بسمه تعالی

جزوه فصل ۶

معادله خط

ریاضی نهم

دانلود از اپلیکیشن پادرس

خط و معادله ی خط

در این فصل شما باید بتوانید :

۱- معادله ی خط را با استفاده از اطلاعاتی که مسئله داده بنویسید .

۲ – خطی را که معادله ی آن داده شده است را رسم کنید .

۳- تعیین کنید که آیا نقطه ای روی خطی که معادله ی آن داده شده است قرار می گیرد ؟

نوشتن معادله ی خط

ابتدا لازم است به معنی معادله بیشتر توجه کنیم .

معادله در واقع به رابطه ها می پردازد ، مثلاً وقتی می گوییم معادله ۱۴=۷ +x ، یعنی رابطه ای بین ۱۴ و x وجود دارد . این رابطه می گوید اگر به x هفت واحد اضافه کنیم به ۱۴ می رسیم .

وقتی می گوییم وزن احمد دو برابر وزن علی است یعنی رابطه ی وزن ها ۲ به ۱ است که می توان نوشت :

وزن ۲ تا علی =وزن احمد ، اگر وزن احمد y و وزن علی x باشد معادله به صورت : $y = ۲x$ نوشته می شود .

بنابراین برای نوشتن معادله ی خط باید رابطه ی بین x و y را پیدا کنیم . به مثال های زیر توجه کنید .

مثال :در نیمساز ربع اول و سوم همیشه عرض نقاط برابر طول آن نقاط است . y=x

مثال : اگر به ۲برابر طول نقطه ای ۱ واحد اضافه کنیم ، عرض نقطه بدست می آید . $y = ۲x + ۱$

مثال :در فعالیت ص۹۶ مطلب بالا را بیان کرده است یعنی بین مسافت طی شده (y) توسط دوچرخه سوار و زمان سپری شده (x) رابطه ای وجود دارد . $y = ۲x$

زمان x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

نکته : سرعت ثابت دوچرخه باعث می شود تمام نقاط جدول بالا روی یک خط راست قرار گیرند .

@riazicafe
دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : در کار در کلاس ص ۹۷ یک مثال را در دو حالت بررسی کرده است .

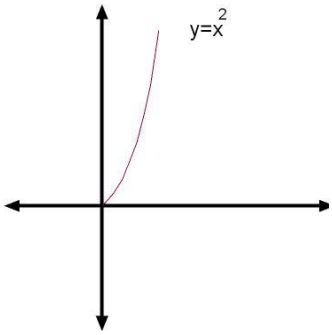
در قسمت اول رابطه ی بین ضلع مربع (x) و محیط مربع (y) را بیان کرده است . می دانیم که محیط مربع همیشه ۴ برابر اندازه ی یک ضلعش است . پس معادله ی آن به صورت : $y = ۴x$ است .

نکته : تمام نقاط سئوال ۱ روی یک خط راست قرار می گیرند .

در قسمت دوم رابطه ی بین مساحت مربع (y) و ضلع مربع (X) را مطرح کرده است . می دانیم مساحت هر مربعی برابر است با مجذور اندازه ی یک ضلعش . پس معادله بصورت : $y = x^۲$ است .

نکته : نقاط سئوال ۲ روی منحنی قرار می گیرند .

پس برخی از معادله ها مربوط به خط راست نیستند .



y=ax صورت کلی معادله ی خطهایی است که از مبداء مختصات می گذرند . در این معادله a شیب خط نام دارد .

$y = ۴x$ معادله ی خط راستی است که از مرکز مختصات عبور می کند و شیب آن ۴ است .

$y = \frac{۴}{۵}x$ خطی است که از مرکز گذشته و شیب آن $\frac{۴}{۵}$ است .

نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم خطی است که از مرکز مختصات می گذرد و شیب آن ۱- است .معادله ی آن $y = -x$ می باشد .

نکته : برای بدست آوردن شیب ، اگر خط از مبداء می گذرد کافی است عرض نقطه ای که بر روی آن قرار دارد را بر طولش تقسیم کنیم .

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می گذرد .

