

نام و نام خانوادگی:

مقطع و رشته: یازدهم ریاضی

نام پدر:

شماره داوطلب:

تعداد صفحه سؤال: ۴ صفحه

جمهوری اسلامی ایران

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۴ تهران

دبیرستان غیردولتی دخترانه متوسطه دوم سرای دانش واحد رسالت

آزمون پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: هندسه (۲)

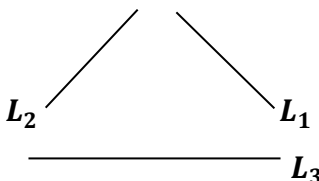
نام دبیر: مرجان یغمایی

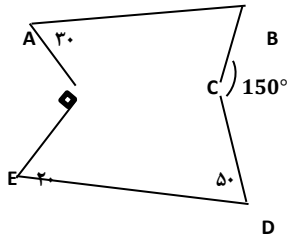
تاریخ امتحان: ۱۸ / ۰۳ / ۱۳۹۸

ساعت امتحان: ۰۸ : ۰۰ صبح / عصر

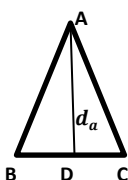
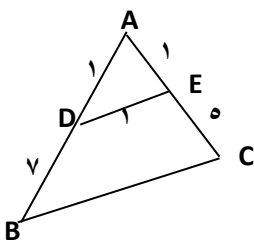
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
۱.۲۵	۱	سؤالات	۱.۲۵	۱
۱.۲۵	۲	در شکل مقابل، AC در نقطه A بر دایره مماس، AB=AC و $\widehat{BAD} = 30^\circ$. اندازه \widehat{DAC} را بدست آورید.	۱.۲۵	۲
۱.۲۵	۳	دو دایره به شعاع های ۱ و ۳ مماس خارج اند. فاصله ی نقطه تلاقی دو مماس مشترک خارجی آنها تا نقطه تماس دو دایره را بدست آورید.	۱.۲۵	۳
۱.۲۵	۴	ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع میکنند.	۱.۲۵	۴
۱.۲۵		اگر امتداد وتر های \widehat{AA} و \widehat{BB} از دایره یکدیگر را بیرون از دایره در نقطه M قطع کنند. ثابت کنید: $MA \times M\widehat{A} = MB \times M\widehat{B}$	۱.۲۵	

۱	ثابت کنید ترکیب دو انتقال ، یک انتقال است.	۵
۱	ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند.	۶
۱.۵	مساله هرون (پیدا کردن کوتاهترین مسیر) را <u>بیان</u> و اثبات نمائید .	۷
۱	<p>مطابق شکل زیر ، سه خط L_1 و L_2 و L_3 در صفحه مفروض اند . پاره خطی به طول ۷ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی L_1 و L_2 بوده و موازی L_3 باشد. (مراحل رسم را توضیح دهید.)</p> 	۸

۱.۵	<p>زمینی به شکل زیر داریم . می خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند ، مساحتش را افزایش دهیم.</p> 	۹
۱	<p>درست یا نادرستی احکام زیر را بررسی نمائید و در صورت <u>نادرست بودن</u> ، مثال <u>نقض</u> بیاورید.</p> <p>الف) دوران جهت شکل را حفظ می کند.</p> <p>ب) تجانس مساحت شکل را حفظ می کند.</p> <p>ج) اگر در تجانس $0 < K < 1$ - باشد ، آنگاه تجانس تبدیلی طولپا است.</p>	۱۰
۲	<p>الف) قضیه کسینوس ها در حالتی که $0 < \hat{A} < 90^\circ$ باشد ، ثابت نمائید.</p> <p>ب) مثلث ABC ، $AB=2\sqrt{2}$ و $AC=\sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است . طول ضلع BC را بدست آورید.</p>	۱۱
۱	<p>در مثلثی به ضلع های ۴ و ۵ و ۶ نیمساز های داخلی و خارجی کوچکترین زاویه ی آن ، ضلع های مقابلش را به ترتیب در D و E قطع می کنند . اندازه DE را بدست آورید.</p>	۱۲

