مثلثات

ابتدا یک یادآوری کوتاه از فصل مثلثات داشته باشیم.

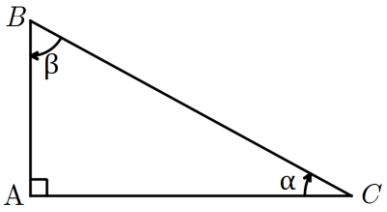
در هر مثلث قائم الزاویه برای زاویه حاده α داریم:

$$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$



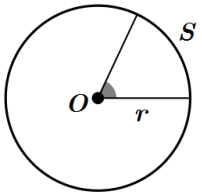
و همواره داریم: $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ و $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

زوایای مهم مثلثاتی:

x	۳۰	۴۵	۶۰
$\sin x$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan x$		۱	$\sqrt{۳}$
$\cot x$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

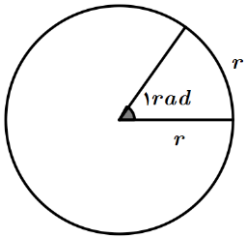
دایره مثلثاتی: در دایره مثلثاتی شعاع ۱ واحد است

قبلا برای اندازه گیری زاویه با واحد درجه آشنا شدیم. یکی دیگر از واحد های اندازه گیری زاویه ، رادیان نام دارد. برای اندازه‌گیری زاویه مرکزی O بر حسب رادیان کافی است طول کمان روبه‌رو به آن زاویه را به طول شعاع دایره تقسیم کنیم:



$$\theta(\text{rad}) = \frac{S}{r}$$

با توجه به تعریف رادیان نتیجه می‌گیریم که یک رادیان اندازه زاویه ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با طول شعاع در هر دایره دلخواه است.



$$۱\text{rad} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi\,\text{rad}} = \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} \simeq ۵۷^\circ$$

تبدیل نسبت های مهم در دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{۲}\text{rad} = ۹۰^\circ \qquad \frac{\pi}{۳}\text{rad} = ۶۰^\circ \qquad \frac{\pi}{۴}\text{rad} = ۴۵^\circ \qquad \frac{\pi}{۶}\text{rad} = ۳۰^\circ$$

توابع مثلثاتی متناوب

تابع f را **متناوب** گوییم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر x از دامنه داشته باشیم: $f(x+T) = f(x)$

کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دوره تناوب** f مینامیم.

◆دوره تناوب توابع به صورت : $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ برابر با :

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

◆مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع بالا از رابطه های روبرو به دست می آید: $max=|a|+c \quad , \quad min=-|a|+c$

◆ اگر توان فرد باشد باید نکات بالا را بکاربرد اما اگر توان فرد نباشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y=a\sin^{۲k}(bx+c) \\ y=a\cos^{۲k}(bx+c) \end{array}\right\} \rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

راه فوق یک راه حل تستی است. در مثال ها مسائل تشریحی با توان ۲ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

توان های بیشتر از ۲ در سوالات نهایی مورد ارزیابی قرار نمیگیرند.

◆در توابع مثلثاتی فاصله بین دو ماکزیمم متوالی یا فاصله بین دو مینیمم متوالی نشان دهنده دوره تناوب است. در واقع اگر یک دوره تناوب را به ۴ قسمت تقسیم کنید هر قسمت $\frac{T}{۴}$ است. (در تست ها خیلی مفید است)

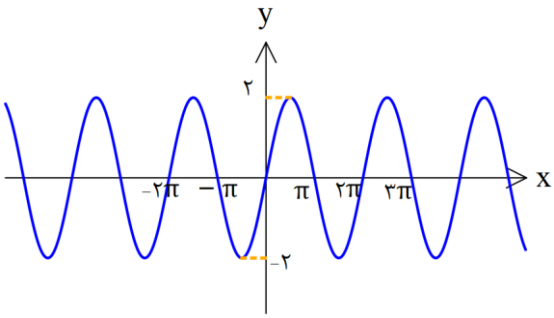
📖 **مثال:** دوره تناوب تابع $f(x)=۲\sin ۳x$ و $g(x)=\sin^{۲} ۴x$ را بیابید.

