


شماره		نمره با عدد و حروف	حمایت از کالای ایرانی <b>دبیرستان ماندگار البرز (دوره دوم)</b> امتحانات نوبت اول - سال تحصیلی ۹۸-۹۷	نام خانوادگی	نام
صفحه : ۱	حداکثر وقت : ۱۰۰ دقیقه	حداقل وقت : دقیقه	تاریخ ۹۷/۱۰/۱۹	نام دبیر : آقای	کلاس
توجه: پاسخ سوالات را با دقت، کامل و خوش خط و خوانا با خودکار آبی یا مشکی بنویسید. در همه حال و همه جا یاد و ذکر خداوند متعال را فراموش نکنید.					

بارم	بافت	سوال
۰/۷۵	۱	<p>جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر <math>a 8</math> در این صورت تعداد مقادیر طبیعی برای <math>a</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) در تقسیم <math>a = bq + r</math> مقدار <math>b</math> باید عددی ..... باشد.</p> <p>پ) در گراف <math>G</math> یالی که یک رأس را با خودش مجاور می کند ..... نام دارد.</p>
۱/۵	۲	<p>حکم درست را ثابت کرده برای حکم نادرست مثال نقض بیاورید.</p> <p>الف) اگر <math>x</math> عددی گویا و <math>y</math> عددی گنگ باشد آن گاه <math>x^y</math> عددی گنگ است.</p> <p>ب) اگر <math>p</math> یک عدد اول و بزرگتر از ۳ باشد آن گاه <math>p^2 - 1</math> بر ۲۴ بخش پذیر است.</p>
۱	۳	<p>برای ۳ عدد حقیقی <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> ثابت کنید.</p> $a^2 + b^2 + c^2 + 4 \geq 2(a + b + c)$
۱	۴	<p><math>a_1, a_2, a_3</math> عددهای صحیح هستند و <math>b_1, b_2, b_3</math> هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند ثابت کنید <math>(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)</math> عددی زوج است؟</p>
۱	۵	<p>اگر <math>\alpha, \beta</math> دو عدد گنگ و <math>\alpha + \beta</math> عددی گویا باشد به کمک برهان خلف ثابت کنید <math>\alpha + 2\beta</math> عددی گنگ است.</p>
۱/۵	۶	<p>فرض کنید <math>5 2k + 1, k \in Z</math> ثابت کنید <math>25 14k^2 + 19k + 6</math></p>
۱/۵	۷	<p>در تقسیم عد صحیح <math>a</math> بر عدد طبیعی <math>b</math>، خارج قسمت و باقیمانده با هم مساوی هستند اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقیمانده صفر می شود مقادیر <math>q</math> را به دست آورید.</p>
۱	۸	<p>اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح <math>n</math> بخش پذیر باشند ثابت کنید باقیمانده نیز بر <math>n</math> بخش پذیر است.</p>
۱/۵	۹	<p>باقیمانده تقسیم <math>63 - 115^{1000} \times 2</math> را بر ۵۶ بیابید.</p>
۱	۱۰	<p>اگر اول فروردین پنجشنبه باشد ۲۲ بهمن همان سال چه روزی از هفته است.</p>
۱	۱۱	<p>رقم یکان عدد <math>24^{24} + 23^{23} + 22^{22} + 21^{21}</math> را مشخص کنید.</p>
۱/۵	۱۲	<p>به چند طریق می توان یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۴ کیلویی وزن کرد.</p>

۱	عدد $5a7b24$ بر ۴۴ بخش پذیر است باقیمانده تقسیم این عدد بر ۹ را بیابید.	۱۳
۱/۵	<p>گراف <math>G</math> را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) مجموعه‌های <math>V(G)</math> و <math>E(G)</math> را بنویسید.</p> <p>ب) مقدار <math>\Delta</math> و <math>\delta</math> را مشخص کنید.</p> <p>پ) <math>N_G(V_5)</math> را بنویسید.</p> <p>د) راس ایزوله در گراف کدام است</p>	۱۴
۰/۵	ثابت کنید تعداد راس‌های فرد در هر گراف ساده عددی زوج است.	۱۵
۱	گراف $G$ از مرتبه ۹ و اندازه ۱۱ را در نظر بگیرید اگر این گراف یک رأس از درجه $\delta = 1$ و یک رأس از درجه $\Delta = 4$ داشته باشد درجات رئوس گراف را بنویسید.	۱۶
۰/۷۵	بر روی مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ چند گراف می‌توان رسم کرد به طوری که $dega = 2$	۱۷
۱	گراف ۴-منتظم مرتبه $p$ با افزودن ۴۲ یال به یک گراف کامل تبدیل می‌شود اندازه این گراف را بیابید.	۱۸