چون این خط از مبداء می گذرد پس برای بدست آوردن شیب ،عرض نقطه ی دوم را بر طولش تقسیم می کنیم و سپس مقدار به دست آمده را در فرمول کلی قرار می دهیم . $a = \frac{۳}{-۱} = -۳$ و $y = -۳x$

@riazicafe دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : در فعالیت ص ۹۹ سئوال ۱ چون هردو خط از مبداء می گذرند پس :

معادله ی الف) y=-x و معادله ی ب) $y = \frac{۱}{۳} x$ می باشد . (برای به دست آوردن شیب (a) ،عرض نقطه را به طولش تقسیم کرده ایم .)

مثال: به ازای چه مقدار m از خط $۲(۳x - m) = ۳(x + y + ۱)$ ، این خط از مبدا مختصات می گذرد

حل : ابتدا معادله را مرتب می کنیم تا به صورت معادله کلی در آید .

$$۶x - ۲m = ۳x + ۳y + ۳ \rightarrow ۳y = ۶x - ۲m - ۳x - ۳ \rightarrow ۳y = ۳x - ۲m - ۳ \rightarrow y = x - (\frac{۲}{۳}m + ۱)$$

سپس آنرا با معادله ی $y = ax$ مقایسه کنیم و بنا برآن داریم :

$$\frac{۲}{۳}m + ۱ = ۰ \rightarrow ۲m + ۳ = ۰ \rightarrow m = \frac{-۳}{۲}$$

گاهی اوقات خطوطی وجود دارند که از مرکز مختصات عبور نمی کنند بلکه در جاهایی دیگر محورهای xوy را قطع می کنند .

به محلی که خط محور طول ها را قطع می کند طول از مبداء و محلی که خط محور عرض ها را قطع می کند عرض از مبداء می گوییم .

$y = ax + b$ صورت کلی معادله ی خطهایی است که از مبداء نمی گذرند . در این معادله b همان عرض از مبداء است و a نیز همچنان شیب خط است .

پس با دانستن شیب و عرض از مبداء نیز می توان معادله ی خط را نوشت .

مثال : کار در کلاس ص ۱۰۳

۱- برای نوشتن شیب و عرض از مبداء هر معادله را با معادله ی کلی مقایسه می کنیم ،بنابراین :

۲ شیب و ۴- عرض از مبداء در معادله ی $y = ۲x - ۴$

$\frac{-۲}{۳}$ شیب و عرض از مبداء صفر در معادله ی $y = \frac{-۲}{۳}x$

@riazicafe دانلود از اپلیکیشن پادرس

۳- شیب و ۱ + عرض از مبداء در معادله ی $y = -۳x + ۱$

۲- در معادله ی کلی به جای شیب و عرض از مبدا ء عدد گذاری می کنیم .

الف) $y = -۲x - ۱$ ب) $y = \frac{۱}{۲}x + ۳$

نکته : دو خط موازی دارای شیب های مساوی هستند .

نکته : اگر **b** عرض از مبداء باشد مختصات عرض از مبداء را بصورت $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ می نویسیم .

نکته : اگر **L** طول از مبداء باشد مختصات آن را بصورت $\begin{bmatrix} L \\ ۰ \end{bmatrix}$ می نویسیم .

ج) $y = ۲x + ۴$

۳- برای نوشتن معادله ی خطی که شیب آن داده شده ولی به جای عرض از مبداء ،مختصات نقطه ای دیگر را داده اند به ترتیب زیر عمل می کنیم :

ابتدا شیب را در معادله ی کلی جایگذاری می کنیم . $y = ax + b \rightarrow y = ۲x + b$

سپس به جای x و y مختصات نقطه را قرار می دهیم . $۲ = ۲ \times ۱ + b \rightarrow b = ۲ - ۲ = ۰$

پس معادله ی خط به صورت $y = ۲x + ۰ = ۲x$ می باشد .

نکته : برای نوشتن معادله ی خط این فرمول خیلی به ما کمک می کند : $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ دراین معادله m شیب و y_1 و x_1 عرض و طول نقطه ی داده شده هستند .

مثال :معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن ۴ باشد و از نقطه ی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد .

