

پودمان ۴ : جلسه سوم - توان رسانی به توان سایر اعداد گویا

یادآوری ۱: همانطور که در سال های قبل دیدیم اگر یک عدد تواندار به توان برسد توان ها در هم ضرب می شوند. به عبارتی اگر m, n اعداد صحیح باشند خواهیم داشت : $(a^m)^n = a^{mn}$.

مثال: الف) $(3^5)^2 = 3^{2 \times 5} = 3^{10}$

ب) $(7^5)^{-4} = 7^{5 \times (-4)} = 7^{-20}$

این خاصیت برای توان های کسری هم برقرار است.

مثال: الف) $(4^{\frac{1}{3}})^2 = 4^{\frac{1}{3} \times 2} = 4^{\frac{2}{3}}$

ب) $(8^{\frac{1}{2}})^{-5} = 8^{\frac{1}{2} \times (-5)} = 8^{-\frac{5}{2}}$

یادآوری ۲: در سال های قبل دیدیم توان های منفی به صورت زیر نوشته می شوند.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

یعنی عدد تواندار را در مخرج کسر می نویسیم و علامت توان عوض می شود و صورت کسر را هم عدد ۱

قرار می دهیم. به نمونه های زیر دقت کنید.

مثال: الف) $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ ب) $6^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}}$

در ادامه می خواهیم اعداد تواندار با توان کسری (سایر کسرها) را ساده نمائیم. برای این کار به صورت قاعده زیر عمل می کنیم. (a عددی مثبت یا صفر است)

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

مثال: مقدارهای $4^{\frac{3}{2}}$ و $125^{\frac{2}{3}}$ و $27^{-\frac{2}{3}}$ و $(0.01)^{-\frac{3}{2}}$ را حساب کنید.

الف) $4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

$$125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(0.01)^{-\frac{3}{2}} = \left((0.01)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = \left(\sqrt{0.01}\right)^{-3} = (0.1)^{-3} = \frac{1}{(0.1)^3} = \frac{1}{0.001}$$

یادآوری ۳: ویژگی‌هایی زیر در توان رسانی با اعداد صحیح و کسری برقرار است.

الف) اگر پایه‌ها برابر باشند، توان‌ها جمع می‌شوند.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ب) اگر توان‌ها برابر باشند، پایه‌ها در هم ضرب می‌شوند.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: محاسبات زیر را انجام دهید.

الف) $8^{\frac{1}{5}} \times 4^{\frac{1}{5}}$

ب) $64^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{2}}$

پ) $64^{-\frac{1}{2}} \times 64^{-\frac{1}{3}}$

الف) $8^{\frac{1}{5}} \times 4^{\frac{1}{5}} = (8 \times 4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

ب) $64^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 64^{\frac{5}{6}} = \left(64^{\frac{1}{6}}\right)^5 = \left(\sqrt[6]{64}\right)^5 = 2^5 = 32$

پ) $64^{-\frac{1}{2}} \times 64^{-\frac{1}{3}} = 64^{\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)} = 64^{-\frac{3+2}{6}} = 64^{-\frac{5}{6}} = \left(64^{\frac{1}{6}}\right)^{-5} = \left(\sqrt[6]{64}\right)^{-5} = 2^{-5}$

$$= \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

سوالات:

۱- عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $8^{\frac{2}{3}}$

ب) $125^{-\frac{2}{3}}$

پ) $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^3$

ت) $8^{-\frac{2}{3}}$

۲- محاسبات زیر را انجام دهید و جاهای خالی را نیز پر کنید.

الف) $5^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}}$

ب) $4^{-\frac{1}{3}} \times 4^{-\frac{1}{6}} = (\dots)^{\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)} = 4^{-\frac{3}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{-}} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} = \frac{1}{\dots}$

پ) $\sqrt[3]{16} \times 2^{\frac{2}{3}} = (\dots)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} =$

ت) $5^6 = 15625 \rightarrow (15625)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{15625} = \dots$

ث) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \dots \rightarrow (\dots)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\dots} = \dots$