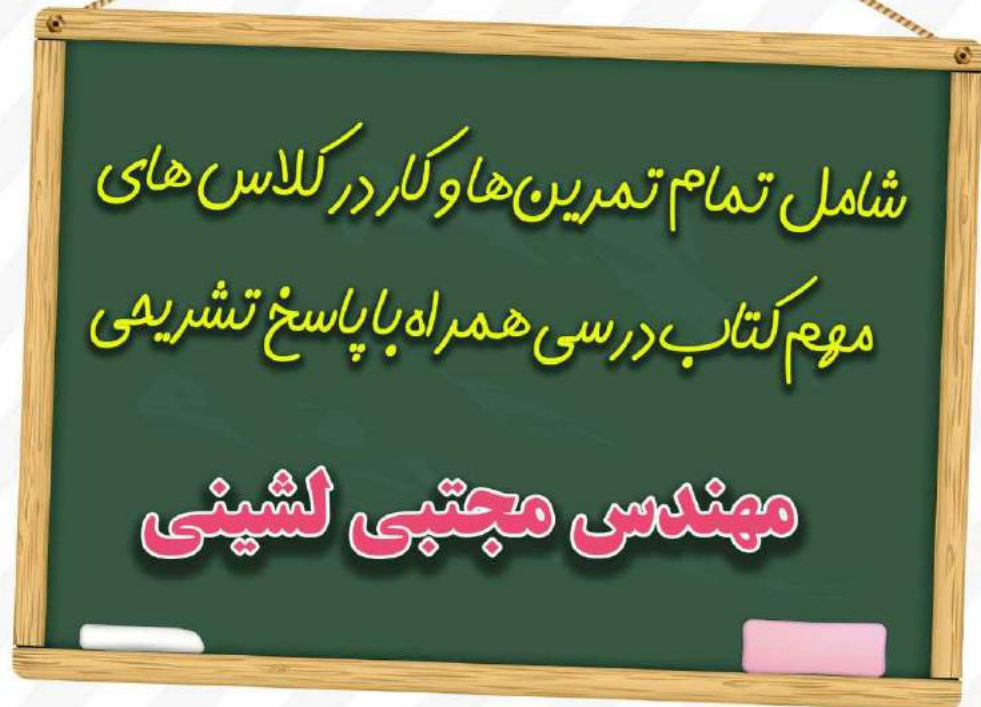




جزوه جمع بندی  
ریاضی دوازدهم

ویژه شب امتحان

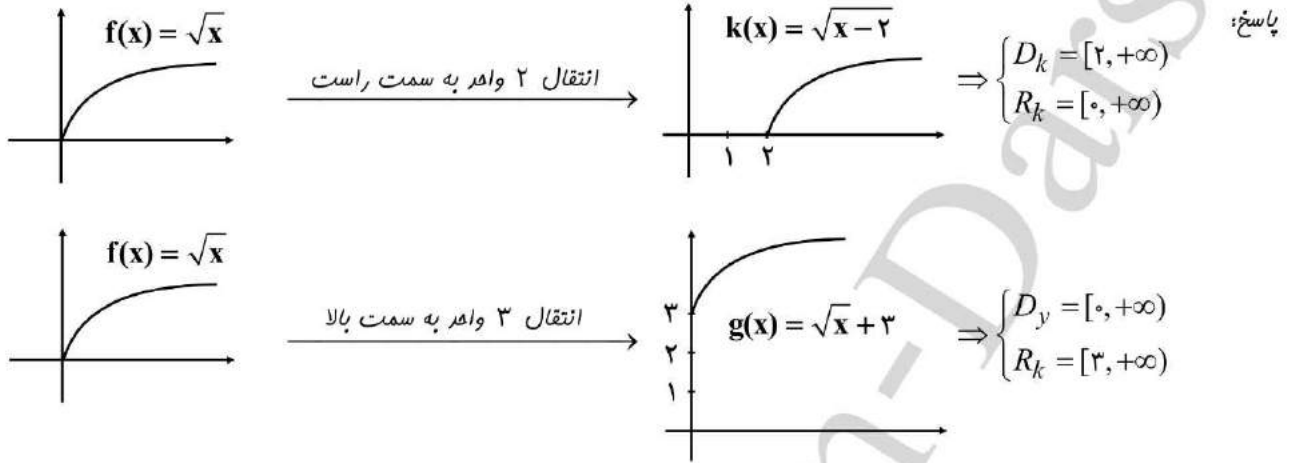


شامل تمام تمرین ها و کار در کلاس های  
مهم کتاب درسی همراه با پاسخ تشریحی

مهندس مجتبی لشرینی

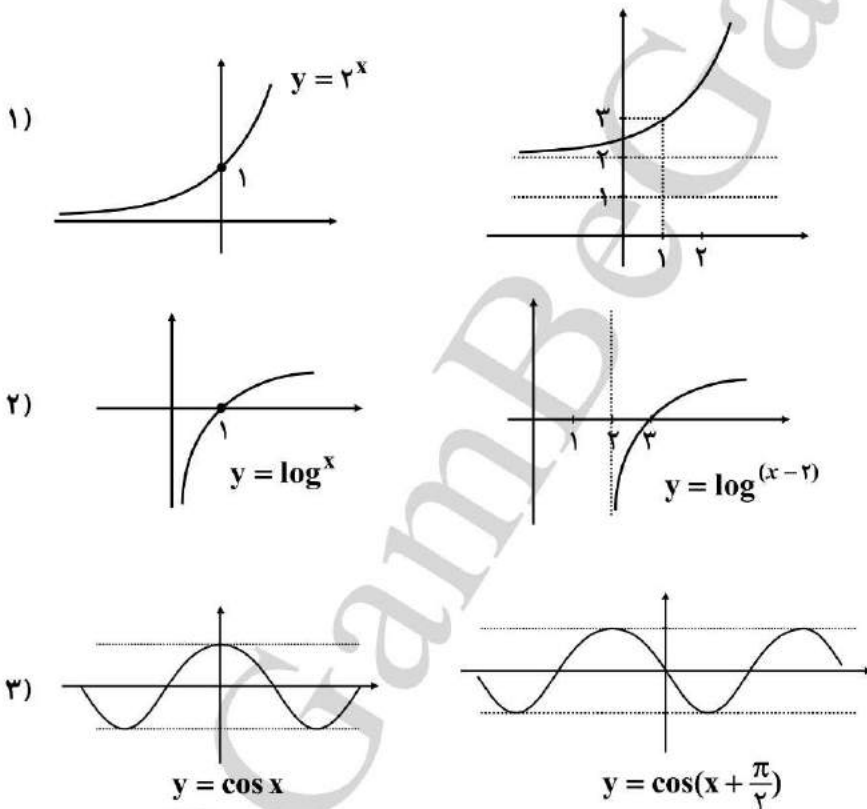


کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.  $f(x) = \sqrt{x}$  نمودار تابع  $k(x) = f(x-2)$  و  $g(x) = f(x)+3$  را به کمک انتقال رسم



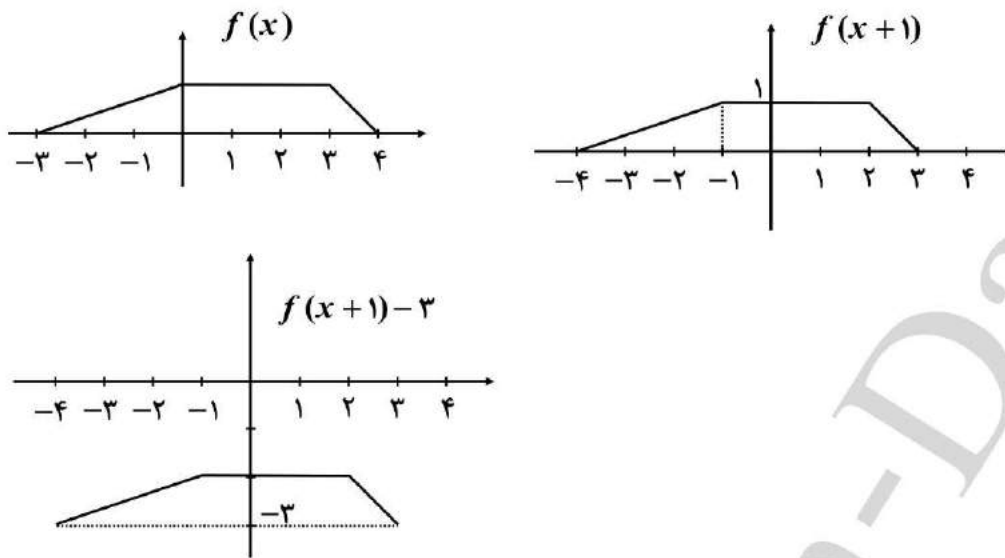
۲- به کمک نمودار توابع  $y = 2^x$  و  $y = \log^x$  و  $y = \cos x$ ، نمودار توابع  $y = 2^{x-1} + 2$  و  $y = \log^{(x-2)}$  و

