

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جزوه فصل ۶ ریاضی نهم (خط و معادله های خطی) گروه ویژه ۹

دبیرستان عمارت به ابوالمحاق

دبیر: حسین لهراب

درس اول: معادله خط

درس دوم: تب خط و عرض از مبدأ

درس سوم: دستگاه معادله های خطی

درس اول: معادله خط

هر معادله به صورت کلی $y = ax + b$ معادله یک خط راست است.
 $y = 2x + 1$
 $a = 2$ و $b = 1$

در این صورت اگر x و y با هم رابطه خطی دارند. مثال: $y = ax + b$ دارای بی شمار جواب است ولی رابطه خطی بین x و y است.
 اتحاد نیست.

مثال: اگر طول ضلع یک مربع x و محیط آن را با y نشان دهیم چه رابطه ای بین x و y هست؟ آیا این رابطه یک رابطه خطی است؟
 ضلع x → $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 24 \end{bmatrix}$

رابطه خطی است $\Rightarrow y = 4x \Rightarrow a = 4$ و $b = 0$

محیط مربع برابر است با یک ضلع $4x$
 $y = ax + b$
 $y = 4x + 0 \Rightarrow a = 4$ و $b = 0$

مثال: اگر طول ضلع یک مربع x و مساحت آن y نشان دهیم چه رابطه ای بین x و y هست؟
 آیا این رابطه یک رابطه خطی است؟

مساحت مربع = یک ضلع x منورش $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 36 \end{bmatrix}$
 ضلع x مساحت y

رابطه خطی نیست $\Rightarrow y = x \times x \Rightarrow y = x^2$
 چون در صورتی رابطه خطی است به صورت $y = ax + b$ باشد و توان x باید ۱ باشد

معادله $x+y=10$ چند پاسخ دارد؟ چهار پاسخ از آن را بنویسید

برای این تساوی معادله است ولی اتحاد نیست

$$x=1 \xrightarrow[\text{در خط}]{\text{جایگزینی}} 1+y=10 \Rightarrow y=9 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$$

$$x=2 \xrightarrow{\quad} 2+y=10 \Rightarrow y=8 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$$

$$x=-3 \xrightarrow{\quad} -3+y=10 \Rightarrow y=13 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=13 \end{cases}$$

$$x=0 \xrightarrow{\quad} 0+y=10 \Rightarrow y=10 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases}$$

معادله $x+y=10$ بی شمار جواب دارد.
این تساوی یک معادله است زیرا به ازای هر x و y هایی به یک تساوی عددی تبدیل می شود.
این تساوی اتحاد نیست زیرا به ازای تمام x و y ها به تساوی عددی تبدیل نمی شود.
به عنوان مثال $x=3$ و $y=8$ را جایگزین کنیم به تساوی عددی تبدیل نمی شود.

$$x+y=10$$

$$3+8=10$$

$$11 \neq 10 \rightarrow$$

تساوی برقرار نیست

چون اگر نخواهد اتحاد شود باید برای هر x و y های معادله درست باشد.

مثال) سه جواب برای معادلات زیر بنویسید.

الف) $y=2x-1$

$$x=0 \Rightarrow y=2(0)-1=0-1=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x=1 \Rightarrow y=2(1)-1=2-1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x=2 \Rightarrow y=2(2)-1=4-1=3 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ب) $3x-4y=12$

$$x=0 \Rightarrow 3(0)-4y=12 \Rightarrow 0-4y=12 \Rightarrow y=\frac{12}{-4}=-3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$y=0 \Rightarrow 3x-4(0)=12 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{3}=4 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow 3(1)-4y=12 \Rightarrow 3-4y=12 \Rightarrow -4y=12-3 \Rightarrow -4y=9$$

$$\Rightarrow y=-\frac{9}{4}$$

تذکر: دقت کنید سادگی $y = 2x - 1$ ساده تر و سریع تر است و راحت تر می توان

با اینج ها می توانستید بدست آورد

پس اگر ارجاع حقیقی به صورت $y = ax + b$ باشد بهتر است.
(پس y یک طرف و بقیه عبارت طرف دیگر) کار کردن با آن راحت تر است

روش رسم خط $y = ax + b$

برای اینکه یک خط به صورت کلیتا مشخص شود ۲ نقطه از آن را داشته باشیم

کافی است. پس کافی است ۲ نقطه از آن را داشته باشیم و آن ها را در

رشتهای مختلف کرده و به هم وصل کنیم تا خط راست بدست آید.

تذکر: بهتر است به جای $x=0$ یا $x=1$ مقدار x را در y را بدست آوریم.

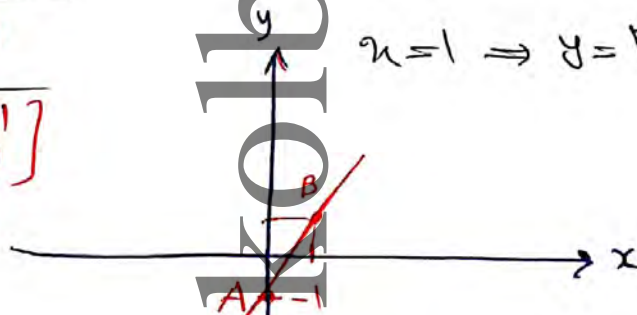
تذکر: اگر ضریب x کسری باشد به جای $x=0$ و صفر ضریب x را قرار می دهیم تا ساده شود.

مثال: نمودار خط $y = 2x - 1$ را رسم کنید.

$$x=0 \Rightarrow y = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$x=1 \Rightarrow y = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

x	0	1
y	-1	1
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ A	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ B

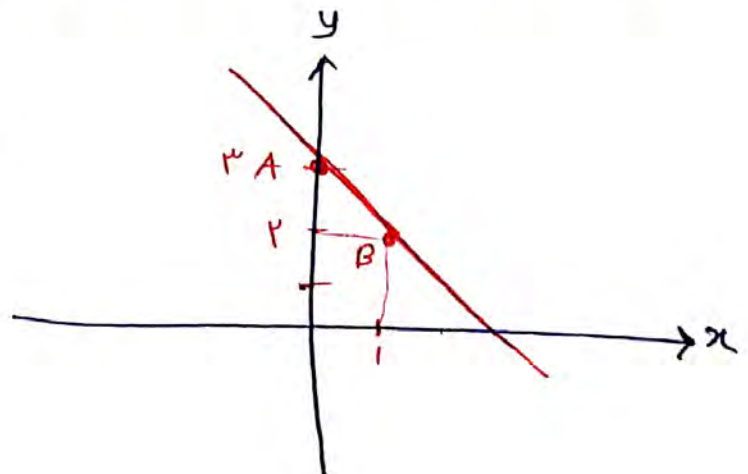


مثال: نمودار خط $y = -x + 3$ را رسم کنید.

x	0	1
y	3	2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ A	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ B

$$x=0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3$$

$$x=1 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2$$

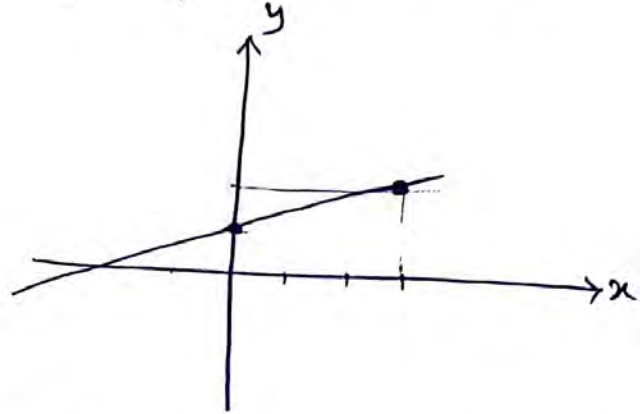


مثال: خط $y = \frac{1}{3}x + 1$ را رسم کنید.