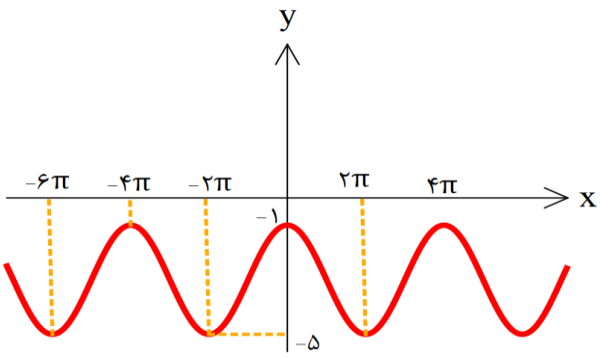
📖 **مثال:** دوره تناوب تابع های زیر را بیابید.

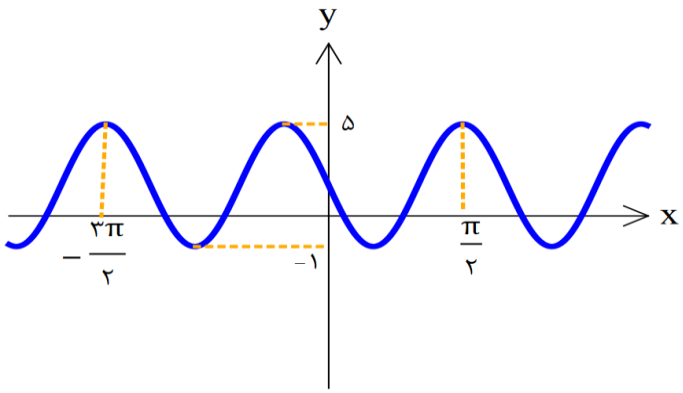
الف) $y=۲\sin(\frac{۲}{۷}x)+۱$

ب) $y=\cos^{۲} ۲x$

مثال: در شکل های زیر مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب را بیابید.





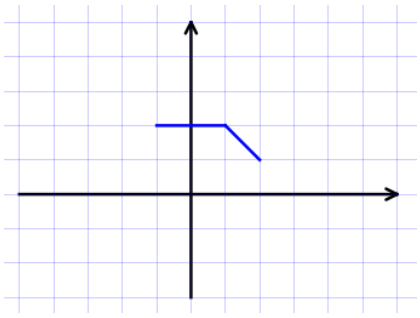


مثال: دوره تناوب هریک از توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $y = ۵ + ۲\cos\frac{\pi}{۴}x$

ب) $y = ۳\sin(\frac{-۱}{۲}x + ۴) - ۱$

📖 **مثال:** شکل زیر را طوری کامل کنید که دوره تناوب ۳ باشد.



📖 **مثال:** نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=۳\sin x$ را در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید.

📖 **مثال:** دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم توابع $y=\sin\frac{\pi}{۸}x$ و $y=۲+\cos ۳x$ را به دست آورید.

📖 **مثال:** تابع مثلثاتی با دوره تناوب $T=۲$ و مقادیر ماکزیمم $max=۸$ و مینیمم $min=۳$ بنویسید.

📖 **مثال:** دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=۴\sin(-۲\pi x)+۱$

ب) $y=۱+۲\cos ۴x$

📖 **مثال:** دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۲-۳\sin ۴x$ را به دست آورید.

دی۹۷

📖 **مثال:** مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۱-۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را به دست آورید. خرداد۹۸

📖 **مثال:** یک تابع مثلثاتی با دوره تناوب $T=\pi$ و مقادیر ماکزیمم $max=-۱$ و مینیمم $min=-۵$ رسم کنید و سپس ضابطه آن را بیابید.

📖 **مثال:** دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بنویسید.

الف) $y=\pi\cos ۳x-\pi$

ب) $y=\frac{۲}{۳}\sin ۴\pi x+۳$

📖 **مثال:** دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۲\cos(۳\pi x)-۱$ را بدست آورید. تیر۹۸

📖 **مثال:** دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=-۳\cos(۲\pi x)+۱$ را بدست آورید. شهریور۹۸

📖 **مثال:** دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

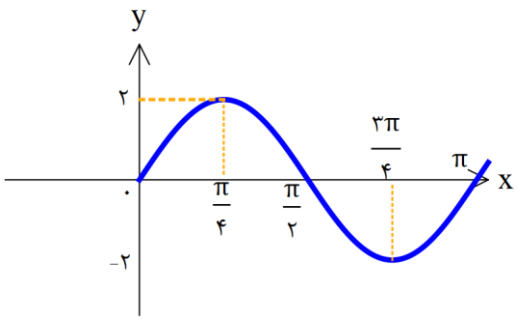
الف) $y = ۳\sin ۲\pi x$

ب) $y = -۲\cos \pi x + ۳$

📖 **مثال:** دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -\pi \sin(\frac{x}{۲}) - ۲$ را بیابید. تیر۹۹