حل :در معادله ی $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ اعداد را جایگزین می کنیم و سپس عبارت را ساده می کنیم .

$$y - ۳ = ۴(x - ۲) = ۴x - ۸ \rightarrow y = ۴x - ۵$$

مثال: مقدار b چند باشد تا عرض از مبدا خط $y - b + ۵ = ۳x + ۷$ برابر ۶- شود ؟

حل : ابتدا معادله را مرتب می کنیم : $y = ۳x + ۷ - ۵ + b = ۳x + (۲ + b)$

با مقایسه با $y = ax + b$ متوجه می شویم که : $۲ + b = -۶ \Rightarrow b = -۶ - ۲ = -۸$

@riazicafe دانلود از اپلیکیشن پادرس

برای بدست آوردن شیب خطی که از مبداء نمی گذرد ولی مختصات دو نقطه از خط را داریم کافی است

اختلاف عرض ها را بر اختلاف طولها تقسیم کنیم . $A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ شیب $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد .

حل: ابتدا شیب خط را به دست می آوریم . $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{-5-2}=-\frac{2}{7}$ سپس معادله ی

$y-y_1=m(x-x_1)$ را در نظر گرفته و شیب و مختصات یکی از نقاط را جایگذاری می کنیم :

$$y-y_1=m(x-x_1)\rightarrow y-3=-\frac{2}{7}(x-2)=-\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}\rightarrow y=-\frac{2}{7}x+3\frac{4}{7}$$

مثال : اگر شیب خطی که از دو نقطه ی $A=\begin{bmatrix} -a \\ a-3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می گذرد و با شیب خطی که محور X را در طول ۳- و محور y را در عرض ۱- قطع می کند برابر باشد، a چقدر است؟

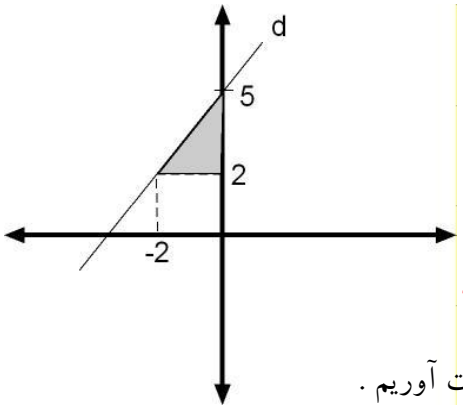
حل: $m_1=\frac{2-(a-3)}{1-(-a)}=\frac{5-a}{1+a}$

$m_2=\frac{-1-0}{0-(-3)}=-\frac{1}{3}$

$m_1=m_2 \Leftarrow \frac{5-a}{1+a}=\frac{-1}{3}$

$\Leftarrow -1-a=3a-15 \rightarrow 2a=16 \rightarrow a=8$

برای اینکه بدانیم چرا برای به دست آوردن شیب باید اختلاف ها را به هم تقسیم کنیم به مثال و شکل زیر توجه کنید :



مثال : می خواهیم شیب خطی را که رسم شده است پیدا کنیم :

حل : بافرض اینکه می دانیم از تقسیم اضلاع قائم مثلث می توانیم شیب را به دست آوریم و اینکه ضلع عمودی بر ضلع افقی تقسیم شود ناچاریم که اندازه های هر ضلع را با استفاده از اختلاف عددها به دست آوریم .

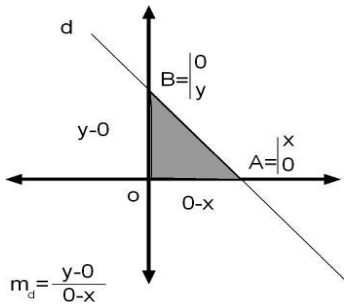
یعنی : اندازه ی ضلع قائم برابر است با ۳=۲-۵ و اندازه ی ضلع افقی برابر است با ۲=(۲-)-۰

نکته : اندازه ها همیشه به صورت قدر مطلق بیان می شوند .