x	۰	۳
y	۱	۲
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(3) + 1 = 1 + 1 = 2$$

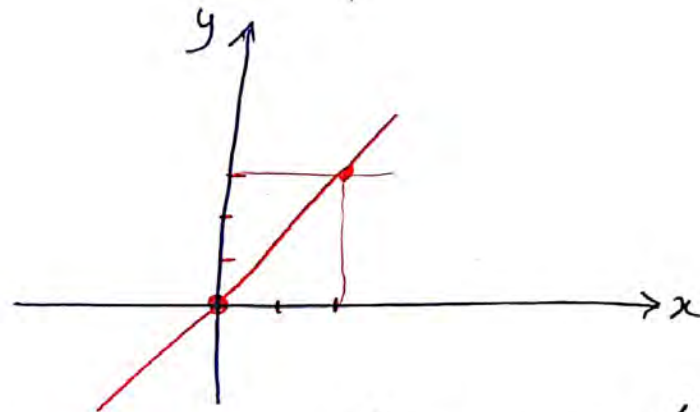


مثال: خط $y = \frac{3}{2}x$ را رسم کنید.

x	۰	۲
y	۰	۳
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \times 0 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$



نکته مهم: خطوط $y = ax$ به صورت $y = ax$ هستند از مبدأ مختصات می گذرند.

$$y = x \quad y = -x \quad y = 2x \quad y = 4x \quad \dots$$

نکته: اگر معادله یک خط را داشته باشیم و می خواهیم مختصات نقطه ای که طول آن را داشته باشیم، را مشخص کنیم، کافی است در معادله خط به جای آن طول را درج کنیم و جوابی را بدست می آوریم.

نکته: اگر معادله یک خط را داشته باشیم و می خواهیم مختصات نقطه ای که عرض آن را داشته باشیم، را مشخص کنیم، کافی است در معادله خط به جای آن عرض را درج کنیم و جوابی را بدست می آوریم.

مثال ۵

مختصات نقطه‌ای به طول ۲ و روی خط $y = 3x - 2$ پیدا کنید.

$$x = 2 \Rightarrow y = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ مختصات نقطه}$$

مثال ۲ مختصات نقطه‌ای به طول ۳ و روی خط $y = \frac{2}{3}x + 2$ پیدا کنید.

$$x = -3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(-3) + 2 = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۳ مختصات نقطه‌ای به عرض ۵ و روی خط $y = -2x + 1$ پیدا کنید.

$$y = 5 \Rightarrow 5 = -2x + 1 \Rightarrow 2x = 1 - 5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

مثال ۴ مختصات نقطه‌ای به عرض ۳ و روی خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ پیدا کنید.

$$y = -3 \Rightarrow -3 = -\frac{1}{2}x + 2 \xrightarrow{\text{از حالت سرتیغی سوا}} -6 = -x + 4 \Rightarrow$$

$$x = 4 + 6 \Rightarrow x = 10$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

نکته: مختصات محل برخورد خط با محورهای مختصات

این مختصات محل برخورد خط با محور x از آن جایی که روی محور x ها، عرض صفر است پس کافی است در معادله خط به جای $y = 0$ قرار دهیم و پس x را بدست می آوریم

پس مختصات محل برخورد با محور y ها از آن جایی که روی محور y ها، طول صفر است پس کافی است در معادله خط به جای $x = 0$ قرار دهیم و پس y را بدست می آوریم.

مثال ۵ مختصات محل برخورد خط $y = x - 2$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$\text{مختصات} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها}$$

$$\text{مختصات} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

مثال، معنقات محل برخورد خط $y = 5x + 1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

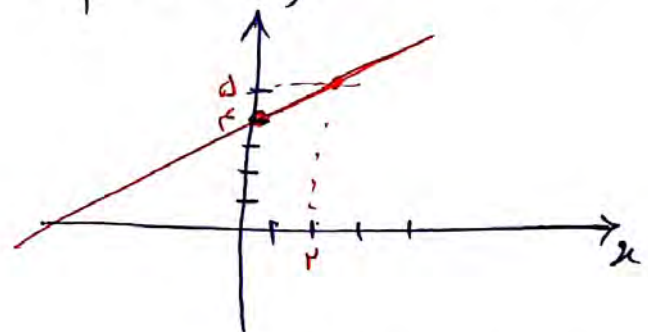
\rightarrow محل برخورد با محور $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 5x + 1 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$
 \rightarrow محل برخورد با محور $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5(0) + 1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

مثال، معنقات محل برخورد خط $y = -\frac{1}{3}x + 1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

\rightarrow محل برخورد با محور $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{3}x + 1 \xrightarrow{\times 3} 0 = -x + 3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
 \rightarrow محل برخورد با محور $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}(0) + 1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

مثال، خط به معادله $y = \frac{1}{2}x + 4$ را رسم کنید.

x	0	2
y	4	5
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$



$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(0) + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(2) + 4 = 1 + 4 = 5$$

الف: آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است؟ چرا؟

برای اینکه مشخص کنیم یک نقطه روی یک خط قرار دارد یا نه باید به جای x و y در معادله خط معنقات
آن نقطه را در خط قرار دهیم اگر به یک تساوی درست تبدیل شود نتیجه می گیریم آن نقطه روی
خط قرار دارد:

$\begin{matrix} x \leftarrow 2 \\ y \leftarrow -1 \end{matrix} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow$
 $-1 = \frac{1}{2}(2) + 4$
 $-1 = 1 + 4$

پس نقطه روی خط قرار ندارد.

ب) نقدی این از این خط، به طول ۱- را پیدا کنید.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{r}(-1) + r = -\frac{1}{r} + \frac{r}{1} = \frac{-1 + 1}{r} = \frac{0}{r}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ v \\ \frac{v}{r} \end{bmatrix}$$

(ج) محققات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

عمل بر محور دایمور $x \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{F} x + c \xrightarrow{x^2} 0 = x + 1 \Rightarrow x = -1$
 $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

\rightarrow عمل بر ضرورت دارد $\Rightarrow n=0$

$$\hookrightarrow y = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال: معنقات محل بر فورء حفا به عا رله $y = -x + 2$ را با بحر هاى معنقات ببا بید.

→ حل بر ضرورت با محور $x \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=-x+2 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

حل بر فرض جامع $x=0 \Rightarrow y = -0 + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

مثال: معادلات نقطه ای از خطوط همکاره $y = \frac{3}{5}x + 4$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.

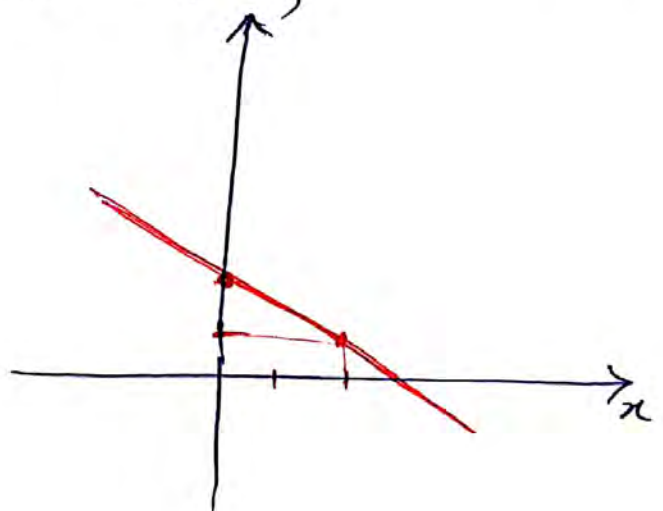
$$\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix} \rightarrow y = -\frac{\kappa}{\alpha}(\alpha) + \kappa \quad \text{and} \quad -\frac{\kappa}{\alpha} + \kappa = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