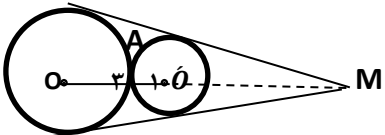
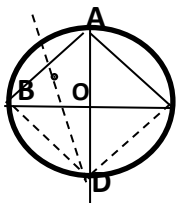
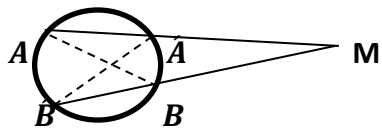
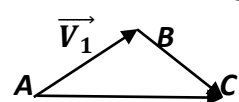


۱	<p>ثابت کنید در مثلث ΔABC، طول نیمساز زاویه \widehat{A} از رابطه زیر بدست می آید:</p> $d_a = \frac{2bc \cos \frac{\widehat{A}}{2}}{b+c}$ 	۱۳
۱.۵	<p>در شکل مقابل:</p> <p>الف) طول BC را بدست آورید.</p> <p>ب) مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.</p> 	۱۴
۱	<p>مساحت یک مثلث با اضلاعی به طول های ۱۳، ۱۴، ۱۵ را بیابید.</p>	۱۵
۱.۵	<p>اگر در مثلث ABC، m_1، m_2، m_3 اندازه های میانه باشند، مطلوب است:</p> <p>الف) ثابت کنید: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$</p> <p>ب) در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائده ۳ و ۴، مجموع مربعات میانه ها را بدست آورید.</p>	۱۶
صفحه ی ۴ از ۴		

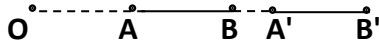


اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۴ تهران
 دبیرستان غیر دولتی دخترانه متوسطه دوره دوم سرای دانش واحد رسالت
کلید سؤالات پایان ترم نوبت دوم سال تمصیلی ۹۸-۹۷

نام درس: هندسه (۲)
 نام دبیر: مرجان یغمایی
 تاریخ امتحان: ۱۸/۰۳/۱۳۹۸
 ساعت امتحان: ۰۸:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	فرض می کنیم $\widehat{DAC} = x$ که زاویه ی ظلی است. پس کمان $\widehat{AD} = 2x$ و \widehat{B} زاویه ای محاطی است. بنابراین: $\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{2x}{2} = x$, $AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین } ABC} \widehat{C} = x$ $\Delta ABC : x + x + 30 + x = 180 \rightarrow 3x = 150 \rightarrow x = 50$	
۲	 $\frac{OM}{OM} = \frac{R}{R} \rightarrow \frac{4+OM}{OM} = \frac{3}{1} \Rightarrow 4 + OM = 3OM \rightarrow OM = 2$ $AM = AO + PM = 1 + 2 = 3$	
۳	فرض می کنیم نیمساز زاویه ی \widehat{BAC} و دایره ی محیطی را در نقطه D قطع می کند. لذا: $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \widehat{BD} = \widehat{DC} \xrightarrow{\text{کمان ها برابر وتر برابر می شود}} \overline{BD} = \overline{DC}$ و این بدان معناست که فاصله ی نقطه D از دو نقطه ی B و C به یک اندازه است. بنابراین طبق تعریف عمودمنصف نقطه ی D روی عمودمنصف پاره خط BC قرار دارد.	
۴	ابتدا وترهای \widehat{AB} و $\widehat{A'B'}$ را رسم می کنیم: $B\widehat{A}A' = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \begin{cases} B\widehat{A}M = A'\widehat{B}M \\ \widehat{M} = \widehat{M} \text{ مشترک} \end{cases}$ $B\widehat{B}A' = \frac{\widehat{A'B'}}{2}$ $\Delta MBA = \Delta M'A'B' \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'} \Rightarrow MA \times M'A' = MB \times M'B'$	
۵	بردارهای \vec{V}_1 و \vec{V}_2 را مطابق شکل در نظر می گیریم. تبدیل T_1 انتقال با بردار \vec{V}_1 و تبدیل T_2 انتقال با بردار \vec{V}_2 است. فرض می کنیم $T_1(A) = B$, $T_2(B) = C$. بنابراین $T_2(T_1(A)) = T_2(B) = C$. توجه داریم که $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{AC}$ پس $BC = \vec{V}_2$ و $AB = \vec{V}_1$ و $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ بردار $T_1 \circ T_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ است.	

