

درس و پیمان اول // کاربرد بعضی تابع‌ها در زندگی روزمره

۱= درس اول : تابع‌های چندضابطه‌ای :

تعریف : اگر دامنه تابعی از چند بازه جدا از هم باشند و روی هر کدام از این بازه‌ها قانون یا ضابطه‌ای جداگانه داشته باشند را تابع چندضابطه‌ای می‌نامند.  
تذکره : برای به دست آوردن دامنه تابع چندضابطه‌ای کافی است بازه‌های حلقوی هر ضابطه را با هم اجتماع ببندیم.

مثالی از توابع چندضابطه‌ای که در زندگی روزمره کاربرد دارد، به دست آوردن میزان مصرف برق مصرفی یک خانواده در یک ماه که به ازای مصرفی که خانوان دارد با توجه به ضابطه‌ای که از قبل طراحی کرده است. استفاده می‌شود.

به عنوان مثال : اگر میزان مصرف برق در یک ماه را  $x$  فرض کنیم قانون (ضابطه)  $f(x)$  به صورت زیر است ؟  
 $f(x) =$  هزینه‌ی مصرفی برق در یک ماه

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 10 \\ 50 \cdot x & 10 \leq x < 100 \\ 120 \cdot x & 100 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

معنی و مفهوم این تابع  $[f(x)]$  به صورت زیر است :

- ۱= اگر میزان مصرف کمتر از ۱۰ کیلووات ساعت در ماه باشد، هزینه‌ی پرداختی ۰ است.
- ۲= اگر میزان مصرف بین ۱۰ تا ۱۰۰ کیلووات ساعت در ماه باشد هزینه پرداختی به ازای هر کیلووات ۵۰ تومان هزینه می‌شود.
- ۳= اگر میزان مصرف بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ کیلووات ساعت در ماه باشد هزینه پرداختی به ازای هر کیلووات ۱۲۰ تومان هزینه می‌شود.

$f(54)$  به چه معناست ؟ هزینه‌ی برق مصرفی یک خانوان که در ماه ۵۴ کیلووات ساعت

مصرف کرده باشد را نشان می‌دهد چون  $10 < 54 < 100$  است پس  $f(54) = 50 \cdot 54 = 2700$  تومان

$f(150)$  به چه معناست ؟ هزینه‌ی برق مصرفی یک خانوان که در ماه ۱۵۰ کیلووات ساعت مصرف کرده باشد را نشان می‌دهد

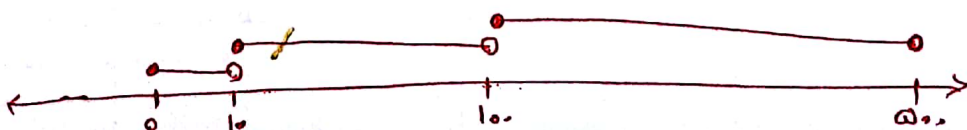
چون  $100 \leq 150 \leq 500$  است پس  $f(150) = 120 \cdot 150 = 18000$  تومان

$f(1)$  به چه معناست ؟ هزینه‌ی برق مصرفی یک خانوان که در ماه ۱ کیلووات ساعت مصرف

کرده است را نشان می‌دهد چون  $0 \leq 1 < 10$  است پس  $f(1) = 0$

دامنه تابع  $f(x)$  برابر  $[0, 500]$  است چون ←

$$D_f = [0, 10) \cup [10, 100) \cup [100, 500] = [0, 500]$$



روش رسم توابع غیرضابطه ای: برای رسم توابع غیرضابطه ای باید با توجه به محدودی  $x$  جلوی هر ضابطه نمودار آن را رسم کرد البته بتوان به کمک رسم جدول جلوی هر ضابطه به صورت زیر رسم کرد:

اگر تابع درجه اول و تابع ثابت باشد دقیقاً برای رسم آن کافی است.  
اگر تابع درجه ۲ بود ۳ نقطه کافی است.