📖 **مثال:** دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{۳} - \cos \frac{\pi}{۲} x$ را بیابید. دی۹۸

📖 **مثال:** معادله ی منحنی روبه رو را به صورت $y = a\cos bx + c$ و $y = a\sin bx + c$ بیان کنید.

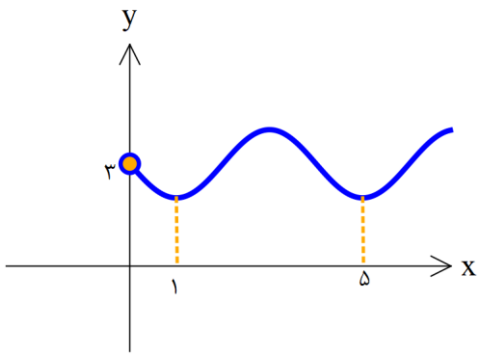


📖 **مثال:** معادله یک تابع سینوسی رابنویسید که ماکزیمم آن ۶ و مینیمم آن ۱ و دوره تناوب آن ۲ باشد. این تابع را رسم کنید.

کاربرد دوره تناوب در مسائل:

مثال: شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه ی $x = \frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵



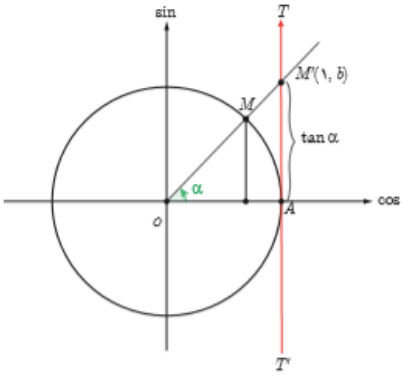
مثال: دوره تناوب دو تابع زیر با هم برابرند. مقادیر ممکن برای b را بیابید.

$$y = -\cos\left((۳b+۳)\pi x\right)+۲ \quad , \quad y = -\sin\left(\frac{۳\pi x}{b-۱}\right)$$

تابع تانژانت :

در سال دهم و یازدهم با محورهای $\sin$ و $\cos$ در دایره مثلثاتی آشنا شدیم.

امسال قصد داریم با محور $\tan$ در دایره آشنا شده و دوره تناوب وشکل این تابع را به طور مختصر یاد بگیریم. در شکل روبرو



محورموازی با محور $\sin$ را محور $\tan$ مینامیم و طبق شکل داریم:

$$\tan\alpha = AM = b$$

نکات مهم در مورد تابع تانژانت

۱) تابع تانژانت در نقاط $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده است.

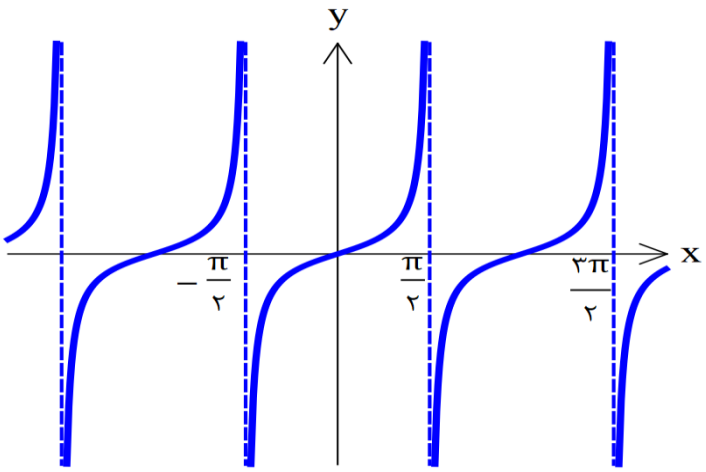
۲) در تمام ربع های مثلثاتی تابع $\tan$ صعودی است.

۳) تابع $\tan$ در کل دامنه اش صعودی نیست.