بما أن $y = -\frac{1}{2}x + 2$ في $(\sqrt{2}, 0)$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 1 \\ \hline [x] & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x=0 \Rightarrow y = -\frac{1}{f}(0) + r = 0 + r = r$$

$$x=2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(2) + 2 = -1 + 2 = 1$$



ص

افتد آما نقطه $[-2]$ روی این خط قرار دارد

لب زیر ←

$$\begin{array}{l} x = -2 \\ \hline y = 3 \end{array} \rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$3 = -\frac{1}{2}(-2) + 2$$

$$3 = +1 + 2$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

ب) نقطه ای به طول ۱- روی این خط پیدا کنید

$$x = -1$$

→

$$y = -\frac{1}{2}(-1) + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} y = -2 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

ب) نقطه ای به عرض ۲- روی این خط پیدا کنید

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$-2 = -\frac{1}{2}x + 2 \xrightarrow{x^2} -4 = -x + 4 \Rightarrow x = 4 + 4$$

$$\Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ت) محل برخورد خط با محورهای مختصات پیدا کنید

$$\begin{array}{l} \rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 2 \xrightarrow{x^2} 0 = -x + 4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \text{محل برخورد با محور } x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(0) + 2 = 0 + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

سوال: طول یک فنر ۱۰ cm است. وقتی وزنه ای به جرم ۵ kg به آن وصل شود، طول فنر از رابطه

$$y = 0.1x + 10$$

$$x = 5$$

$$y = 0.1(5) + 10 \Rightarrow y = 4 + 10 = 14$$

اگر طول فنر ۱۸ سانتی متر باشد برای چه سرعت وزنه به جرم ۵ کیلوگرم است؟

$$18 = 0.1x + 10 \Rightarrow 18 - 10 = 0.1x \Rightarrow 8 = 0.1x$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{0.1} = 80$$

درس دوم : شیب خط و عرض از مبدأ :

در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد a ، شیب خط است. عدد b ، نشان دهنده محل برخورد با محور عرض است که به آن عرض از مبدأ می گویند.
تذکره : با تغییر a زاویه خط با جهت مثبت محور x ها تغییر می کنند.

مثال : خط $y = -2x + 5$ } شیب $= -2$
عرض از مبدأ $= 5$

تذکره : اگر خطی از مبدأ مختصات عبور کند \Rightarrow عرض از مبدأ $= 0 \Rightarrow b = 0$
 \Rightarrow معادله خط $y = ax$

نکته : هر کدام از اطلاعات زیر بیانش شرط است (عرض از مبدأ)

- ۱) عرض از مبدأ را بدید $\Rightarrow b$
- ۲) محور عرض ها را در نقطه a بر عرض b قطع کند $\Rightarrow b$
- ۳) از نقطه $[b]$ بگذرد $\Rightarrow b$

نکته : اگر دو خط با هم موازی باشند در این صورت شیب ها آن یکسان است.
تذکره : دو خط موازی فقط عرض از مبدأ آن متفاوت است.

این دو خط موازی \Rightarrow $\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + b \end{cases}$

مثال : در هر یک از معادلات زیر، شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

۱	$y = 2x - 4$	$a = 2$ شیب	$b = -4$ عرض از مبدأ
۲	$y = \frac{2}{3}x$	$a = \frac{2}{3}$	$b = 0$
۳)	$y = -3x + 1$	$a = -3$	$b = 1$

مثال: معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱ باشد.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{شیب} = a = -2 \\ \text{عرض از مبدأ} = b = +1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -2x + 1$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که شیب آن $\frac{1}{2}$ و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{شیب} = a = \frac{1}{2} \\ \text{عرض از مبدأ} = b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

مثال: معادله خطی بنویسید که با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

معادله خطی را که می خواهیم بنویسیم با خط $y = 2x + 1$ موازی است پس هر دو خط دارای شیب یکسان هستند $a = 2$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b = 4 \end{array} \right\} y = 2x + 4$$

تکلیف: برابر نوشتن معادله خطی که شیب آن را داشته باشیم و هم چنین یک نقطه گذرنده از آن را نیز داشته باشیم:

ابتدا معادله خطی $y = ax + b$ می نویسیم چون شیب را داریم پس به جای a مقدار آن را جایگزین می کنیم. پس چون خط از نقطه داده شده می گذرد در معادله فضا به جای x و y محتمل است آن نقطه را قرار می دهیم و با حل یک معادله ساده b را بدست می آوریم.

مثال) معادله‌ی خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $[1, 2]$ بگذرد. صل

معادله خط $y = ax + b$

شیب $= 2 \Rightarrow a = 2$

$$\Rightarrow y = 2x + b \quad \begin{matrix} \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \end{matrix}$$

$$2 = 2(1) + b$$

$$2 = 2 + b$$

$$b = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 2x + 0 \Rightarrow y = 2x$$

مثال) معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۴ باشد و از نقطه $[-1, 3]$ بگذرد.

معادله خط $y = ax + b$

شیب $= 4 \Rightarrow a = 4$

$$\Rightarrow y = 4x + b \quad \begin{matrix} \left[\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \end{matrix}$$

$$3 = 4(-1) + b \Rightarrow$$

$$3 = -4 + b$$

$$\Rightarrow b = 7$$

$$\Rightarrow y = 4x + 7$$

مثال) معادله‌ی خطی بنویسید که شیب آن ۳- باشد و از نقطه $[2, -5]$ بگذرد.

معادله خط $y = ax + b$

شیب $= -3 \Rightarrow a = -3$

$$y = -3x + b \quad \begin{matrix} \left[\begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \end{matrix}$$

$$-5 = -3(2) + b \Rightarrow$$

$$-5 = -6 + b \Rightarrow$$

$$b = -5 + 6 = +1$$

$$\Rightarrow y = -3x + 1$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد و از نقطه $[1, 3]$ بگذرد.

معادله خط $y = ax + b$

شیب $a = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x + b \quad \begin{matrix} \left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \end{matrix}$$

$$3 = \frac{1}{2}(1) + b \Rightarrow 3 - \frac{1}{2} = b$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = b$$

معادله خط بنویسید که با خط $y = -x + 3$ موازی باشد و از نقطه $(-1, -4)$ بگذرد.

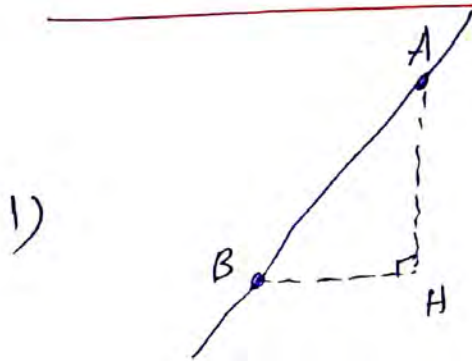
موازی است $\Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -x + 3$

$y = ax + b \Rightarrow y = -1x + b$ $\begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ [-4] \end{matrix}$

$-4 = -1(-1) + b$

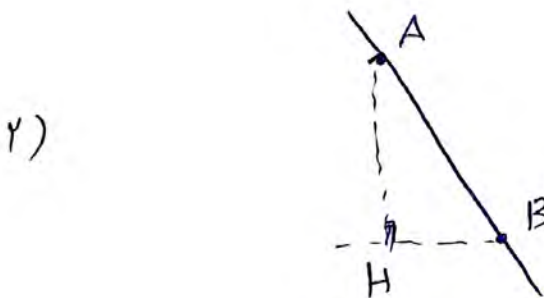
$-4 = +1 + b \Rightarrow b = -4 - 1 = -5$

$y = -x - 5$



مفهوم شیب: $\text{شیب خط } AB = \frac{\text{مقابل } AH}{\text{مجاور } BH}$

شیب خط AB مثبت است.



$\text{شیب خط } AB = - \frac{\text{مقابل } AH}{\text{مجاور } BH}$

در این حالت شیب خط AB منفی است.