$x$	...	...
$y$	...	...

حالت های زیر را در نظر بگیرید:

$x > a \rightarrow$  خود  $a$  و یک بیشتر از  $a$  انتخاب کنیم  $\rightarrow$  نمودار نقطه  $a$  توخالی است

$x \geq a \rightarrow$  " " " "  $\rightarrow$  " " " "  $\rightarrow$   $a$  توپر است.

$x < a \rightarrow$  خود  $a$  و یک کمتر از  $a$  انتخاب کنیم  $\rightarrow$  " " " "  $\rightarrow$   $a$  توخالی است

$x \leq a \rightarrow$  " " " "  $\rightarrow$  " " " "  $\rightarrow$   $a$  توپر است.

$a < x < b \rightarrow$  نقاط  $a$  و  $b$  را انتخاب کنیم  $\rightarrow$  " " " "  $\rightarrow$   $a$  توخالی و  $b$  توخالی است.  
اگر لازم بود بین آن ها هم انتخاب شود.

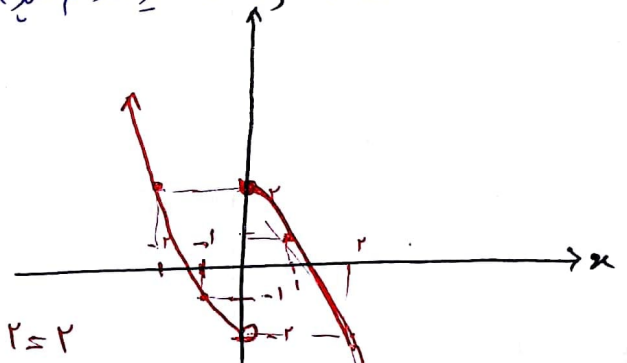
سوال) نمودار تابع غیرضابطه ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 0 \\ -x^2 + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$x$	0	-1	-2
$y$	-2	-1	2

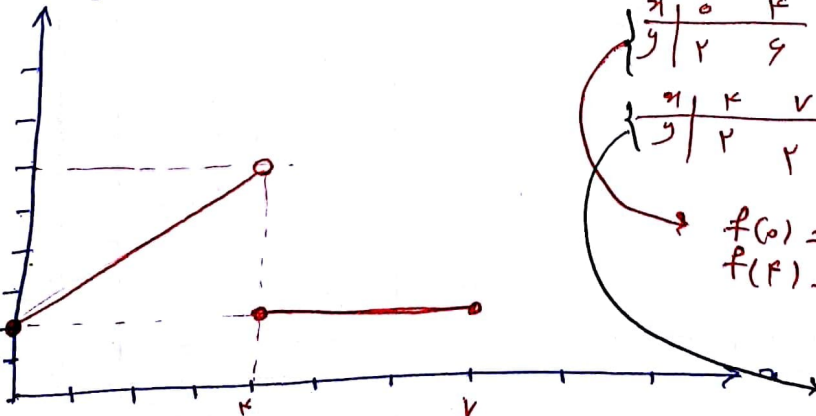
$x$	0	1	2
$y$	2	1	-2



توخالی  $f(0) = 0^2 - 2 = -2$   
 $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$   
 $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$f(0) = -(0)^2 + 2 = 2$   
 $f(1) = -(1)^2 + 2 = -1 + 2 = 1$   
 $f(2) = -(2)^2 + 2 = -4 + 2 = -2$

سوال) تابع  $f$  با دامنه  $[0, 7]$  به صورت زیر در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.



$$f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

توخالی  $f(0) = 0 + 2 = 2$   
 $f(4) = 4 + 2 = 6$

تابع ثابت  $f(4) = 2$   
 $f(7) = 2$

مسئله (تابع  $f$  با دامنه  $[4, 6]$  به صورت زیر است، نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -3 \leq x < -1 \\ x + 2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$f(-3) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$  ضابطه اول