$y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$  را رسم کنید.





$f$  به صورت روبه‌رو داده شده است. با انتقال عمودی و افقی، نمودار تابع  $y = f(x+1) - 3$  را رسم کنید.



۴- اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد تابع  $y = kf(x)$  را تعیین کنید.

پاسخ: حالت اول:  $k > 0$  چون  $k$  در کل  $f(x)$  ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a, b], R_f = [kc, kd]$$

حالت دوم:  $k < 0$  چون  $k$  در کل  $f(x)$  ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a, b], R_f = [kd, kc]$$

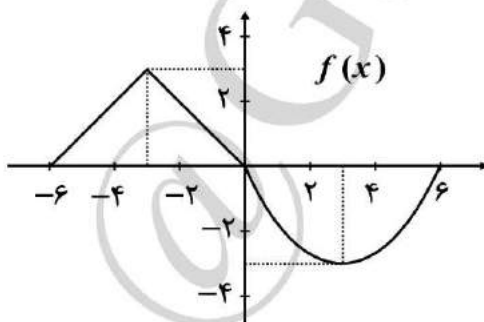
۵- اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد تابع  $y = f(kx)$  را تعیین کنید.

پاسخ: چون  $k$  فقط در  $x$  ضرب شده است پس تاثیری در برد ندارد.

$$I) k > 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right], R_f = [c, d]$$

$$II) k < 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{b}{k}, \frac{a}{k}\right], R_f = [c, d]$$

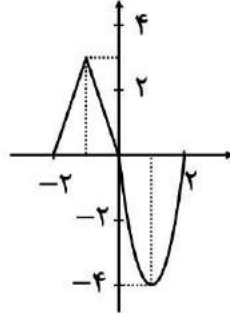
۶- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشند، نمودار تابع  $y = f\left(\frac{-x}{2}\right)$  و  $y = f(3x)$  را رسم کنید.