روگر رسم خط به کمک مثلث قائم الزاویه:
۱. ابتدا عرض از مبدأ یا ط را بر روی محور وها (عرضها) مشخص کنیم خط از این نقطه می‌گذرد

۲. به کمک شیب خط نقطه دیگر از خط بدست می‌آوریم.
دقت کنید در این روش شما باید شیب را به صورت کسر بنویسیم
اگر شیب یک عدد صحیح باشد باید به آن مخارج = بدیم

از نقطه عرض از مبدأ یک مثلث قائم الزاویه رسم کنیم. با این کار نقطه دیگر از خط

بدست می‌آید. \Rightarrow شیب + (الف)

۳. این دو نقطه را به هم وصل کنیم. \Rightarrow شیب - (ب)

ص ۱۳

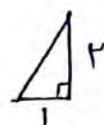
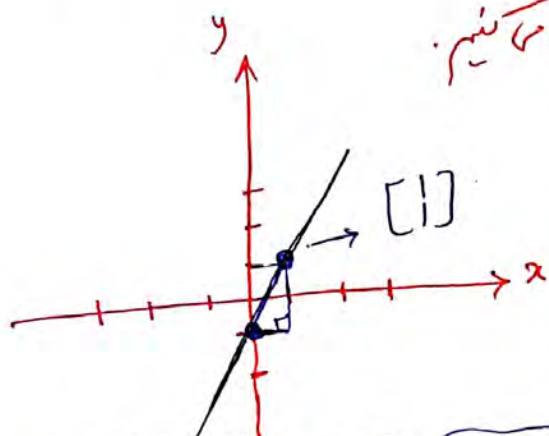
مثال: خط $y = 2x - 1$ را به روش مثلث قائم الزاویه (مفهوم شیب) رسم کنید.

$$y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

شیب = ۲ و عرض از مبدأ برابر ۱- است.

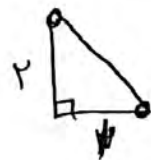
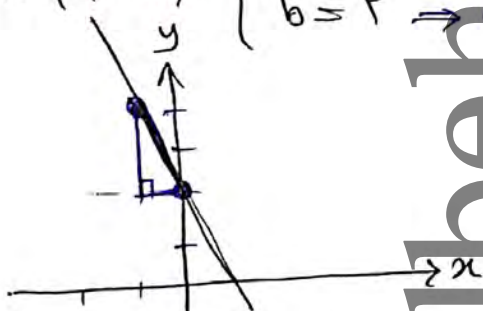
انتخابی مرسوم محور عرض ها نقطه ۱- را مشخص می کنیم.

$$a = \text{شیب} = 2 = \frac{2}{1} \text{ مقابل مجاور}$$



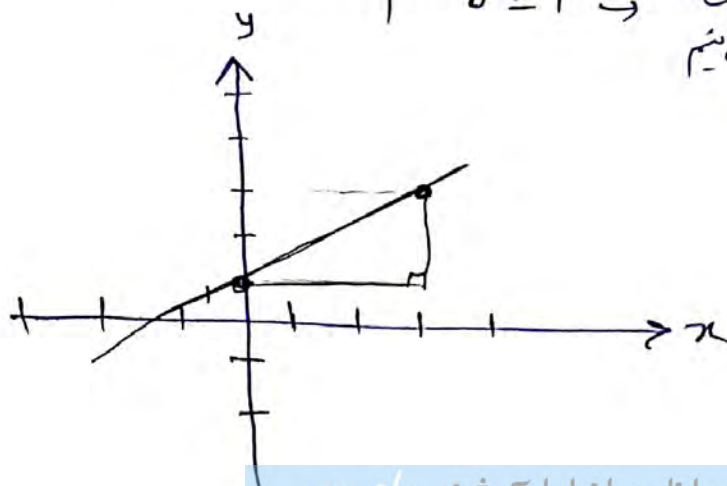
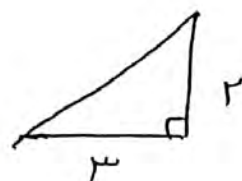
مثال: خط $y = -2x + 2$ را به روش مثلث قائم الزاویه رسم کنید. شیب منفی است

$$y = -2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{1} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \\ \text{روى محور عرض ها مشخص می کنیم} \end{cases}$$



مثال: خط $y = \frac{2}{3}x + 1$ را به روش مثلث قائم الزاویه رسم کنید.

$$y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \\ \text{روى محور عرض ها مشخص می کنیم} \end{cases}$$

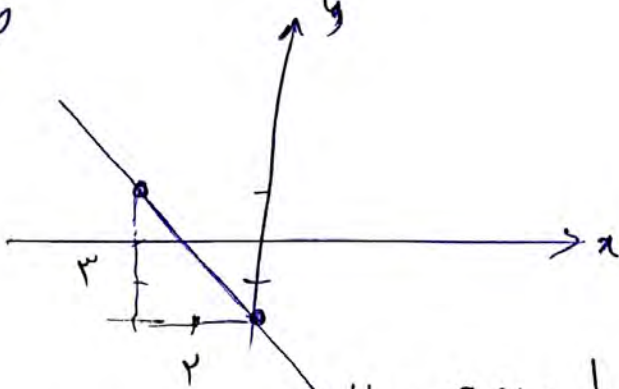


۱۴

سؤال: معادله خط زیر را بنویسید.

عرض از مبدأ $b = -2$

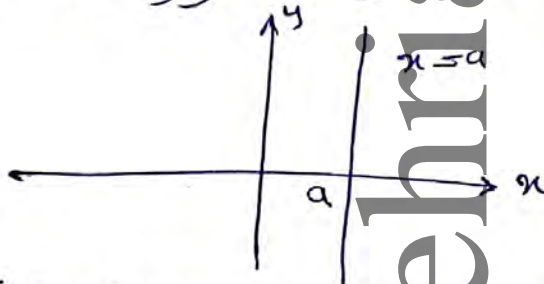
$$\text{شیب} = -\frac{3}{2} = a$$



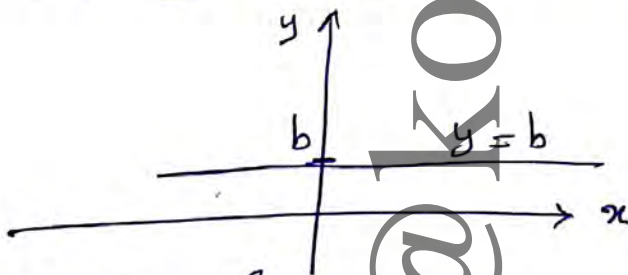
$$y = ax + b \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - 2$$

دو خط خاص

۱ خط $x = a$ خطی موازی با محور y ها و عمود بر محور x ها است تمام نقاط روی این دارای طول a هستند و شیب این خط تعریف نشده است.



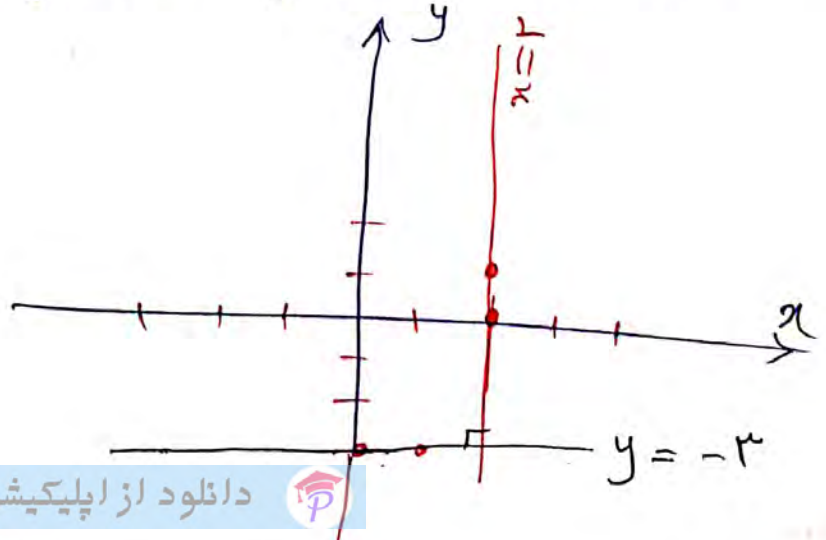
۲ خط $y = b$ خطی موازی با محور x ها و عمود بر محور y ها است تمام نقاط روی این خط دارای عرض b هستند و شیب این خط صفر است.