موفق و پیروز باشید

دی ۹۷۵

آزمین ریاضیات کلاس

طی

الف) ۴ (۲۵) ب) طبیعی (۲۵) پ) طاقه حلقه (۲۵)

۲ الف) مثال نقض  $x=2, y=\sqrt{x}$  (۲۵)

ب) 
$$P \xrightarrow{P \neq r} P \neq rk \Rightarrow P^r = r^q + 1 \Rightarrow P^{r-1} = r^q \quad (۲۵)$$

ب) 
$$P \xrightarrow{P \neq r} P \text{ فراتر} \Rightarrow P^r = r^q + 1 \Rightarrow P^{r-1} = r^q \Rightarrow P^{r-1} = [r, n] \times r^q \quad (۲۵)$$

$$\Rightarrow P^{r-1} = r^q \quad (۲۵)$$

۳ 
$$a^r + b^r + c^r + 1 \geq r(a+b+c) \Leftrightarrow a^r + b^r + c^r + 1 \geq ra + rb + rc$$

$$\Leftrightarrow a^r + b^r + c^r + 1 - ra - rb - rc \geq 0 \Leftrightarrow (۲۵)$$

$$(a^r - ra + 1) + (b^r - rb + 1) + (c^r - rc + 1) + 1 \geq 0 \quad (۲۵)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^r + (b-1)^r + (c-1)^r + 1 \geq 0 \quad (۲۵) \text{ حراره برقرار است}$$

۴ فرض خلف، فرض کنی  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی فراتر در این صورت هر عدد  $(a_i - b_i)$  و  $(a_r - b_r)$

و  $(a_r - b_r)$  فرید در نتیجه مجموع آنها نیز عددی فراتر خواهد بود نیز  $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$  باید عدد کافرد

ب) عددی حاصل این عبارت  $(a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0$  و عددی زوج است (۲۵)

نابراین فرض خلف باطل و هم سطح برقرار است (۲۵)

۵- فرض خلف، فرض کنی  $\alpha + 2\beta$  عدد گویا باشد در این صورت با توجه گویا بودن  $\alpha + \beta$  و برابر بودن

تفاوت آن دو عدد گویا را داریم  $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \quad (۲۵)$

بنابراین  $\beta$  باید عدد گویا باشد (۲۵) فرض خلف باطل و هم برقرار است (۲۵)





$$\begin{aligned} \Delta |rk+1 &\Rightarrow r\Delta | \varepsilon k^r + \varepsilon k + 1 \quad (\% \Delta) \\ \Delta |rk+1 &\Rightarrow r\Delta | 1 \cdot k^r + \Delta k \quad (\% \Delta) \\ \Delta |rk+1 &\Rightarrow r\Delta | 1 \cdot k + \Delta \quad (\% \Delta) \end{aligned} \Rightarrow r\Delta | (\varepsilon k^r + \varepsilon k + 1) + (1 \cdot k^r + \Delta k) + (1 \cdot k + \Delta)$$