بنا براین شیب این خط برابر است با $\frac{3}{2}$

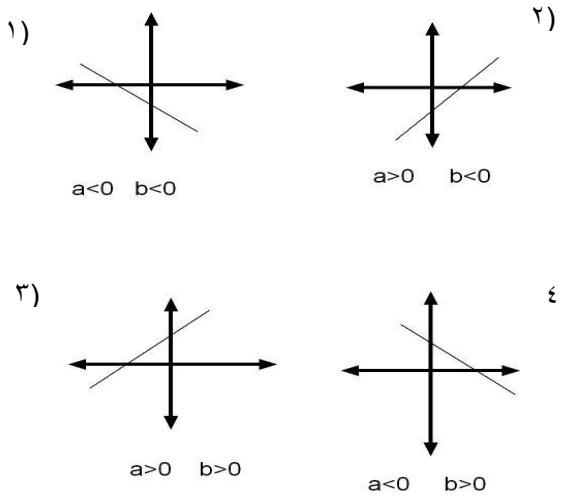
@riazicafe دانلود از اپلیکیشن پادرس

نکته : اگر خط با جهت + محور طول ها زاویه ی تند درست کند شیب مثبت دارد و اگر زاویه ی باز داشته باشد شیب منفی دارد .



مثال : تمرین ۴ ص ۱۰۷ اشاره به همین مطلب را دارد .

نکته : برای خطی به معادله ی $y = ax + b$ که a شیب و b عرض از مبدا است چهار حالت در صفحه در نظر می گیریم :



۱) خط از ناحیه ی اول نمی گذرد.

۲)خط از ناحیه ی دوم نمی گذرد.

۳) خط از ناحیه ی چهارم نمی گذرد.

۴)خط از ناحیه سوم نمی گذرد.

مثال : تمرین ۸ ص ۱۰۷ با داشتن دو نقطه ابتدا شیب را پیدا می کنیم :

$\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{-۱-۲}{۴-۳} = -\frac{۳}{۱} = -۳$. سپس از رابطه ی $y-y_۱ = m(x - x_۱)$ استفاده کرده و اعداد را جایگزین می کنیم .

$y-۲ = -۳(x - ۳) = -۳x + ۹ \rightarrow y = -۳x + ۱۱$

صورت کلی معادله های خطی $ax+by=c$ می باشد . (توجه داشته باشید در این معادلات a و b شیب و عرض از مبداء نمی باشند .)

مثال : تمرین ۳ ص ۱۰۶ معادله ی $۴x - ۲y = ۸$ معادله ی یک خط راست می باشد . برای پیدا کردن شیب دو راه وجود دارد :

راه اول– معادله را طوری مرتب کنیم تا به صورت $y = ax + b$ در بیاید .

برای این کار ابتدا x را از y جدا می کنیم سپس همه ی عبارت را به ضریب y تقسیم می کنیم .

@riazicafe
دانلود از اپلیکیشن پادرس

$۴x - ۲y = ۸ \rightarrow -۲y = -۴x + ۸ \rightarrow y = ۲x - ۴$ پس شیب ۲ وعرض از مبداء ۴- است.

راه دوم- در این معادلات شیب و عرض از مبداء از رابطه های زیر به دست می آیند :

شیب $m = \frac{-a}{b}$ عرض از مبداء $d = \frac{c}{b}$ بنابراین

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-۴}{-۲} = ۲$ و $d = \frac{c}{b} = \frac{۸}{-۲} = -۴$

مثال : فعالیت ۴ ص ۱۰۶ هر تمرین را با یکی از راهها حل کرده ایم .

$۳x - ۲y = ۶ \rightarrow m = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲} \rightarrow d = \frac{۶}{-۲} = -۳$

$x + ۳y - ۹ = ۰ \rightarrow ۳y = -x + ۹ \rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + ۳$ پس $d = ۳$ و $m = -\frac{۱}{۳}$

نکته : معادله خطهایی که موازی با محور طول ها هستند بصورت y=a و معادله خطهایی که موازی با محور عرض ها هستند x=a است .

نکته : شیب خطهایی که موازی با محور xها است برابر صفر و شیب خطهایی که موازی محور y ها هستند نامعین و یا تعریف نشده اند .

مثال : کاردر کلاس ۳ ص ۱۰۶ چون خط موازی محور xها است پس معادله ی آن به صورت y=۱ است.

مثال : فعالیت ۱ ص ۱۰۵ چون نقطه ها دارای طول مساوی ۲ هستند پس خط موازی محور yها است .

پس معادله ی آن به صورت x=۲ می باشد .

رسم خطی که معادله ی آن داده شده است

برای رسم خط ما باید حداقل مختصات ۲ نقطه را داشته باشیم لذا با کشیدن جدولی مقادیری را برای x انتخاب کرده و از روی آن مقدار y را به دست می آوریم .