سؤال: دو خط $x = 2$ و $y = -3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید.

$x = 2$

x	2	2
y	0	1
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



x	0	1
y	-3	-3
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

دانلود از اپلیکیشن پادرساز

نکته مهم: صورت کسر معادلات خطی به صورت $ax + by = c$ است.

تذکره: اگر $c = 0$ باشد در این صورت خط از مبدأ مختصات عبور می کند.

مثال: با توجه به معادله های داده شده، مقادیر a و b و c را بیابید.

الف) $-3x + 2y = 2$ $a = -3$ و $b = 2$ و $c = 2$

ب) $y = 2x + 1 \Rightarrow -2x + y = 1$ $a = -2$
 $b = +1$
 $c = 1$

ج) $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$

د) $y = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

نکته: اگر یک خط به صورت کسر داده شود و بنویسیم $y = mx + c$ و عرض از مبدأ را c و m را شیب می گویند. ابتدا جدولی شامل x و y را یک طرف و بقیه عبارت را طرف دیگر منتقل می کنیم اگر جدول y ضریب راست طرفین را به ضریب y تقسیم کنیم تا ضریب y یک شود. سپس ضریب $x =$ شیب عدد ثابت = عرض از مبدأ

مثال: شیب و عرض از مبدأ خطهای داده شده را بیابید.

۱) $2y - 4x = 8 \Rightarrow 2y = 4x + 8 \xrightarrow{\div 2} \frac{2y}{2} = \frac{4}{2}x + \frac{8}{2}$
 $\Rightarrow y = 2x + 4$ شیب = $+2$ عرض از مبدأ = $+4$

۲) $3x - 2y = 6 \Rightarrow -2y = -3x + 6 \xrightarrow{\div -2} \frac{-2y}{-2} = \frac{-3x}{-2} + \frac{6}{-2}$
 $\Rightarrow y = +\frac{3}{2}x - 3$ شیب = $+\frac{3}{2}$

ص ۱۶

$$3) \quad x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 3y = -x + 9 \xrightarrow{\div 3} \frac{3y}{3} = \frac{-x}{3} + \frac{9}{3}$$

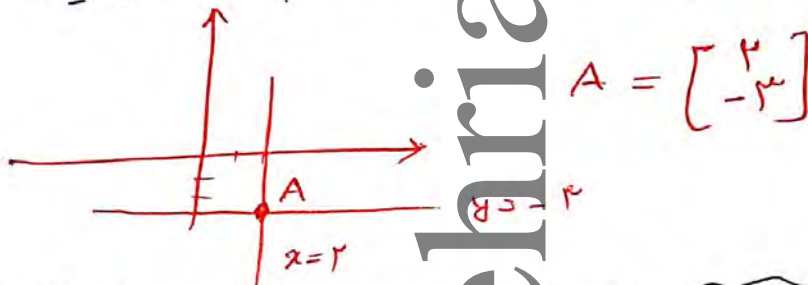
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{3}$$

عرض از مبدأ = +3

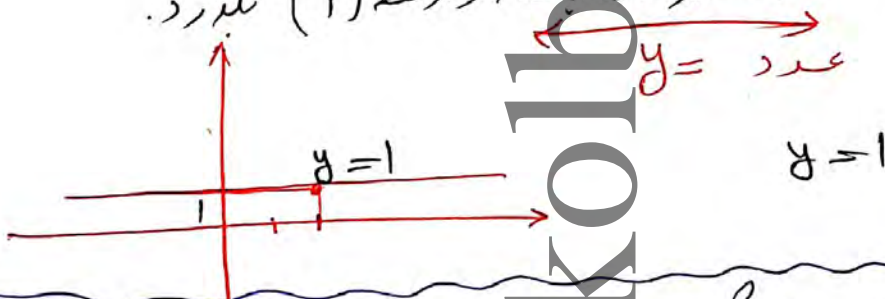
$$4) \quad 3y = 9x - 10 \xrightarrow{\div 3} \frac{3y}{3} = \frac{9x}{3} - \frac{10}{3} \Rightarrow y = 3x - \frac{10}{3}$$

شیب = 3 و عرض از مبدأ = $-\frac{10}{3}$

مسئله: از برخورد دو خط $y = -3$ و $x = 2$ کدام نقطه به دست می آید؟

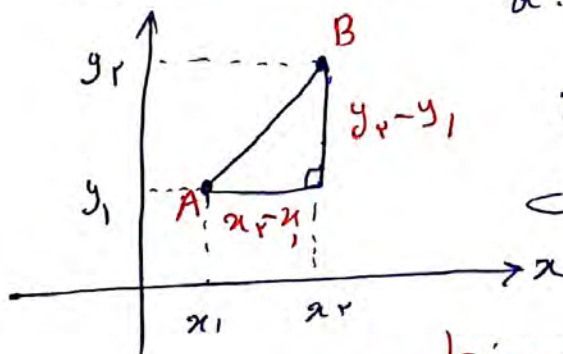


مسئله: معادله خطی بنویسید که موازی محور x باشد و از نقطه $(1, 2)$ بگذرد.



نکته مهم: نوشتن معادله خط از دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و A و B

ابتدا شیب خط را از فرمول زیر به دست می آوریم.



برای به دست آوردن b عرض از مبدأ کافی است یکی از دو نقطه را در معادله قرار دهیم تا b به دست آید.

$$a = \text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مسئله ۱۲

مثال ۱: معادله خطی بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = ax + b$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

$$\text{شیب خط} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{3 - 1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}}$$

$$2 = -\frac{1}{2}(1) + b \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} + b$$

$$\Rightarrow b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

مثال ۲: معادله خطی بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

$$\text{شیب خط} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 2}{4 - 3} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = -3x + b$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}}$$

$$2 = -3(3) + b$$

$$2 = -9 + b \Rightarrow b = 2 + 9 = 11$$

$$y = -3x + 11$$

مثال ۳: معادله خطی بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

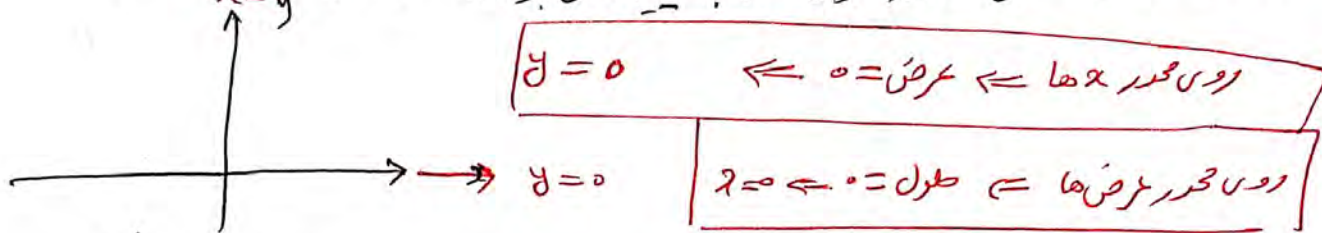
$$\text{شیب خط} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 0}{-4 - 2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + b$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}}$$

$$0 = \frac{1}{2}(2) + b \Rightarrow 0 = 1 + b \Rightarrow b = -1$$

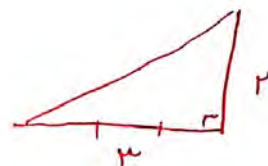
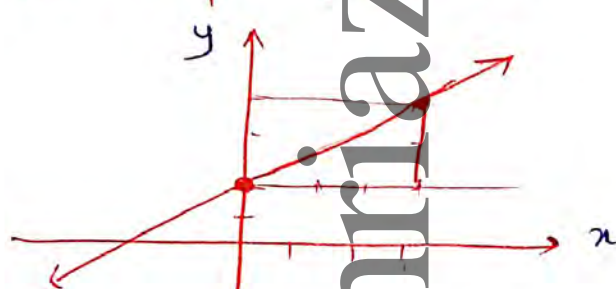
مقادیر محور طول و عرض را بنویسید محل برخورد آن‌ها چه نقطه‌ای است؟



مثال) شیب و عرض از مبدأ خطوط زیر را پیدا کردن و پس آن خط‌ها را رسم کنید.

