

فصل دوم

مشکلات

❖ درس اول: متاب و تاثرانت

❖ درس دوم: معادلات مشکاتی

| شهری ادی | نوبت دوم | نوبت اول |
|----------|----------|----------|
| ۳ | ۲ | ۵ |

بارم فصل ۲:

فصل ۲ درس ۱: تناوب و تاثرات

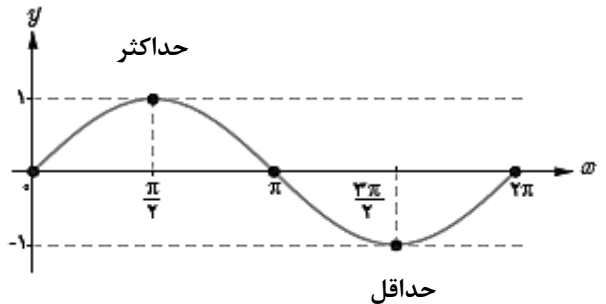
تابع مثلثاتی:

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گوئیم که ساده ترین آن $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ می باشد.

ویژگی های تابع باضابطه های $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$:

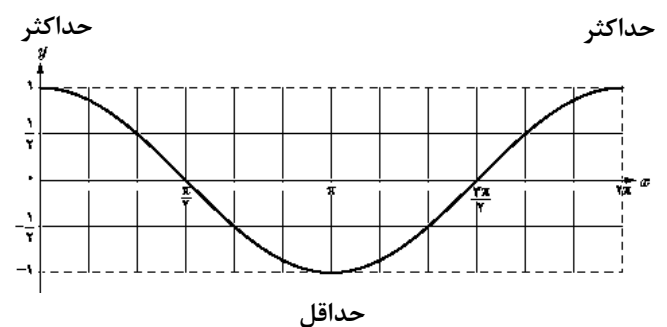
* نمودار تابع $f(x) = \sin x$:

| | | | | | |
|---------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| y | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| تغییرات | | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |



* نمودار تابع $f(x) = \cos x$:

| | | | | | |
|---------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| y | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| تغییرات | | ↘ | ↘ | ↗ | ↗ |



* هر دو تابع متناوب هستند چون در فواصل معینی نمودار آن تکرار می شود. طول هر یک از این فاصله را دوره تناوب می گوئیم و با حرف T نمایش می دهیم

* دوره تناوب تابع: $T = 2\pi$

* تعریف ریاضی تابع متناوب:

تابع f را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته

$$f(x \pm T) = f(x)$$

۱) $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ باشیم:

۲) $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$

کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می نامیم

* ماکزیمم و مینیمم تابع: $\max = 1$, $\min = -1$

* دامنه و برد تابع: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, 1]$

ویژگی های تابع باضابطه های

* $f(x) = a \cos bx + c$ و $f(x) = a \sin bx + c$

* ضریب a و مقدار c روی ماکزیمم و مینیمم تابع تاثیر می گذارد

* ضریب b روی دوره تناوب تابع تاثیر می گذارد

* دوره تناوب تابع: $T = \frac{2\pi}{|b|}$

توجه: دوره تناوب باید مثبت باشد بنابراین از قدر مطلق استفاده می کنیم.

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

الف) $y = 1 + 2 \sin 7x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

پ) $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

*ماکزیمم و مینیمم تابع:

$$\min = -|a| + c, \quad \max = |a| + c$$

*مقدار c و a :

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{array} \right\} \rightarrow 2c = \max + \min$$

$$\rightarrow c = \frac{\max + \min}{2}, \quad |a| = \frac{\max - \min}{2}$$

نوشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب با داشتن ضابطه:

(مثال ص ۳۵ و تمرینی ص ۳۰)

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

☑ حل:

$$y = 3 \sin(2x) - 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{array} \right.$$

$$\max = |a| + c \rightarrow \max = |3| - 2 = 1$$

$$\min = -|a| + c \rightarrow \min = -|3| - 2 = -5$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

نوشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب با داشتن نمودار:

* تشخیص نمودار سینوس و کسینوس:

اگر محور y ها از اکسترمم تابع (ماکزیمم یا مینیمم تابع) رد شده باشد، نمودار کسینوس است. در غیر این صورت نمودار سینوس است

* a, b چون قدر مطلق دارند، پس می توانند مثبت یا منفی باشند

* علامت a :

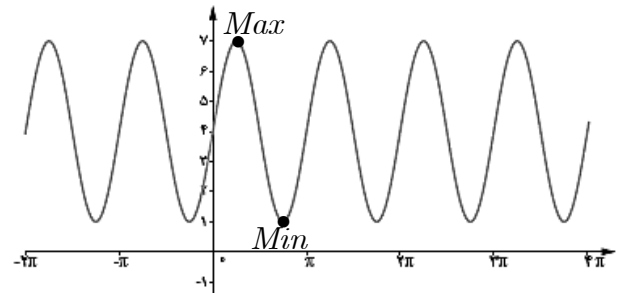
در نمودار سینوس و کسینوس اگر ابتدا ماکزیمم داشتیم a مثبت است و اگر ابتدا مینیمم داشتیم a منفی است.