۴) با توجه به نمودار تابع $\tan$ میتوان نتیجه گرفت که دامنه تابع $y = \tan(f(x))$ برابر است با :

$$\left\{ x \middle| f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \right\}$$

۵) نمودار تابع $\tan$:



۶) دوره تناوب تابع $y = \tan x$ با توجه به شکل بالا $T = \pi$ میباشد.

با توجه به قوانین انبساط و انقباض افقی که در فصل اول آموختید دوره تناوب تابع تانژانت $T = \frac{\pi}{|b|}$ است. یعنی با تابع مشابه خودش از لحاظ $\sin$ و $\cos$ دوره تناوب آن نصف شده است.

۷) در نمودار تابع تانژانت خطوط عمودی نقطه چین را **مجانب قائم** مینامیم که بعداً در مورد آن مفصل صحبت خواهیم کرد. برای رسم، ریشه های مخرج مجانب های قائم هستند.

📖 **مثال:** دوره تناوب تابع $y = ۲\tan ۳x + ۵$ را بیابید.

📖 **مثال:** الف) نمودار $y = \tan ۲x$ را رسم کنید. دی۹۷

ب) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خرداد۹۸

دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر با است. (درست – نادرست)

📖 **مثال:** صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه $\left[\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ بیابید.

📖 **مثال:** صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

📖 **مثال:** دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\tan(\mathbf{3}x-\frac{\pi}{\mathbf{4}})$

ب) $g(x)=\mathbf{2}\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{\mathbf{6}}\right)$

پ) $h(x)=\mathbf{2}-\mathbf{3}\tan(\frac{\pi}{\mathbf{4}}-x)$

📖 **مثال:** درستی یا نادرستی هر کدام را مشخص کنید.

الف) تابع تانژانت در ربع چهارم از $\frac{\mathbf{3}\pi}{\mathbf{2}}$ تا رسیدن به زاویه $\mathbf{2}\pi$ مقدار کاهشی دارد.

ب) بازه ای وجود دارد که تانژانت در آن بازه صعودی است.

پ) تابع تانژانت تابعی غیر متناوب است.

ت) دوره تناوب تابع $y=-\mathbf{2}\cos(\frac{\pi x}{\mathbf{8}})+\mathbf{1}$ برابر ۱۶ است.

ث) دامنه تانژانت برابر $D=R-\left\{x=k\pi+\frac{\pi}{\mathbf{2}}\right\}$ است.

ج) دوره تناوب تانژانت برابر $\frac{\pi}{\mathbf{2}}$ است.

چ) در نمودار تابع $y=a\cos bx+c$ مقدار بیشینه نمودار $\mathbf{5}$ و کمینه ی نمودار $\mathbf{2}$ است. در این صورت مقدار a برابر $\mathbf{3/5}$ و مقدار c برابر $\mathbf{1/5}$ است.

ح) دامنه تابع $y=\tan(x)$ برابر با $\left\{x \mid x \in R, x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$ است. شهریور۹۸

خ) درجای خالی عبارت ریاضی مناسب بنویسید.

دوره تناوب اصلی تابع $y=\tan x$ برابر ..... است. دی۹۸

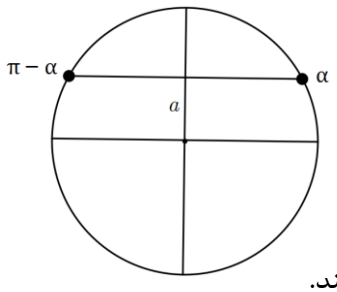
معادلات مثلثاتی

الف) معادلات به صورت $\sin x=a$ در این سوالات ابتدا باید مطمئن باشیم عدد a در بازه $[-1,1]$ قرار داشته باشد.

در غیر این صورت معادله جواب ندارد.

حال فرض کنید $a \in [-1,1]$ باید فکر کنیم $a=\sin ?$ یعنی در حافظه تان به دنبال زاویه ای بگردید که سینوس آن a میشود.

$$\sin x=\sin \alpha$$



$$\sin x=\sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

همان طور که در شکل میبینید هر دو نقطه مشخص شده دارای سینوس برابر a هستند.

📖 **مثال:** معادله ی $\sin x=\frac{1}{2}$ را حل کنید.

📖 **مثال:** معادله $2\sin 2x-\sqrt{2}=0$ را حل کنید. تیر۹۹ ریاضی

📖 **مثال:** معادله ی $\sin ۳x = ۱$ را حل کنید.