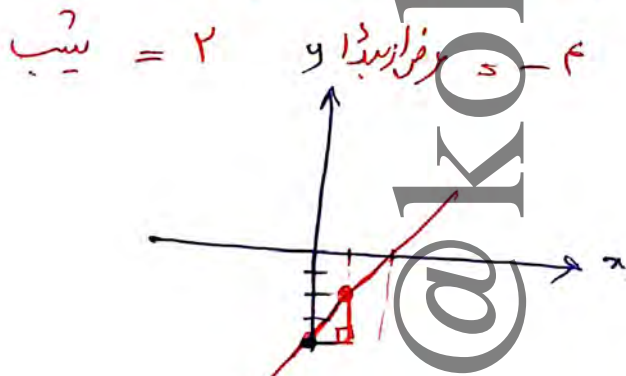
۱) $3y - 2x = 7 \Rightarrow 3y = 2x + 7 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

شیب = $\frac{2}{3}$ عرض از مبدأ = $\frac{7}{3}$



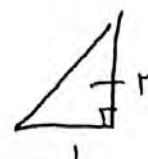
۲) $4x - 2y = 8 \Rightarrow -2y = -4x + 8 \xrightarrow{\div -2} y = 2x - 4$

شیب = 2 عرض از مبدأ = -4



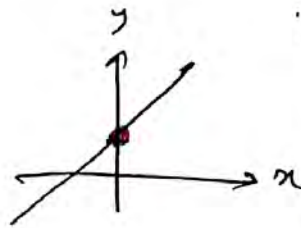
۳) $2x - y = 3 \Rightarrow -y = -2x + 3 \xrightarrow{\div -1} y = 2x - 3$

شیب = 2 عرض از مبدأ = -3

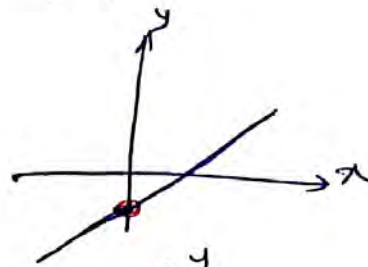


مثال ۲ خط $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالات های زیر خط را به صورت کسفی رسم کنید.

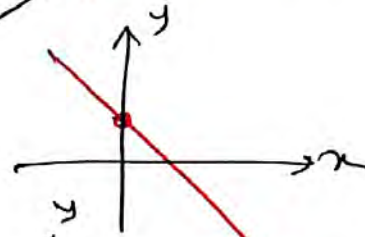
① $a > 0 \rightarrow$ شیب $+$
 $b > 0 \rightarrow$ عرض از مبدأ $+$



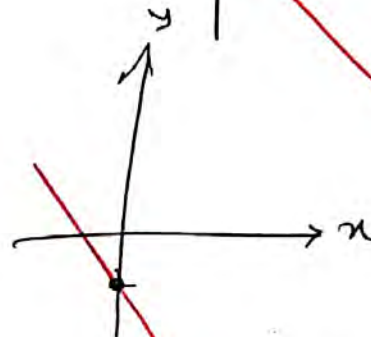
② $a > 0 \rightarrow$ شیب $+$
 $b < 0 \rightarrow$ عرض از مبدأ $-$



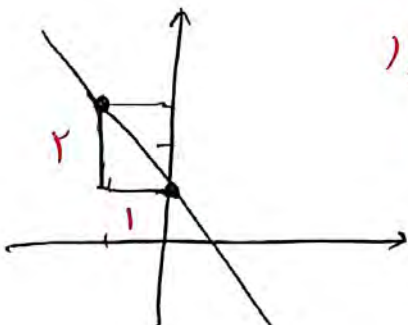
③ $a < 0 \rightarrow$ شیب $-$
 $b > 0 \rightarrow$ عرض از مبدأ $+$



④ $a < 0 \rightarrow$ شیب $-$
 $b < 0 \rightarrow$ عرض از مبدأ $-$



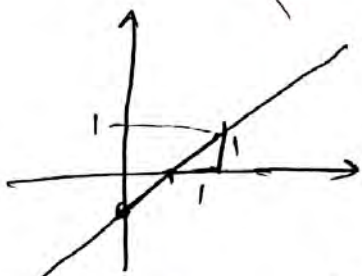
مثال: معادله خط های زیر را بنویسید.



عرض از مبدأ $= +1 = b$

شیب $= -\frac{2}{1} = -2 = a$

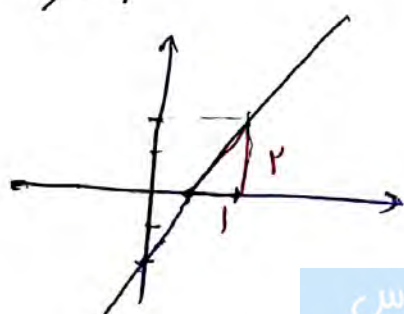
$y = ax + b \Rightarrow y = -2x + 1$



عرض از مبدأ $= -1 = b$

شیب $= +\frac{1}{1} = 1 = a$

$y = ax + b$
 $\Rightarrow y = 1x - 1$



عرض از مبدأ $= -2 = b$

شیب $= +\frac{2}{1} = 2 = a$

$y = ax + b$
 $\Rightarrow y = 2x - 2$

مثال: معادله خط بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $[-1]$ بگذرد.

ابتدا شیب این خط را بدست می آوریم چون موازی هستند پس شیب خط را که می خواهیم بنویسیم با این شیب یکی است.

$$2y - 4x = 5 \Rightarrow 2y = 4x + 5 \xrightarrow{\div 2} y = 2x + \frac{5}{2}$$

فرم کلی $a = \text{شیب} = 2$

معادله خط خواسته شده را بنویسیم

$$y = ax + b$$

$$\xrightarrow{a=2} y = 2x + b \xrightarrow{\begin{matrix} [1] \rightarrow x \\ [-1] \rightarrow y \end{matrix}} -1 = 2(1) + b \Rightarrow -1 = 2 + b \Rightarrow b = -1 - 2 = -3$$

$$y = 2x - 3$$

مثال: معادله a را بخوان باید که نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی خط $ax + 2y - 2 = 0$ باشد و پس شیب و عرض از مبدأ این خط را نیز بدست آورید.

$$\xrightarrow{\begin{matrix} [3] \rightarrow x \\ [-2] \rightarrow y \end{matrix}} a(3) + 2(-2) - 2 = 0 \Rightarrow 3a - 4 - 2 = 0 \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{3} = 2$$

معادله $a = 2$ را در معادله خط قرار دهیم و وقت می کنیم فرم کلی خط است.

$$2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = -2x + 2 \xrightarrow{\div 2} y = -1x + 1$$

$$a = -1 = \text{شیب}$$

$$b = +1 = \text{عرض از مبدأ}$$

۲۱

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی در دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول

به عنوان مثال $\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x+3y=4 \end{cases}$ ۲ معادله ۲ مجهول

هدف از این درس حل این دستگاه معادله‌های خطی است. منظور از حل پیدا کردن x و y به طوری که در هر دو معادله صدق کند.

