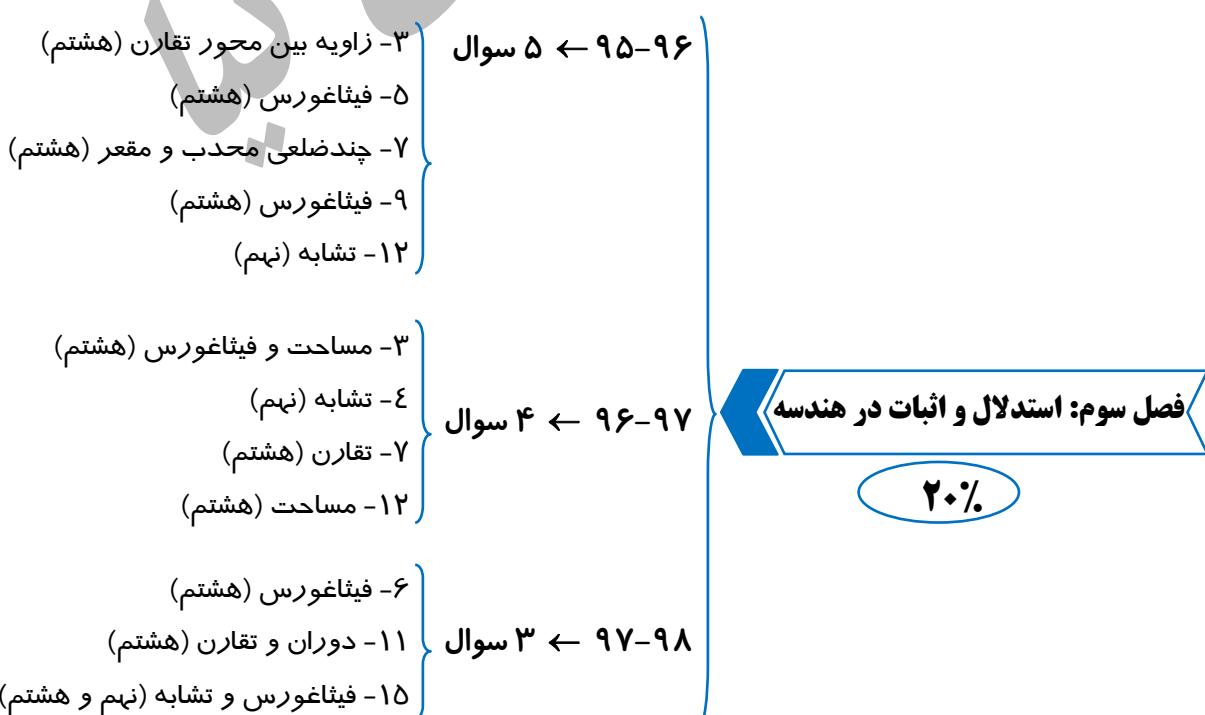
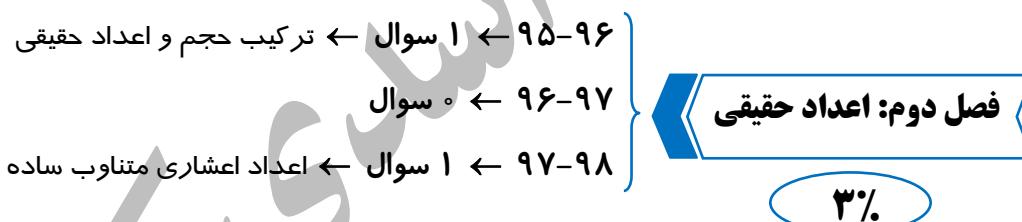
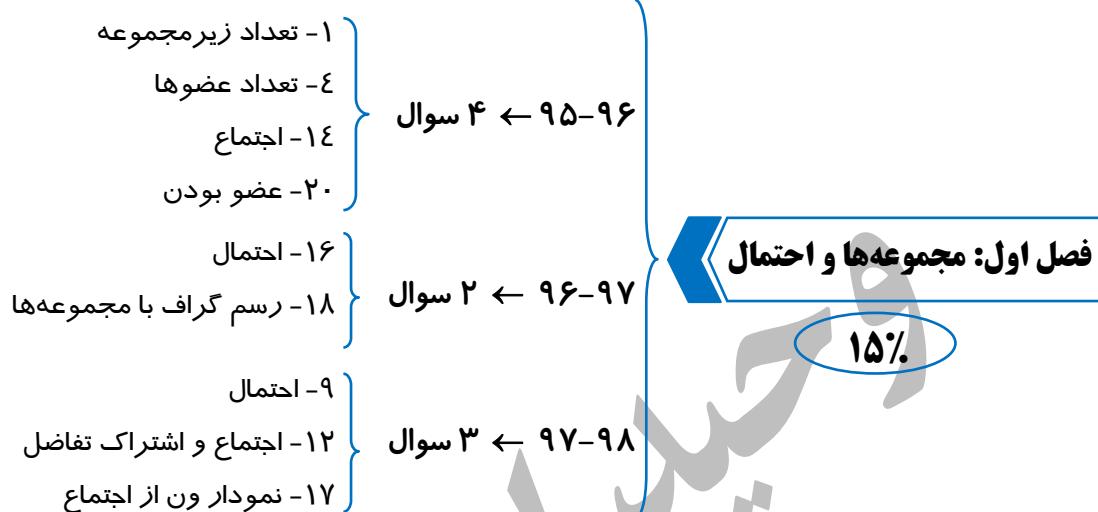
$$\sqrt[3]{\frac{215(3^3 + 5^3)}{11^3(3^3 + 5^3)}} = \sqrt[3]{\frac{215}{11^3}} = \frac{25}{11} = \frac{32}{11}$$