تجانس به مرکز O و نسبت K را در نظر می گیریم. تصویر پاره خط AB در این تجانس را بدست می آوریم. ثابت می کنیم تصویر پاره خط AB با خود پاره خط AB موازی است. دو حالت اتفاق می افتد.

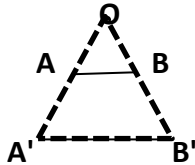


الف) O, A و B روی یک خط قرار دارند:

در این حالت اگر A' و B' متجانس های A و B باشند واضح است که A' و B' روی خط AB قرار دارند. در نتیجه دو خط AB و $A'B'$ روی یک خط قرار دارند، پس باهم موازی اند.

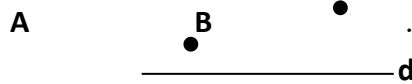
ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB باشد:

اگر A' و B' به ترتیب متجانس های A و B نسبت به O باشند لذا طبق تعریف تجانس $OA' = |K| OA$ و $OB' = |K| OB$ یعنی: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |K|$. پس طبق عکس قضیه تالس $AB \parallel A'B'$.

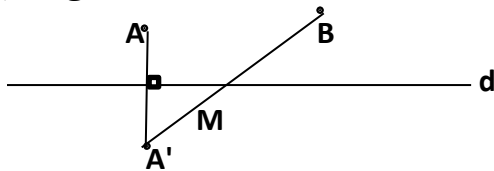


۶

مساله هرون: در شکل مقابل دو نقطه A و B در یک طرف خط قرار دارند. روی خط d نقطه ای پیدا کنید که مجموع فاصله آن ها از A و B کمتر از سایر نقطه های دیگر روی خط d است.



حل: بازتاب نقطه A نسبت به خط d را A' می نامیم. محل برخورد $A'B$ با محور بازتاب (d) را M می نامیم. ثابت می کنیم M جواب مسئله است.



نقطه M دلخواه دیگری مانند M_1 روی خط d انتخاب می کنیم.

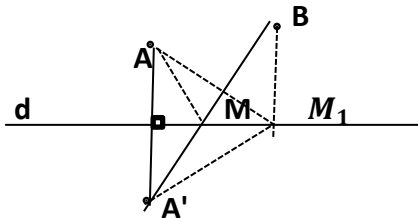
بنا به تعریف بازتاب، خط d عمود منصف AA' است، در نتیجه $MA = MA'$, $MA + MB < MA' + MB$ کافی است ثابت کنیم:

$$MA + MB < M_1A + M_1B$$

در مثلث $A'M_1B$ بنا بر نابرابری مثلثی داریم:

$$A'B < A'M_1 + M_1B \text{ یا } A'M + MB < A'M_1 + M_1B$$

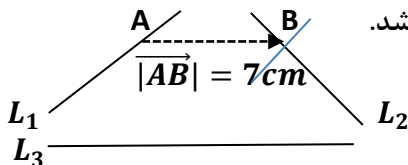
حال با توجه به مطالب مذکور داریم: $MA + MB < AM_1 + M_1B$



۷

با استفاده از تبدیل انتقال، خط L_1 را با یک بردار به اندازه 7 سانتی متر و موازی L_3 انتقال می دهیم تا خط L_2 را در نقطه B قطع کند. سپس این نقطه را با همین بردار در خلاف جهت انتقال می دهیم تا خط L_1 را در نقطه A قطع کند.

بنابراین با توجه به طولی بودن تبدیل انتقال، پاره خط AB جواب مسئله می باشد.



۸

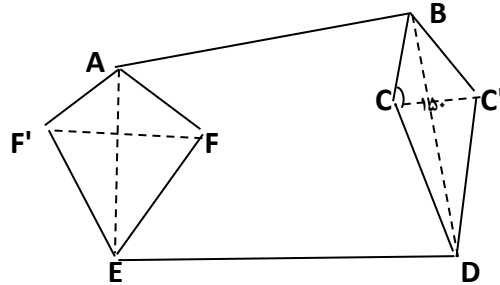
اگر بازتاب F نسبت به خط AE نقطه ی F' بنامیم و بازتاب C نسبت به خط AB نقطه ی C' بنامیم. آنگاه محیط چند ضلعی جدید ABC'DEF' با محیط چند ضلعی اولیه برابر است، زیرا AF=AF' و EF=EF' و BC=BC' و CD=DC'. پس اندازه ی حصارکشی زمین جدید با زمین قبلی فرقی ندارد، ولی مساحت زمین جدید به اندازه ی چهارضلعی های BCDC' و AFEF' افزایش یافته است:

$$S_{AFEF'} = 2S_{AEF} = 2 \left(\frac{1}{2} AF \times EF \right) = 30 \times 40 = 1200 m^2$$