$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

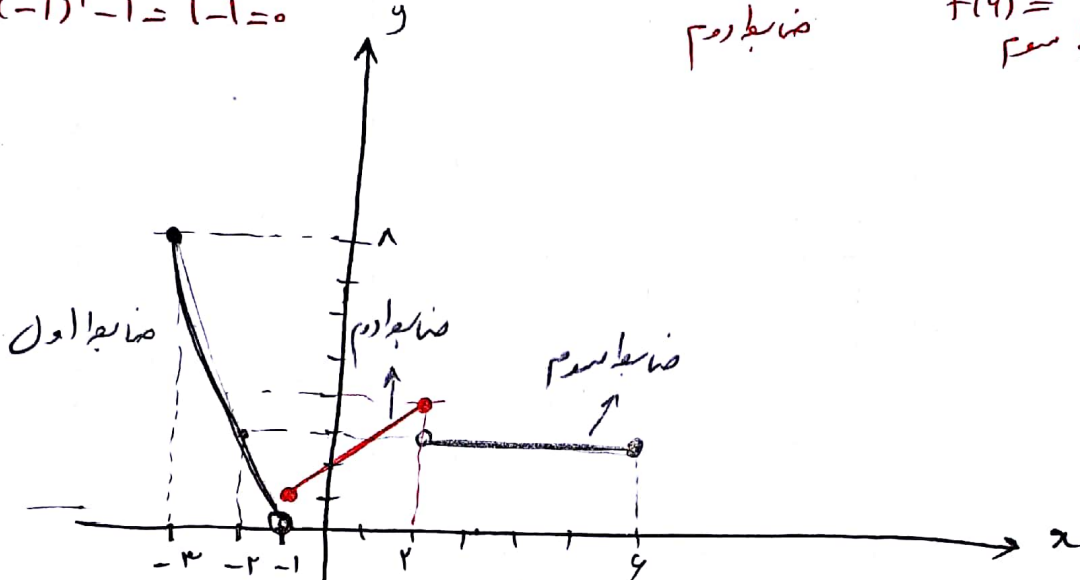
$f(-1) = -1 + 2 = 1$

$f(2) = 2 + 2 = 4$  ضابطه دوم

$f(2) = 3$

$f(4) = 3$

ضابطه سوم



مسئله (تابع  $f$  با دامنه  $[1, 8]$  به صورت زیر است، نمودار آن را رسم کنید.)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 5 \\ -x + 1 & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$D_f = [-2, 8]$

$D_f = [-2, 1) \cup [1, 5) \cup [5, 8]$

الف دامنه تابع  $f$  را بنویسید.

ب) مقادیر  $f(-1)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ ,  $f(5)$  را تعیین کنید.

$f(-1) = -1 + 2 = 1 \Rightarrow -2 \leq -1 < 1$  دلیل

$f(1) = 2 \Rightarrow 1 \leq 1 < 5$  دلیل

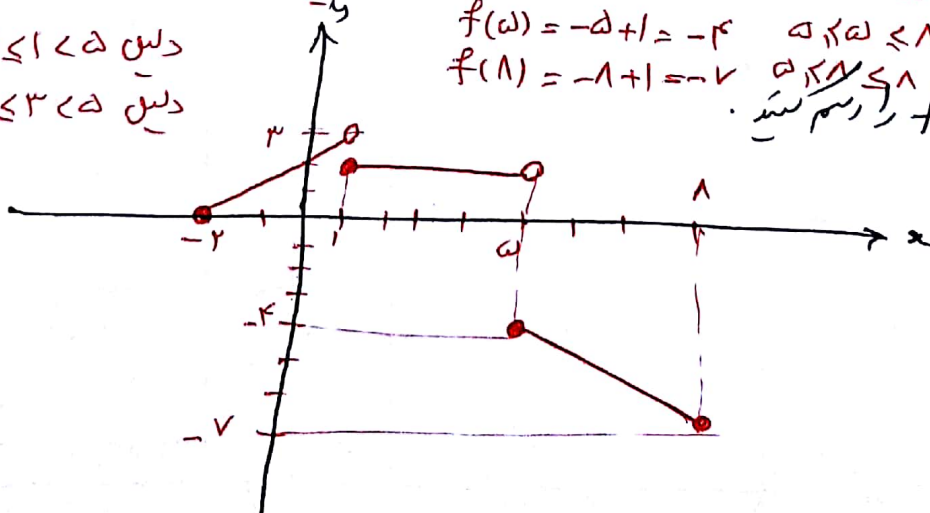
$f(2) = 2 \Rightarrow 1 \leq 2 < 5$  دلیل