و جد اسدی کیا



بسمه تعالیٰ

آنالیز سوالات ریاضی آزمون تیزهوشان سال‌های ۹۵، ۹۶ و ۹۷



۲- توان و جذر
۱۵- توان و جذر
۱۷- مقایسه و توان

۲- ریشه
۱۳- مسئله‌ی توان ساده
۱۷- مسئله‌ی خلاقیتی و توان

۰ سوال ← ۹۷-۹۸

۸- جبر و هندسه
۱۶- جبر و هندسه

۱- جبر و معادله
۲- جبر و جدول

۱۴- جبر و هندسه (نامساوی مثلثی)

فصل چهارم: توان و ریشه

10%

فصل پنجم: جبر

8%

۱۸- حرکت رفت‌برگشتی و نمودار خط و برخورد
خطها
۱۹- معادله‌ی خط و تشابه و مساحت

۵- حرکت مورچه بر روی یک خط با سرعت ثابت
۸- عبور خط از روی نقطه
۱۰- مسئله‌ی معادله‌ی خط
۱۹- تبدیل حرکت آب به نمودار خط

۴- شبیه خط
۱۰- نمودار ارتفاع آب

فصل ششم: معادله‌ی خط

13/3%

۰ سوال ← ۹۵-۹۶
۱ سوال ← ۹۶-۹۷
۰ سوال ← ۹۷-۹۸

فصل هفتم: عبارات گویای جبری

1/6%

<p>۱۰- سطح مقطع ۱۳- هرم</p> <p>۱۴- دوران یک مساحت حول یک خط ۲۰- فیثاغورس (هشتم)</p> <p>۵- مکعب و مکعب مستطیل ۱۶- هرم و مکعب</p>	<p>۹۵-۹۶ ← ۲ سوال</p> <p>۹۶-۹۷ ← ۲ سوال</p> <p>۹۷-۹۸ ← ۲ سوال</p>	فصل هشتم: حجم 10%
<p>- حرکت روی دایره با زاویه در دایره حل می شود (هشتم)</p> <p>- حاصلضرب شمارندها (هشتم)</p> <p>- حرکت بر روی خط راست ساده (هشتم)</p> <p>- تعداد چراغ لازم برای روشن کردن یک مساحت</p> <p>- تکه کردن کاغذها (الگویابی)</p> <p>- حداقل و حداقل</p> <p>- مسابقه فوتbal و امتیاز</p> <p>- مسیریابی و تعداد جادهها</p>	<p>۹۵-۹۶ ← ۱ سوال ← تقریب</p> <p>۹۶-۹۷ ← ۴ سوال</p> <p>۹۷-۹۸ ← ۴ سوال</p>	سوالات متفرقه 15%