روش‌های حل دستگاه معادله‌های خطی که در این درس بررسی می‌شوند عبارتند از:

- ۱- روش ترسی (روش هندسی)
- ۲- روش جابجایی
- ۳- روش حذفی

۱- روش ترسی: در این روش ابتدا دو خط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و پس یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا می‌آوریم.

این روش زیاده‌استفاذه می‌شود چون برای از خطوط به راحتی رسم نمی‌شوند و ممکن است جواب‌ها x یا به صورت کسری یا اعداد گویا نباشند. پس این روش محدودیت دارد.

مثال: معادله‌های خطی $y = 2x - 1$ و $y = -x + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و یک جواب مشترک برای آن‌ها بیابید.

$y = 2x - 1$

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

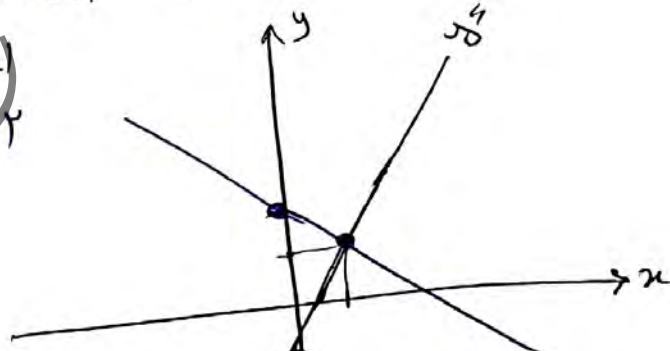
x	0	1
y	-1	1

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$y = -x + 2$

x	0	1
y	2	1

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$



حل برقرار دو خط جواب می‌باشد

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

ص ۲۲

مثال) با رسم خط‌های زیر دستگاه معادلات خطی را حل کنید.

$$① \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x - 1 = y \leq y = x - 1$$

$$\rightarrow y = -x + 3$$

$$y = x - 1$$

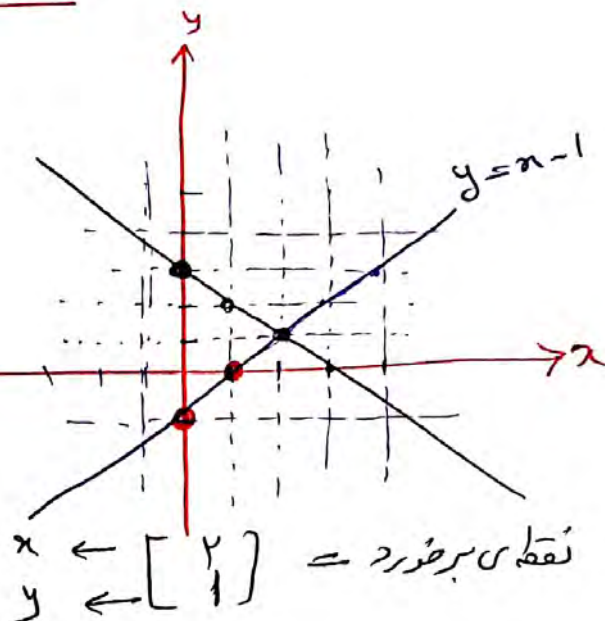
x	0	1
y	-1	0

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = -x + 3$$

x	0	1
y	3	2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$② \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x - 3 = y$$

$$\rightarrow 2y = -x + 3 \xrightarrow{\div 2} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = 2x - 3$$

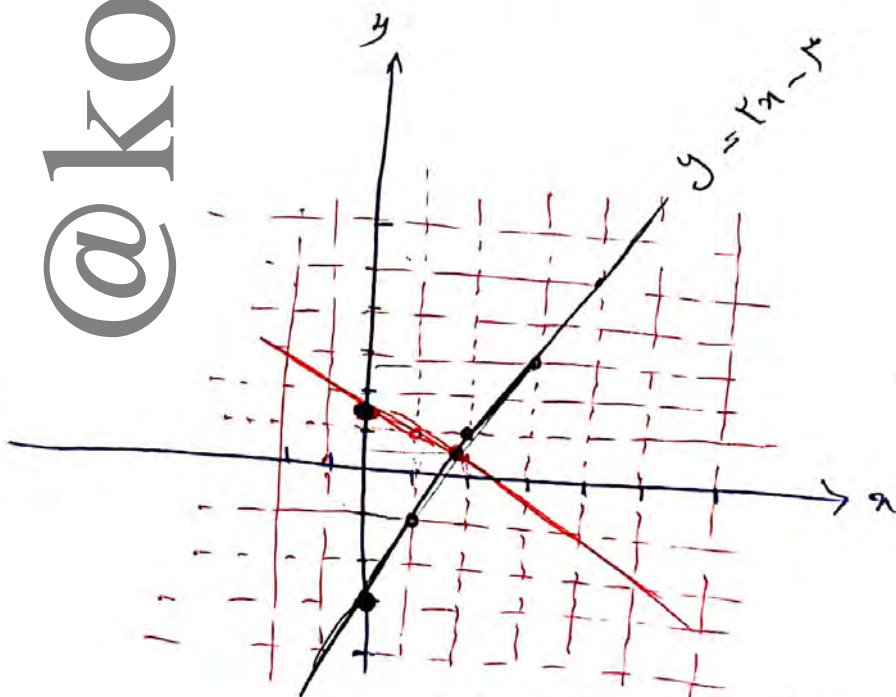
x	0	1
y	-3	-1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

x	0	1
y	$\frac{3}{2}$	1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



در این قسمت حل به روش گرافیک می‌کنیم

$$-\frac{1}{2}(1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$x = \frac{9}{5} \leftarrow \text{اینه از روش گرافیک}$$

$$y = \frac{4}{5} \leftarrow \text{حذفی حل کردم}$$

۲۳

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

نکته مهم در روش گسسته:

حالت اول) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ ~~این دو خط متقاطع اند~~ ~~یک جواب مشترک دارند.~~ ~~رستگاه دارای یک جواب است.~~

حالت دوم) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ~~این دو خط موازی اند~~ ~~رستگاه جواب ندارد~~

حالت سوم) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ~~این دو خط بر هم منطبق اند~~ ~~رستگاه بی شمار جواب دارد~~

مثال: رستگاه معادلات خطی زیر چند جواب دارد؟

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

این دو خط بر هم منطبق اند \Leftarrow رستگاه بی شمار جواب دارد.

مثال: رستگاه معادلات خطی زیر چند جواب دارد؟

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{7}$$

این دو خط موازی اند \Leftarrow رستگاه جواب ندارد.

مثال: رستگاه معادلات خطی زیر چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{-7}$$

این دو خط متقاطع اند \Leftarrow رستگاه دارای یک جواب است.

۲۴

۲ روش جایگزینی: در این روش یک از متغیرها را به حسب متغیر دیگر بدست می آوریم پس آن را در معادله دیگر قرار می دهیم (جایگزینی) تا به یک معادله یک مجهول برسیم آن را حل می کنیم و پس با جایگزین کردن در معادله متغیر دیگر نیز بدست می آید.