$f(2) = 2 \Rightarrow 1 \leq 2 < 5$  دلیل

$f(5) = -5 + 1 = -4 \Rightarrow 5 \leq 5 \leq 8$  دلیل

$f(8) = -8 + 1 = -7 \Rightarrow 5 \leq 8 \leq 8$  دلیل

ج) نمودار  $f$  را رسم کنید.





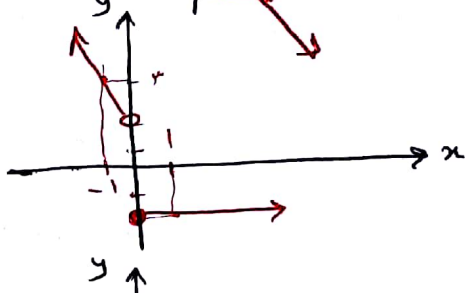
متواری توابع چندضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

فرد

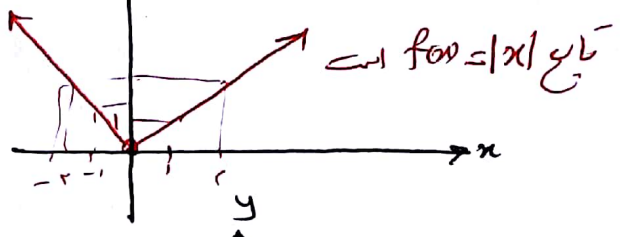
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ -x+1 & 1 \leq x \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x < 1 \\ -2 & 1 \leq x \end{cases}$$