* علامت b :

مثبت یا منفی بودن b در کسینوس بی تاثیر است زیرا کسینوس منفی را می خورد ولی در سینوس اگر ابتدا ماکزیمم داشتیم b مثبت و اگر ابتدا مینیمم داشتیم b منفی است.

(مثال ص ۵ و تمرین ۴ ص ۴۱)

ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



☑ حل:

محور y ها از اکسترمم تابع (ماکزیمم یا مینیمم تابع) رد نشده است، نمودار سینوس است و چون ابتدا ماکزیمم آمده، پس a, b مثبت است.

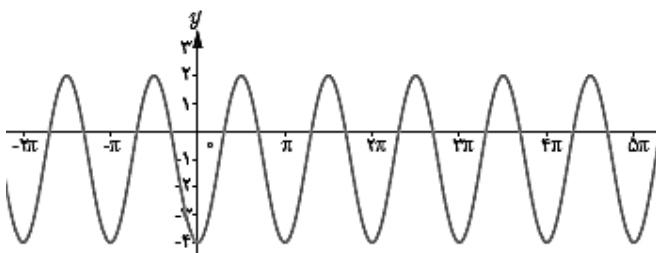
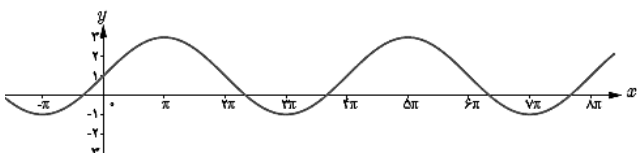
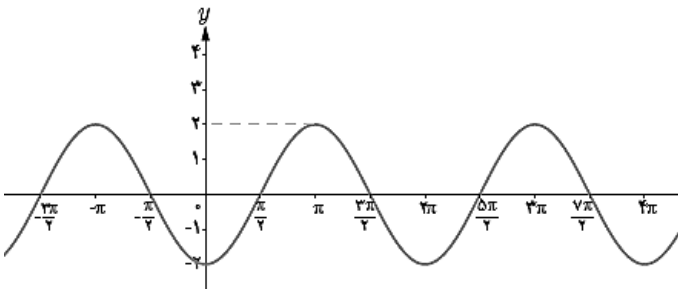
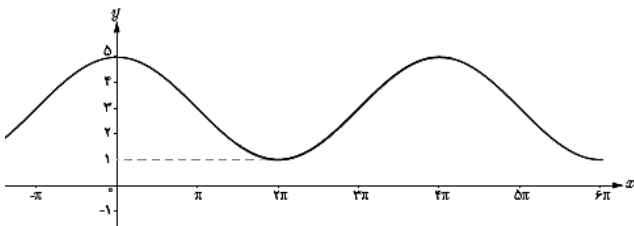
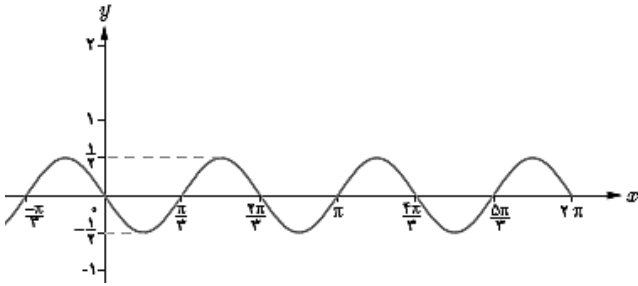
$$\max = 7, \min = 1, T = \pi$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y = a \sin bx + c \rightarrow \boxed{y = 3 \sin(2x) + 4}$$



$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y = a \sin bx + c \rightarrow \boxed{y = 3 \sin(2x)}$$

یا

$$y = a \cos bx + c \rightarrow \boxed{y = 3 \cos(2x)}$$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

ب) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

(تمرین ۲ ص ۴۰)

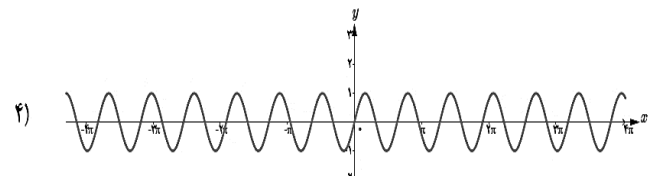
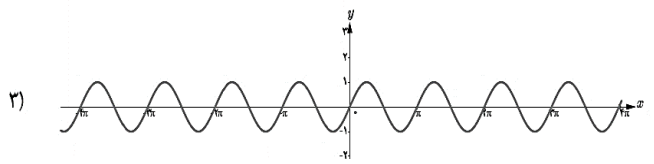
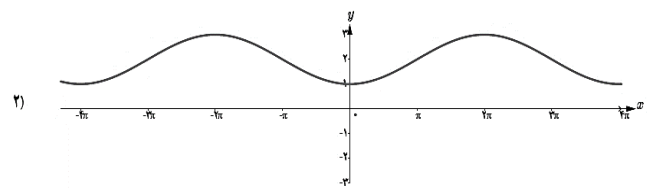
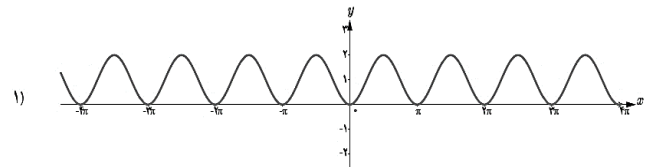
② هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

$$y = 2 - \cos \frac{1}{2}x \quad \text{ب)}$$

$$y = \sin \pi x \quad \text{الف)}$$

$$y = 1 - \cos 2x \quad \text{ت)}$$

$$y = \sin 2x \quad \text{پ)}$$



نوشتن ضابطه با داشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب:

