

## فصل ۲ درس ۲: معادلات مثلثاتی

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

( $15^\circ$  در ربع اول است پس کسینوس مثبت است.)

(تمرین ۱ و ۲ ص ۴۵)

② نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه  $22/5^\circ$  به دست آورید.

**نسبت های مثلثاتی زوایای دوبرابرکمان:**

\*مقدار نسبت مثلثاتی برخی زوایای غیر معروف مثل:

( $15^\circ, 22/5^\circ, \dots$ ) را می توان به کمک زوایای معروف مثل:

( $30^\circ, 45^\circ, \dots$ ) به دست آورد.

\*وقتی کمان دوبرابر یا نصف می شود مقدار سینوس یا کسینوس

دوبرابر یا نصف نمی شود. مثلاً  $\cos 15^\circ$  را به کمک مقدار معلوم

$\cos 30^\circ$  می توان یافت اما نه با نصف کردن.

بنابراین از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

(مثال ص ۴۳)

مقدار  $\cos 15^\circ$  و  $\sin 15^\circ$  را بیابید.

☑ حل:

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -2 \sin^2 15^\circ$$

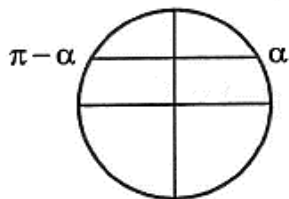
$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

( $15^\circ$  در ربع اول است پس سینوس مثبت است.)

\* اگر معادله به صورت  $\sin x = a$  باشد:

(۱) این معادله وقتی جواب دارد که  $(-1 \leq a \leq 1)$  باشد



$$\sin x = a \rightarrow \sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

(۲) حالت های خاص:

$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$	
$\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (۳)$$

(مثال ص ۴۵)

معادله  $\sin x = -\frac{1}{2}$  را حل کنید.

حل:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

① فرض کنید  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  و  $a$  زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $\cos 2\alpha$

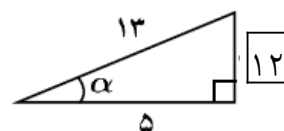
حل:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{119}{169}$$

ب)  $\sin 2\alpha$

حل:



با توجه به شکل:

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}, \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

مادلات مثلثاتی:

\* معادله ای که در آن اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

\* در معادله مثلثاتی وقتی مقدار سینوس و کسینوس را پیدا کردیم باید جواب زاویه  $(x)$  را بنویسیم

الف) معادله  $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$  را حل کنید.

(تمرین ۴ ص ۴۸)  
 ④ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟  
 حل:  $\square$

$$s = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

در مثلث  $0 < \alpha < 180^\circ$  است. بنابراین با توجه به

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = 30^\circ, \alpha = 150^\circ$$

یعنی دو مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت.

(مثال ص ۴۷)

یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت  $16 \text{ m/s}$  برای هم تیمی خود که در  $12/8$  متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ  $v$  (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی  $d$  (برحسب متر) و زاویه پرتاب  $\theta$  به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

حل:  $\square$

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10}$$

$$\sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \theta = \frac{k\pi + \pi}{2} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

(کار دو کلاسی ص ۴۵)

الف) معادله  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  را حل کنید.  
 حل:  $\square$

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow 2 \sin x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) معادله  $4 \sin x + \sqrt{8} = 0$  را حل کنید.

(مثال ص ۴۷)

معادله  $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$  را حل کنید.  
 حل:  $\square$

$$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow 2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

\* اگر دو سینوس با هم برابر شوند، می‌توانیم جواب‌های کلی معادله را بنویسیم و لازم نیست برای سینوس حتماً یک عدد مشخصی به دست آید

(مثال ص ۴۶ و تمرین ۳ الف ص ۴۸)

معادله  $\sin 2x = \sin 3x$  را حل کنید.

حل:  $\square$

$$\sin 2x = \sin 3x \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \rightarrow x = -2k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - 3x \rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{5} \end{cases}$$

✓ نکته: اگر کسینوس منفی بود باید زاویه مربوط به مقدار مثبت را از  $\pi$  کم کنیم مثل:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

معادله  $\cos x (2\cos x - 9) = 5$  را حل کنید.

✓ حل:

$$\cos x (2\cos x - 9) = 5 \rightarrow$$

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 - 9t - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=121} \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{t=\cos x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 5 \rightarrow \end{array} \right.$$

غیر قابل قبول. زیرا باید  $(-1 \leq a \leq 1)$

(تمرین ۳ (پ) ص ۴۸)

(ب) معادله  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$  را حل کنید.

✓ حل:

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$$

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow$$

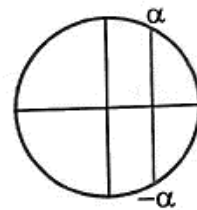
$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \xrightarrow{\text{فکتور}} \cos x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

\* اگر دو کسینوس با هم برابر شوند، می توانیم جواب های کلی معادله را بنویسیم و لازم نیست برای کسینوس حتما یک عدد مشخصی به دست آید

\* اگر معادله به صورت  $\boxed{\cos x = a}$  باشد:

(۱) این معادله وقتی جواب دارد که  $(-1 \leq a \leq 1)$  باشد



$$\cos x = a \rightarrow \cos x = \cos \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

(۲) حالت های خاص:

$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$	
$\cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi$	

(مثال ص ۴۶ و ۴۸)

معادله  $\cos x = \frac{1}{2}$  را حل کنید. کدام جوابها در بازه

$[-3\pi, \pi]$  می باشند.

✓ حل:

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

به  $k$  اعداد صحیح می دهیم و جواب ها در بازه  $[-3\pi, \pi]$  را

می یابیم. طبق جدول جوابها برابر است با:  $2\pi \pm \frac{\pi}{3}$  و  $-\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$k$	-۲	-۱	۰	۱
	x	✓	✓	x
	$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$-4\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$2\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(مثال صی ۴۷)

معادله  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  را حل کنید.

☑ حل: دو طرف در ۲ ضرب می شود:

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{2} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

\* در حل معادلات مثلثاتی میتوانیم از زوایای متمم کمک بگیریم

و دو طرف را به یک نسبت تبدیل کنیم

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

(تمرین ۳ (ج) صی ۴۸)

معادله  $\sin x - \cos 2x = 0$  را حل کنید.

☑ حل:

$$\sin x = \cos 2x \xrightarrow{\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(تمرین ۳ (پ) صی ۴۸)

پ) معادله  $\cos x = \cos 2x$  را حل کنید.

☑ حل:

$$\cos x = \cos 2x \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

\* در حل معادلات مثلثاتی باید نسبتها را به یک نسبت تبدیل کنیم

(تمرین ۳ (ت و ث) صی ۴۸)

ت) معادله  $\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$  را حل کنید.ث) معادله  $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$  را حل کنید.