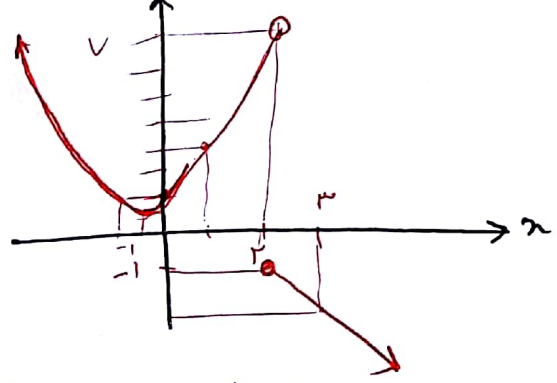


$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$



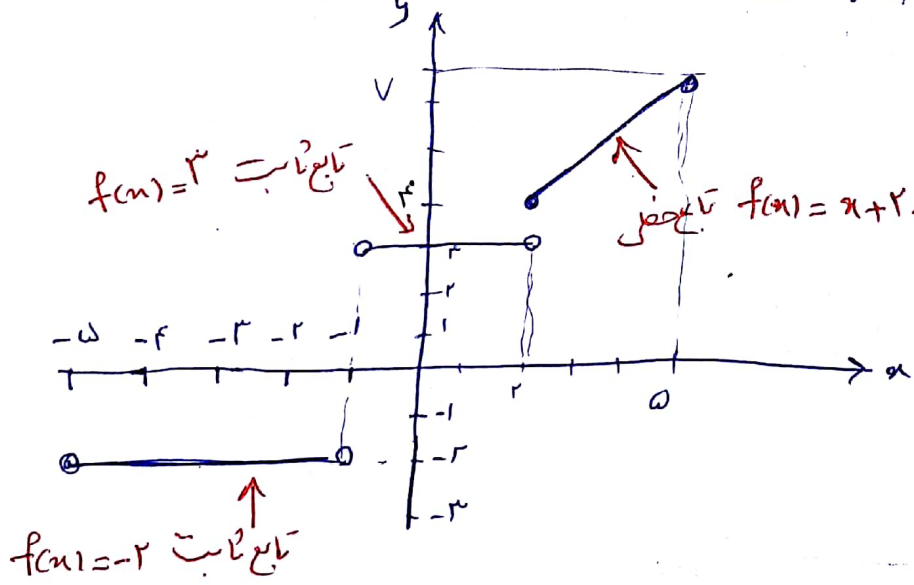
تابع  $f(x) = |x|$  است

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x < 2 \\ -x+1 & 2 \leq x \end{cases}$$



سوال) متواری زیر نمایش یک تابع چندضابطه‌ای است. دامنه و مقادیر آن را بنویسید.

$$D_f = [-5, 5]$$



تابع ثابت  $f(x) = 3$

دلیل:  $f(x) = x+2$  تابع خطی

تابع ثابت  $f(x) = -2$

$$\begin{aligned} (2, 4) & (a, v) \\ \text{شیب} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{v - 4}{a - 2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= 1x + b \\ (2, 4) &\rightarrow 4 = 2 + b \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = x + 2}$$

یاد آوری:

نقطه فرمول معادله خط  $y = ax + b$

$a$  = شیب  
 $b$  = عرض از مبدأ

اگر دو نقطه از خط داشته باشیم  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  برای محاسبه شیب از فرمول استفاده می‌کنیم.

$$\text{شیب} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

سوال) تابع با قانون  
 یک نقطه توپه  
 الف) دامنه تابع و رانجه یابی

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 & -2 < x < 1 \\ -3 & x = 1 \\ -x+2 & 1 < x < 6 \end{cases}$$

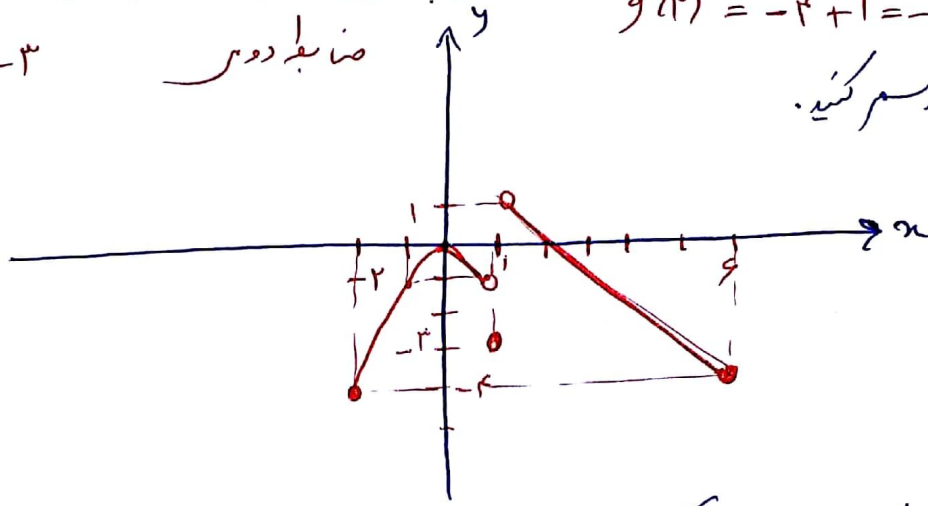
x	-2	-1	0
y	-4	-1	0

x	1	2	3	4	5	6
y	-2	-1	0	1	2	3

$$D_g = [-2, 6]$$

ب) مقادیر  $g(-2)$ ،  $g(1)$ ،  $g(4)$  و رانجه درست آورید.  
 ضابطه اولی  $g(-2) = -(-2)^2 = -4$   
 ضابطه دوم  $g(1) = -3$   
 ضابطه سوم  $g(4) = -4+2 = -2$   
 ج) نمودار تابع و رانجه رسم کنید.