@riazicafe دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : دو خط $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۳$ را روی دستگاه محورهای مختصات رسم کنید . آیا این دو خط با هم موازیند ؟ چرا؟

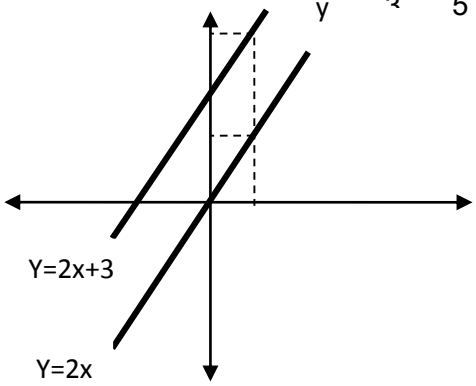
برای رسم هر خط کافی است مختصات دو نقطه از آن را داشته باشیم .

$y = ۲x$

x	۰	۱
y	۰	۲

$y = ۲x + ۳$

x	۰	۱
y	۳	5

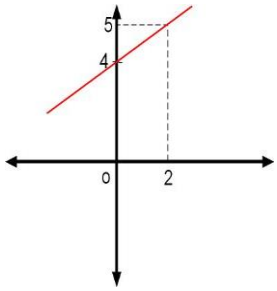


برای رسم خطی که معادله ی آن بصورت کلی گفته شده است بهتر است ابتدا یکبار x= ۰ باشد و مقدار y را بدست آورد و بار دیگر y= ۰ باشد و مقدار x را بدست آورد .

مثال : تمرین ۱ ص ۱۰۰ برای رسم خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۴$ ابتدا جدولی رسم می کنیم .

$y = \frac{۱}{۲}(۰) + ۴ = ۴$ $\qquad$ $y = \frac{۱}{۲}(۲) + ۴ = ۵$

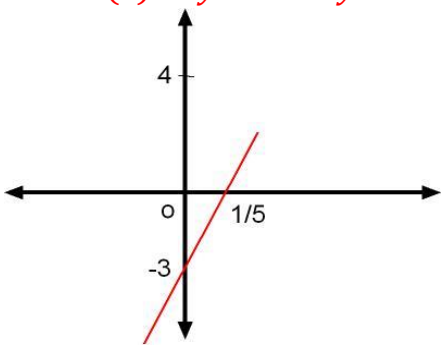
x	۰	۲
y	۴	۵
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$



@riazicafe
دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : تمرین ۳ ص ۱۰۶ برای رسم خط ،جدول می کشیم . لازم به یادآوری است چون معادله به صورت کلی داده شده بهتر است یکبار x=0 و یکبار y=0 باشد . $۲x - y = ۳ \rightarrow ۲(۰) - y = ۳ \rightarrow y = -۳$

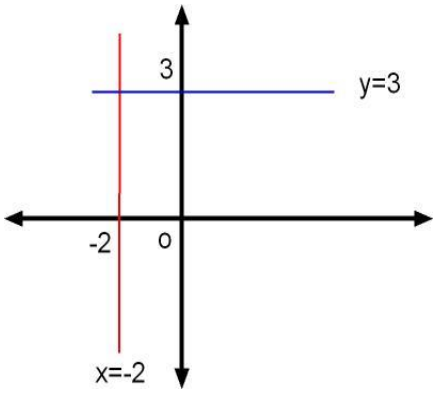
x	۰	۱/۵
y	−۳	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱/۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$



$$۲x - y = ۳ \rightarrow ۲x - ۰ = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

نکته : برای رسم خط های موازی با محور نیازی به کشیدن جدول نیست .