$$\begin{aligned} a = bq + r \quad 0 \leq r < b \\ a = (b-r)(q+\Delta) + 0 \quad (\% \Delta) \\ \Delta b = r\Delta + 1 \Delta \Rightarrow \frac{r}{b-r} = \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (\% \Delta) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} q=0 \\ b-r=\varepsilon \Rightarrow b=7 \end{aligned} \right\} \text{مورد اول} \quad \left. \begin{aligned} q=1 \\ b-r=1 \Rightarrow b=11 \end{aligned} \right\} \text{مورد دوم} \quad \left. \begin{aligned} q=0 \\ b=3 \end{aligned} \right\} \text{مورد سوم} \quad (\% \Delta)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} a=nk \\ b=nk' \end{cases} \Rightarrow a=bq+r \Rightarrow nk=nk'q+r \Rightarrow nk-nk'q=r \\ \Rightarrow n(k-k'q)=r \Rightarrow n|r \quad (\% \Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11\Delta \equiv 1 \pmod{1000} \quad (\% \Delta) \\ \left. \begin{aligned} 3^4 \Delta \equiv 11 \equiv 25 \\ 3^5 \Delta \equiv 75 \equiv 19 \\ 3^6 \Delta \equiv 27 \equiv 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3^{494} \Delta \equiv 1 \Rightarrow 3^{1000} \Delta \equiv 3^4 \equiv 25 \quad (\% \Delta) \\ \Rightarrow 2 \times 3^{1000} - 43 \Delta \equiv 2 \times 25 - 43 \Delta \equiv -13 \Delta \equiv 87 \quad (\% \Delta) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \equiv 26 \equiv \Delta \quad (\% \Delta)$$

اول خرداد این پنجشنبه است تا این ۲۲ من ۵ روز جلوتر یعنی سهشنبه خواهد بود. (10)

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ \equiv & \equiv & \equiv & \equiv \\ 1 & 4 & 7 & 11 \end{matrix} \\
 & \Rightarrow 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \equiv 1 + 4 + 7 + 11 \equiv 23 \pmod{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \begin{matrix} \text{تعداد} \\ \text{تعداد} \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \end{matrix} \Rightarrow 3x + 4y = 19 \Rightarrow 4y \equiv 19 \pmod{3} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y = 3k + 1$$

$$3x + 4(3k + 1) = 19 \Rightarrow x = 5 - 4k$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq 0 \Rightarrow 5 - 4k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow k = 0, k = 1$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \quad k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Delta a \nabla b \times \varepsilon \equiv 0 \Rightarrow (\varepsilon + b + a) - (r + v + \delta) \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv 1$$

$$0 \leq a + b \leq n \Rightarrow a + b = 1$$

$$\Delta a \nabla b \times \varepsilon \equiv \Delta + a + v + b + r + \varepsilon \equiv \overbrace{a + b}^{10} + 11 \equiv 21 \equiv 1$$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_q\} \quad \text{الف 14}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_9v_q\}$$

$$\delta = 0, \Delta = 3$$

$$N_G(v_5) = \{v_4, v_6, v_{10}\}$$

$$v_9$$

۱۵ اثبات کلمه حسی (۶۸)

$P=9$

۱۶

$q=11 \rightarrow 2q=22$  (۶۰)

$$\begin{cases} 1 \rightarrow 1 = \delta \\ 1 \rightarrow 4 = \Delta \\ x \rightarrow 2 \\ 7-x \rightarrow 4 \end{cases}$$

(۶۰)

$1 \times 1 + 1 \times 4 + 2x + (7-x) \times 4 = 22$

$5 + 2x + 28 - 4x = 22 \Rightarrow x = 4$  (۶۵)

$4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$  (۶۰)

دستارهای روس

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$e^a$

۱۷

در این اثبات روش اِس a است و در هر مرحله این دستارهای روس را

$e^b$

$e^c$

$\binom{4}{2} \times 2^2 = 6 \times 2^2 = 3 \times 2^4$  (۶۰)

$d^e$

$k=2 \Rightarrow 2P = 2q \Rightarrow q = 2P$  (۶۵)

۱۸

$q + \epsilon 2 = q_{\max} \Rightarrow 2P + \epsilon 2 = \frac{P(P-1)}{1} \Rightarrow \epsilon P + 2\epsilon = P^2 - P$  (۶۵)

$\Rightarrow P^2 - 2P - 2\epsilon = 0 \Rightarrow (P-12)(P+7) = 0 \rightarrow P = 12$  (۶۵)

$q = 2P = 2 \times 12 = 24$  (۶۰)