نمودار تابع چند ضابطه ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \\ 1 - x^2 & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

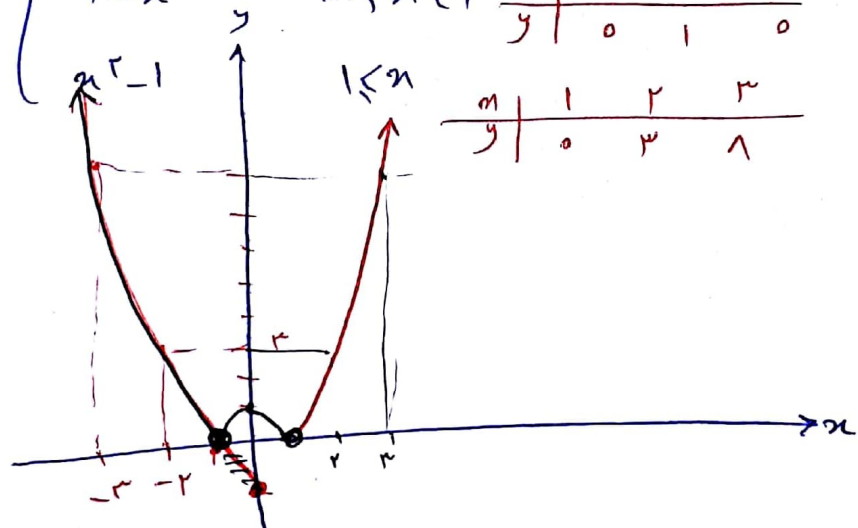
x	-1	0	1
y	0	3	1

x	-1	0	1
y	0	1	0

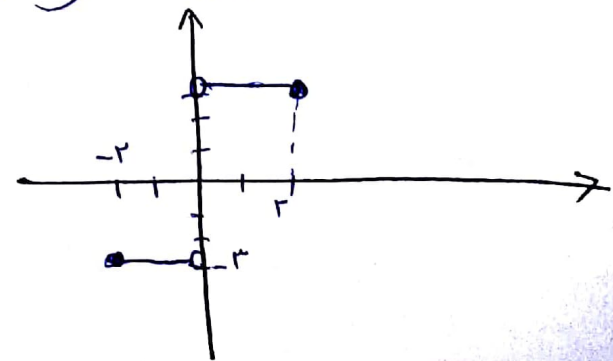
x	1	2	3
y	0	3	1



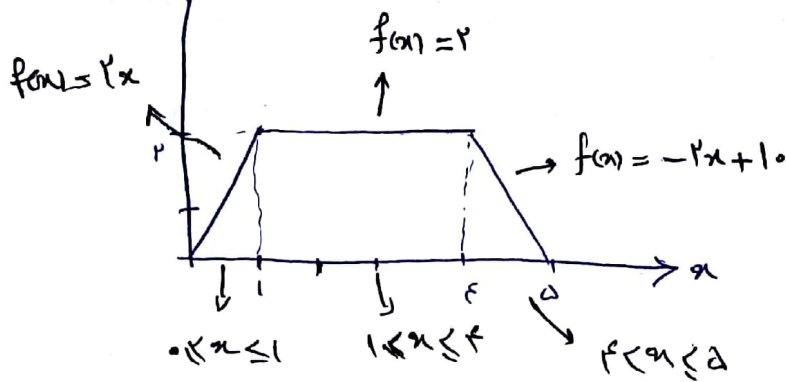
\* تابعی دو ضابطه ای گال بنویسید، دامنه آن  $[-2, 2]$  که نمودار آن از دو پارچه تشکیل شده باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -x & -2 < x < 0 \\ x & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$D_f = [-2, 2]$$



مسئله) نمودار زیر نمایش دهنده تابع چندضابطه‌ای است. دامنه و قانون آن را بنویسید.