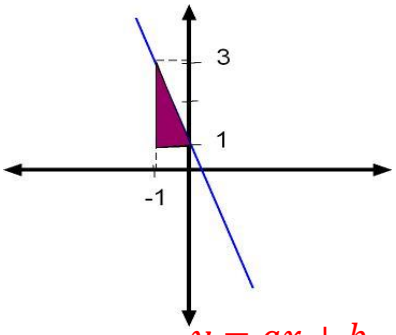
مثال : تمرین ۱ ص ۱۰۶



مثال : تمرین ۲ ص ۱۰۶

معادله ی محور طول ها $y=۰$ و معادله ی محور عرض ها $x=۰$

مثال : تمرین ۵ ص ۱۰۷



ابتدا با استفاده از مثلث شیب را به دست می آوریم :

$a = \frac{۲}{۱}$ اما چون خط با محورxها زاویه ی باز ساخته

پس شیبش منفی است و از طرفی b= ۱ پس $y = ax + b \rightarrow y = -۲x + ۱$

@riazicafe
دانلود از اپلیکیشن پادرس

تعیین مختصات نقطه روی یک خط

گاهی اوقات از ما مختصات نقطه ای را می خواهند که روی خط واقع است . در این صورت با دانستن x یا y و قرار دادن آن در معادله دیگری را پیدا می کنیم .

مثال : کاردرکلاس ۱ ص ۱۰۰

مختصات نقطه ای به طول ۲ را روی خط $y = ۲x - ۱$ پیدا کنید .

$$y = ۲x - ۱ \rightarrow y = ۲(۲) - ۱ = ۴ - ۱ = ۳ \qquad \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

مثال : کاردر کلاس ۲ ص ۱۰۰

مختصات نقطه ای به عرض ۳- را روی خط $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ پیدا کنید .

$$y = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \rightarrow -۳ = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۳ + ۲ \rightarrow x = ۱۰ \qquad \begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

مثال : کار در کلاس ۳ ص ۱۰۰

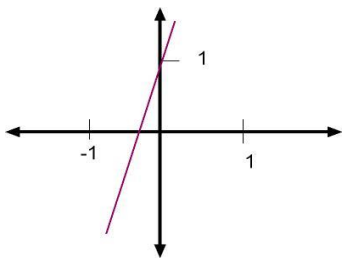
مختصات محل برخورد خط $y = ۵x + ۱$ را با محورهای مختصات پیدا کنید .

می دانیم که محل برخورد خط با محور طول ها دارای عرض مساوی صفر است . پس در معادله به جای y صفر می گذاریم تا x به دست آید .

$$y = ۵x + ۱ \rightarrow ۵x + ۱ = ۰ \rightarrow ۵x = -۱ \rightarrow x = -\frac{۱}{۵}$$ پس $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ ۰ \end{bmatrix}$

همچنین میدانیم که محل برخورد خط با محور عرض ها دارای طول مساوی صفر است پس اینبار به جای x در معادله صفر قرار می دهیم تا y به دست آید .

$$y = ۵x + ۱ \rightarrow y = ۵(۰) + ۱ \rightarrow y = ۱$$ پس $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$



@riazicafe
دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : تمرین ۶ ص۱۰۱

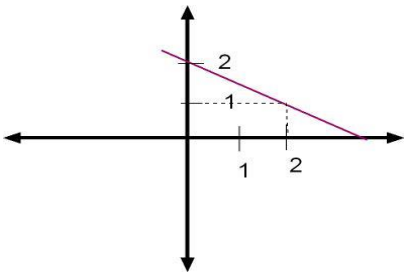
مختصات نقطه ای از خط به معادله ی $y = -\frac{۳}{۵}x + ۴$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد .

$$\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad y = -\frac{۳}{۵}(۵) + ۴ = -۳ + ۴ = ۱$$

مثال : تمرین ۷ ص۱۰۱

خط $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ را رسم کنید .

X	۰	۲
Y	۲	۱
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$



آیا نقطه ی $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ باید مختصات نقطه را در معادله قرار دهیم اگر دو طرف مساوی شدند قرار دارد . $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \to ۳ = -\frac{۱}{۲}(-۲) + ۲ \to ۳ = +۱ + ۲ = ۳$ پس قرار دارد

مثال : آیا نقطه $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} \\ ۳ \end{bmatrix}$ روی خط $۵x - ۴y = ۱۱$ قرار دارد ؟

$$۵\left(\frac{۱}{۵}\right) - ۴(۳) = ۱۱ \to ۱ - ۱۲ = ۱۱ \to ۱۱ = ۱۱$$ پس قرار دارد .

برای یادگیری بهتر تمرین ها و مثال ها را یک بار دیگر خودتان حل کنید .

@riazicafe

دانلود از اپلیکیشن پادرس