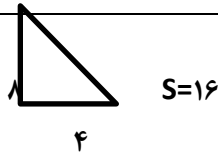
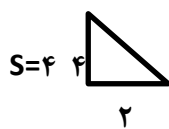
$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2 \left(\frac{1}{2} BC \times CD \sin 150^\circ \right) = 30 \times 50 \times \frac{1}{2} = 750 m^2$$

پس مساحت افزایش یافته برابر مجموع مساحت های به دست آمده ی اخیر است:

$$\text{مساحت افزایش یافته} = 1200 + 750 = 1950 m^2$$



۹

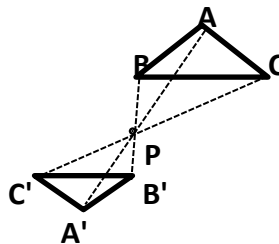


الف (درست)
ب (نادرست)

$$K = \frac{-1}{3}$$

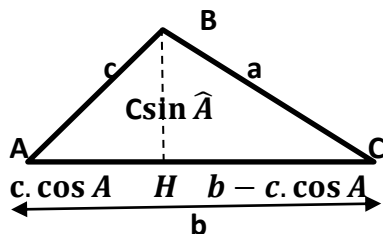
پ (نادرست)

۱۰



الف (فرض می کنیم در مثلث ABC زاویه A حاده باشد.

$$AB=c, AC=b, BC=a$$



ارتفاع BH را رسم می کنیم. در این صورت با استفاده از رابطه های مثلثاتی می توانیم طول پاره خط های ایجاد شده را بدست آوریم.

$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c \cdot \sin \hat{A}$$

$$CH = AC - AH = b - AH = b - c \cdot \cos \hat{A}$$

حال اگر قضیه فیثاغورس را در مثلث قائم الزاویه ΔBHC به کار ببریم:

$$a^2 = BH^2 + HC^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 (\sin A)^2 + b^2 - 2bc \cos A +$$

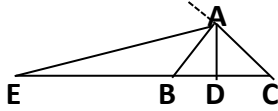
$$c^2 (\cos A)^2 = c^2 ((\sin A)^2 + (\cos A)^2) + b^2 - 2bc \cos A = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

(ب)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 60^\circ = 8 + 6 + 2 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

۱۱

فرض می کنیم $BC=4$ و $AB=5$ و $AC=6$ و AD نیمساز زاویه ی داخلی A و AE نیمساز زاویه ی خارجی A باشد.



$$\text{داخلی نیمساز } AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{5}{5+6} \rightarrow BD = \frac{20}{11}$$

$$\text{خارجی نیمساز } AE = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{EB}{EB-EB} = \frac{5}{6-5} \rightarrow EB = 20$$

$$DE = BD + EB = \frac{20}{11} + 20 = \frac{240}{11}$$

۱۲

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A = \frac{1}{2} c \times d_a \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \times b \times d_a \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow bc \sin A = d_a \times \sin \frac{A}{2} (c + b)$$

حالا با کمک اتحاد مثلثاتی $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ داریم :

$$2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = d_a \times \sin \frac{A}{2} (b + c) \rightarrow 2bc \cos \frac{A}{2} = d_a (b + c) \rightarrow d_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

۱۳

با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\widehat{DAE} = 60^\circ$ در نتیجه :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$

۱۴

بنا بر رابطه هرون برای محاسبه مساحت یک مثلث با اضلاع a, b, c و محیط $2P$ داریم :

$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \Rightarrow S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 4^2} = 84$$

۱۵

الف) طبق قضیه میانه ها :

$$\left. \begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ a^2 + c^2 &= 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 &= 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2(b^2 + c^2 + a^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \rightarrow \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(25 + 25) = \frac{75}{2}$$

ب)

طبق الف :

۱۶

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح : مرجان یغمایی

جمع بارم : ۲۰ نمره