📖 **مثال:** معادله $۲\sin^۲ ۵x - \sin ۵x = ۰$ را حل کنید.

📖 **مثال:** معادله $\sin ۳x = -\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

📖 **مثال:** معادله $\sin ۴x = \sin x$ را حل کنید.

📖 **مثال:** معادله $\sin ۲x = \sin ۳x$ را حل کنید. شهریور۹۸ریاضی

📖 **مثال:** معادله ی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کنید. شهریور۹۸تجربی

📖 **مثال:** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱ = ۰$ ب) $\sin x - \cos ۲x = ۰$ دی۹۷تجربی

📖 **مثال:** معادله مثلثاتی $\cos ۲x - \sin x = ۰$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید. خرداد۹۸تجربی

📖 **مثال:** معادله مثلثاتی $۲\sin x + \sqrt{۲} = \sqrt{۸}$ را حل کنید. تیر۹۸ تجربی

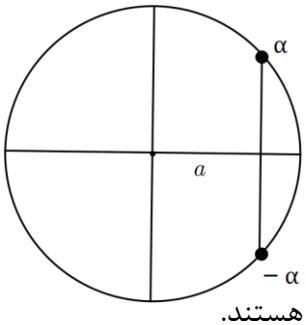
ب) معادلات به صورت $\cos x = a$ در این سوالات ابتدا باید مطمئن باشیم عدد a در بازه $[-۱,۱]$ قرار داشته باشد.

در غیر این صورت معادله جواب ندارد.

حال فرض کنید $a \in [-۱,۱]$ باید فکر کنیم $a = \cos ?$ یعنی در حافظه تان به دنبال زاویه ای بگردید که کسینوس آن a میشود.

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$



همان طور که در شکل میبینید هر دو نقطه مشخص شده دارای کسینوس برابر a هستند.

مثال: معادله $\cos x = \frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

مثال: معادله $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید. دی۹۷

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos x + ۱ = ۰$

ب) $\cos ۳x = \cos ۲x$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$\cos ۲x - ۳\cos x + ۲ = ۰$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ دی۹۸ تجربی

$\cos ۲x + \cos x + ۱ = ۰$ خرداد۹۸

مثال: معادله روبرو را حل کنید. $\sin ۲x - \sqrt{۳}\cos x = ۰$

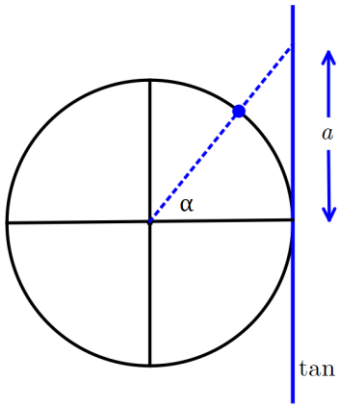
مثال: معادله روبرو را حل کنید. $\cos x\left(۲\cos x - ۹\right) = ۰$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x\left(۲\cos x - ۹\right) = ۵$ را حل کنید. تیر۹۹تجربی

📖 **مثال:** اندازه دوضلع مثلثی ۴و۵ سانتیمتر است. اگر مساحت این مثلث $۵\sqrt{۲}$ باشد، چند مثلث با این ویژگی وجود دارد؟

پ) معادلات به صورت $\tan x = a$ در این سوالات ابتدا باید فکر کنیم عدد a تانژانت کدام زاویه معروف است که ما در حافظه داریم. یعنی $\tan x = \tan \alpha$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



همان طور که در شکل میبینید نقطه مشخص شده دارای تانژانت برابر a است.

📖 **مثال:** معادلهٔ را حل کنید.

الف) $\tan ۲x = \sqrt{۳}$ ب) $\tan ۵x = \tan x$

📖 **مثال:** معادله $\tan(\pi + ۲x) + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۰$ را حل کنید.

📖 **مثال:** معادله روبرو را حل کنید. $\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}=\sqrt{۳}$

📖 **مثال:** معادله $\tan ۳x \tan x = ۱$ را حل کنید.

📖 **مثال:** مقدار $\tan ۱۰۵$ را محاسبه کنید.

📖 **مثال:** مقدار $\frac{۱-\tan ۱۵}{۱+\tan ۱۵}$ را محاسبه کنید.