(تمرین ۳ ص ۴۱)

③ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر

ماکزیمم و مینیمم داده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

☑ حل: در سوال قید نکرده ضابطه تابع سینوس یا کسینوس ،

بنابراین ضابطه هر کدام بنویسیم درست است.

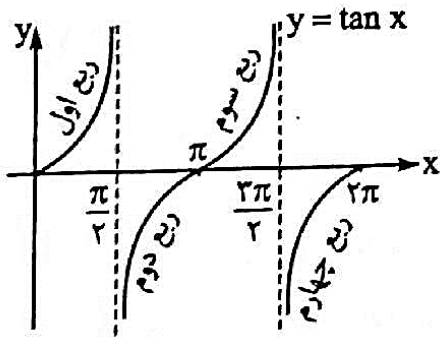
a, b چون قدر مطلق دارند ، پس می توانند مثبت یا منفی

باشند که در اینجا ما هر دو را مثبت فرض می کنیم.

تابع تانژانت:

* نمودار تابع $f(x) = \tan x$:

| | | | | | |
|---------|-----|--------------------|------------|--------------------|------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| y | 0 | ت | 0 | ت | 0 |
| تغییرات | | $\nearrow +\infty$ | \nearrow | $\nearrow +\infty$ | \nearrow |



* دوره تناوب تابع $f(x) = \tan x$: $T = \pi$

* دامنه و برد تابع:

تابع تانژانت در نقاطی که مخرج فرد $\frac{\pi}{2}$ هست تعریف نشده

است $\left(x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$ مثل $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$ زیرا در

این نقاط مقدار $\cos x$ صفر می شود و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ معنی ندارد.

بنابراین دامنه و برد تابع به صورت زیر است:

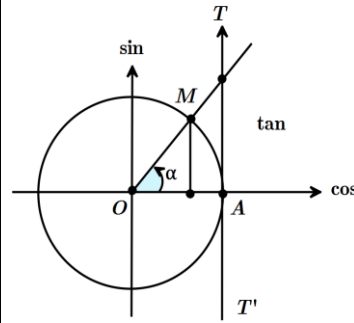
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

* تابع تانژانت در بازه هایی مثل زیر و هر زیر مجموعه ای از

این بازه ها اکیدا صعودی است.

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2} \right)$$

تانژانت: (فعالیت ص ۳۷)



* محور تانژانت بر دایره مثلثاتی

مماس و موازی محور سینوس

و عمود بر محور کسینوس است

* برای پیدا کردن تانژانت

هر زاویه، ضلع آن را امتداد می دهیم تا محور تانژانت را قطع

کند. سپس فاصله آن از مبدا تابع تانژانت یعنی A را به دست

می آوریم که در بالا مثبت و در پایین منفی است.

تغییرات تانژانت: (گاردو گلاسی ص ۳۸)

با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می کند.

| | |
|--|--|
| با افزایش α از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ مقدار $\tan \alpha$ از 0 تا $+\infty$ افزایش می یابد. | |
| با افزایش α از $\frac{\pi}{2}$ تا π مقدار $\tan \alpha$ از $-\infty$ تا 0 افزایش می یابد. | |
| با افزایش α از π تا $\frac{3\pi}{2}$ مقدار $\tan \alpha$ از 0 تا $+\infty$ افزایش می یابد. | |
| با افزایش α از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π مقدار $\tan \alpha$ از $-\infty$ تا 0 افزایش می یابد. | |

(کاردر کلاسی ص ۳۹)

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه
 $\left[0, 2\pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ بررسی کنید.

✓ حل:

تابع تانژانت در بازه $[0, 2\pi]$ غیر یکنواست. ولی در

$\left[0, 2\pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ اکیدا صعودی است.

(تمرین ۵ ص ۴۰)

۵) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

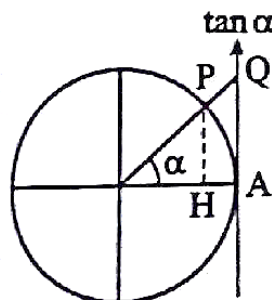
مقایسه $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$:

(تمرین ۶ ص ۴۰)

۶) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

✓ حل:



$$\left. \begin{array}{l} \text{ربع اول و سوم} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha < \tan \alpha \\ \text{ربع دوم و چهارم} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha > \tan \alpha \end{array} \right\}$$

$$\text{در کل دایره مثلثاتی} \longrightarrow |\sin \alpha| < |\tan \alpha|$$