مثال: دستگاه معادله ها حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

در معادله پایین y را به حسب x است پس مقدار آن را در معادله بالایی قرار می دهیم

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \Rightarrow 2x - x + 2 = 5$$

$$\Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 5 - 2 = 3$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \xrightarrow{x=3} y = \frac{1}{3}(3) - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow x = 3y + 7$ (از معادله اول به حسب y)

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases}$$

$$2x - 7y = 15 \Rightarrow 2(3y + 7) - 7y = 15 \Rightarrow$$

$$4y + 14 - 7y = 15 \Rightarrow -3y = 15 - 14 \Rightarrow -3y = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$$x = 3y + 7 \Rightarrow x = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 7 = -1 + 7 = 6$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

دانلود از اپلیکیشن یادپایس



۲۵

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \Rightarrow 3x - 4 = y \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$$

جایگزینی

$$2x + \frac{1}{3}y = 8 \Rightarrow 2x + \frac{1}{3}(3x - 4) = 8$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{1}{3} \times 3x + \frac{1}{3}(-4) = 8 \Rightarrow 2x + x - \frac{4}{3} = 8$$

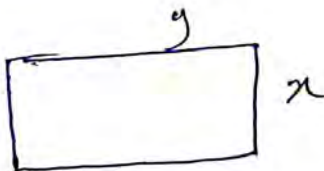
$$\Rightarrow 3x - \frac{4}{3} = 8 \Rightarrow 3x = 8 + \frac{4}{3} = \frac{28}{3} \Rightarrow x = \frac{28}{9}$$

$$y = 3x - 4 \Rightarrow y = 3\left(\frac{28}{9}\right) - 4 = \frac{28}{3} - 4 = \frac{16}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{28}{9} \\ y = \frac{16}{3} \end{cases}$$

سوال: برای سال زیر یک رستگاه بنویسید و آن را حل کنید.

طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.



$$\text{عرض مستطیل} = x$$

$$\text{طول مستطیل} = y$$

$$\text{طول} = 2x - 3 \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$12 = \text{عرض} + \text{طول} \Rightarrow 12 = x + (2x - 3) \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow x + y = 12$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

جایگزینی

$$x + (2x - 3) = 12 \Rightarrow 3x - 3 = 12 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow y = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$$

۳- روش حذف و در این روش x یا y را حذف می‌کنیم تا به یک معادله یک مجهول برسیم.

برای اینکه x یا y را حذف کنیم باید ضریب x در معادله بالا را با ضریب y هم باشند تا هنگام جمع کردن این دو معادله با هم حذف شوند.

برای اینکه ضریب x در معادله بالا را با ضریب y هم شوند باید در صورت نیاز یکی یا هر دو معادله را در عددی ضرب کنیم. مثلاً اگر در معادله بالا ضریب x برابر ۲ و در معادله پایین ضریب

ضریب x برابر ۳ باشد باید ~~معادله بالا را در ۳~~ معادله بالا را در ۳ و معادله پایین را در ۲ - ضرب کنیم تا ضریب x در معادلات ۶ و ۶ شود تا هنگام جمع کردن با هم فسخ شوند.

تذکره: اگر در معادله اول ضریب y یک و در معادله دوم ضریب y ۳ باشد فقط کافی است معادله اول را در ۳ - ضرب کنیم و معادله دوم نیازی به ضرب کردن عدد ندارد.

تذکره: اگر ضریب یکی از معادلات کسر بود بهتر است ابتدا از حالت کسر خارج کنیم و پس آن را حل کنیم.

این روش را با یکی مثال شروع می‌کنیم.
فرض کنیم معادله y را حذف کنیم.

$$2x \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 10 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x}{7} = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$$

اکنون در یکی از معادلات به دگواه بجای $x = 2$ قرار می‌دهیم تا مقدار y بدست آید:
البته من در دو معادله قرار می‌دهم:

$$\xrightarrow{x=2} 3x - y = 5 \Rightarrow 3(2) - y = 5 \Rightarrow 6 - y = 5 \Rightarrow 6 - 5 = y \Rightarrow y = 1$$

$$\xrightarrow{x=2} x + 2y = 4 \Rightarrow 2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - 2 = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} = 1$$

دستگاه معادلات حفظی زیر را به روش حذف حل کنید.

(اقتضای آنرا در صورت سوال ذکر نکنید، می‌رود در استفاده کنید بهتر است از روش خودی استفاده کنید)

$$\xrightarrow{x=2} \quad x-y=3 \Rightarrow 2-y=3 \Rightarrow 2-3=y \Rightarrow y=-1$$

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1) \\ -1 \times \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + 2y = d_0 \\ 2x + 2y = 2d \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = d_0 \\ -2x - 2y = -2d \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= 1d \\ \longrightarrow r_x + r_y &= r_d \Rightarrow r(1d) + r_y = r_d \\ \longrightarrow r_0 + r_y &= r_d \Rightarrow r_y = r_d - r_0 = d \\ \longrightarrow r_y &= d \Rightarrow y = \frac{d}{r} \end{aligned}$$

21

$$f) \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -12 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$$

$$-1y = 1 \Rightarrow y = \frac{+1}{-1} = -1$$

$$\underline{y = -1} \rightarrow x - 3y = 7 \Rightarrow x - 3(-1) = 7 \Rightarrow$$

$$x + 3 = 7 \Rightarrow x = 7 - 3 = 4$$

$$d) \begin{cases} 2(x-y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x-y) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3y = 4 \\ 3x - 4x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$3y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{3} = 6$$

$$\underline{y = \frac{18}{3}} \rightarrow 2x + \frac{18}{3} = 4 \Rightarrow 2x = 4 - \frac{18}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$e) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{از طرف دوم}} \begin{cases} 3(x-1) - 2(y-1) = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 3 - 2y + 2 = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$5y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2$$

$$\underline{x = 2} \rightarrow x + y = 4 \Rightarrow 2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2$$

مثال: یک جواب برای x و y طورین تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$2^{2x-y-2} = 3^{x+y-1}$$

تذکره: دو عدد توان دار با پایه های نامساوی در صورتی با هم مساوی می شوند که توان آن ها برابر صفر باشد.

$$2^0 = 3^0 = 1$$

پس داریم:

$$2x - y - 2 = 0 \quad \text{و} \quad x + y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \\ \hline 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1 \end{array}$$

$$x = 1 \rightarrow x + y = 1 \Rightarrow 1 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0$$

مثال: معادله ی خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x - y = 1$ و $x + y = 1$ بگذرد و شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

$$x + y = 1 \Rightarrow 1 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0$$

پس $[0, 1]$ نقطه برخورد این دو خط است.

$$y = ax + b \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \quad y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$\begin{cases} [0, 1] \rightarrow x \\ [0, 1] \rightarrow y \end{cases} \quad 0 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{2}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

مثال: مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آن ها ۲۶ سال است. سن هر یک را بازنویس کنید.
سن علی = y سن پدر = x
رستگاه معادلات به دست آوریم.

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

$$2x = 96 \Rightarrow x = \frac{96}{2} = 48$$

$$x + y = 70$$

$$48 + y = 70$$

$$y = 70 - 48 = 22$$

مثال: در یک مزرعه، ۲۰ شتر مرغ و گاو وجود دارد. پاهای آن‌ها ۵۶ عدد است. ۳۰

داین مزرعه چند شتر مرغ و گاو وجود دارد؟ مقدار گاو = y

مقدار شتر مرغ = x

$$x + y = 20$$

مقدار پاهای شتر مرغ ها = $2x$

مقدار پاهای گاو = $4y$

$$2x + 4y = 56$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -80 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases}$$

$$-2x = -24 \Rightarrow x = \frac{-24}{-2} = +12$$

$$x + y = 20 \rightarrow 12 + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 12 = 8$$

(روش حذف)

سؤال: دستگاه معادله خطی زیر را از روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = -14 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$0 = -9$$

نتیجه: تناقض

معادله جواب ندارد.

روش تراز

$$2x - 3y = 7 \Rightarrow -3y = -2x + 7 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$4x - 6y = 5 \Rightarrow -6y = -4x + 5 \xrightarrow{\div -6} y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

این دو خط با هم موازی نیستند پس هیچ نقطه اشتراکی ندارند. دستگاه جواب ندارد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{7}{5}$$

پس دو خط دارای شیب یکسان هستند که موازی نیستند.