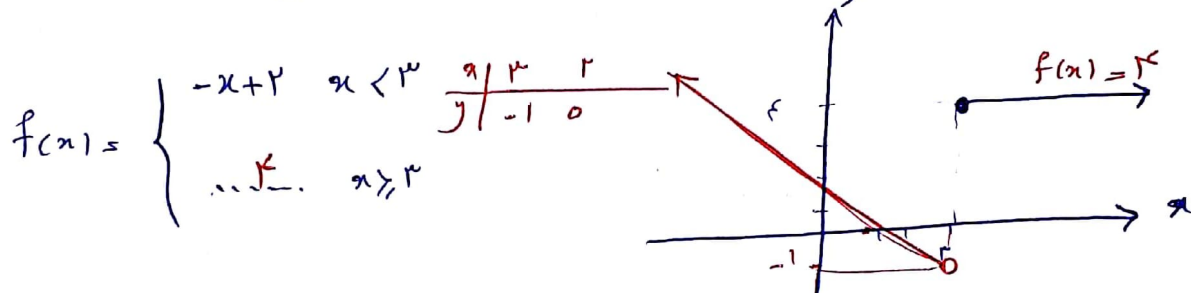


$(0,0)$      $y = \frac{2-0}{1-0} = 2$   
 $(1,2)$      $y = ax + b$   
 $y = 2x$      $b = 0$

$(4,2)$      $y = \frac{x-4}{a-4} = 2$   
 $(5,0)$      $y = ax + b \Rightarrow y = 2x + b$   
 $(5,0) \rightarrow 0 = 2(5) + b$   
 $0 = 10 + b \Rightarrow b = -10$   
 $y = 2x - 10$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 4 \\ -2x + 10 & 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

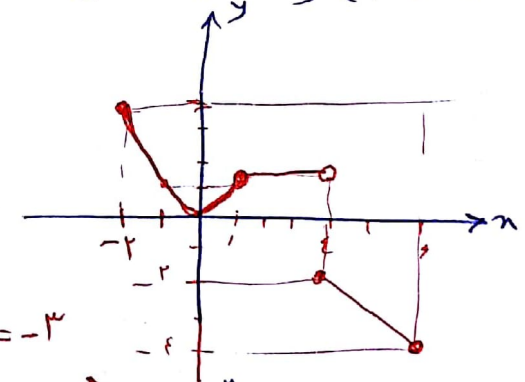
نمودار تابع چندضابطه‌ای را کامل کنید. (طایفه‌های در ضابطه را بنویسید و نمودار را تکمیل کنید)



$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 3 \\ 3 & 3 \leq x < 4 \\ 3 & x \geq 4 \end{cases}$$

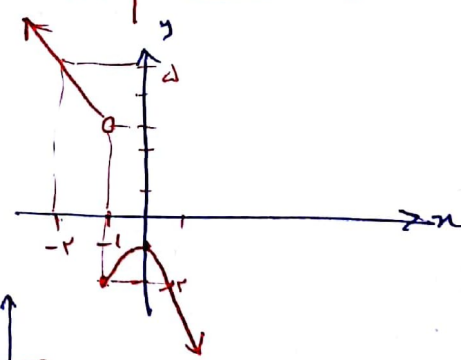
نمودار تابع چندضابطه‌ای حای زیر را رسم کنید پس مقادیر خواسته شده را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ -x + 2 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$f(0) = 0$      $f(2) = -2$      $f(4) = -4 + 2 = -2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x < -1 \\ -x^2 - 1 & x \geq -1 \end{cases}$$



$f(-3) = -2(-3) + 1 = 7$      $f(3) = -9 - 1 = -10$   
 $f(x) = \begin{cases} 3 & -3 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$   
 $f(3) = 3$      $f(0) = 3$