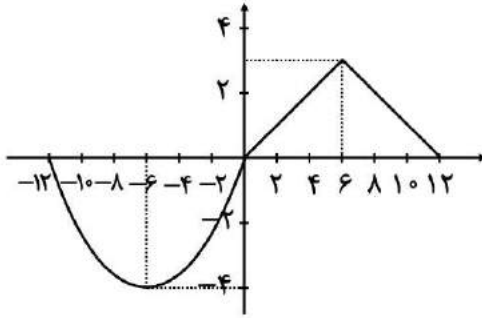




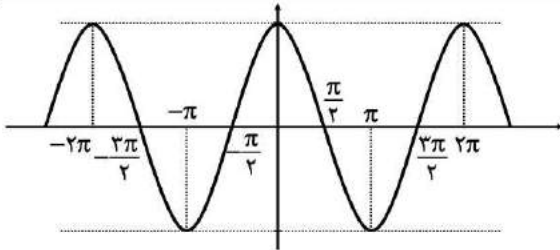
$$y = f(3x)$$



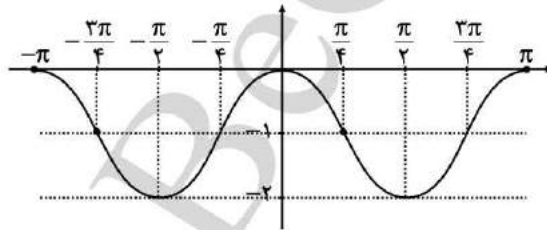
$$y = f\left(\frac{-x}{2}\right)$$



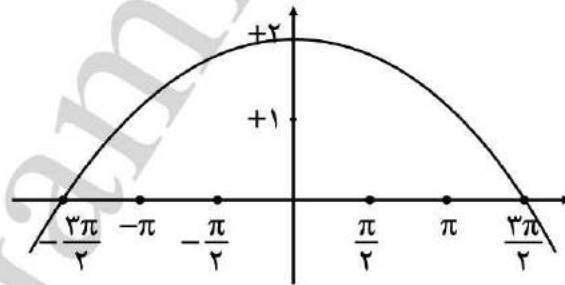
۷- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = \cos x$  رسم کنید:



$$1) y = \cos 2x - 1$$



$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$





۸- هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع  $y = \sqrt{x}$  هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف)  $y = \sqrt{2+x}$  a

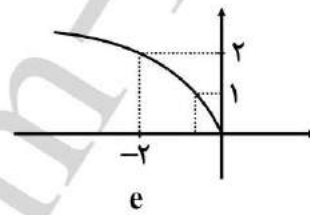
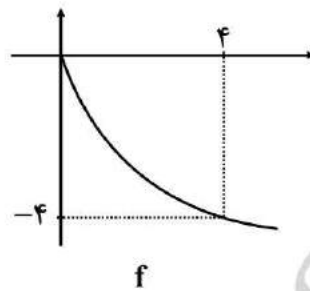
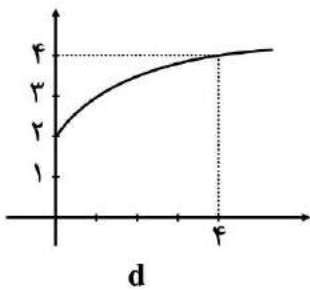
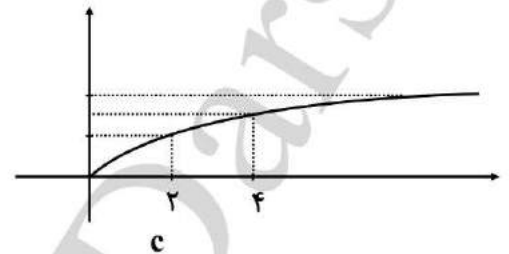
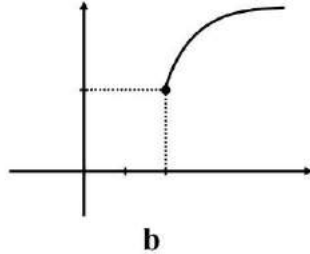
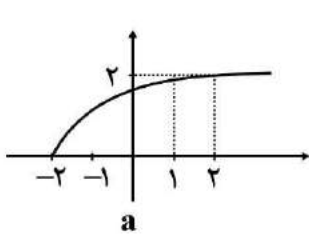
ب)  $y = 2 + \sqrt{x}$  d

پ)  $y = -2\sqrt{x}$  f

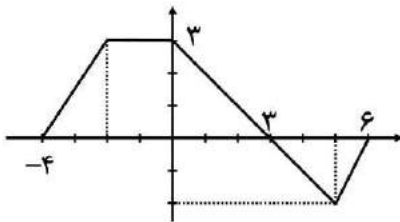
ت)  $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$  c

ث)  $y = 2 + \sqrt{x-2}$  b

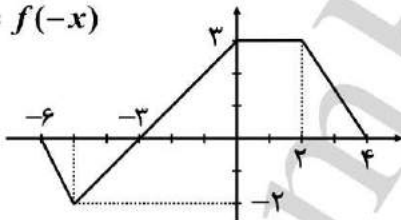
ج)  $y = \sqrt{-2x}$  e



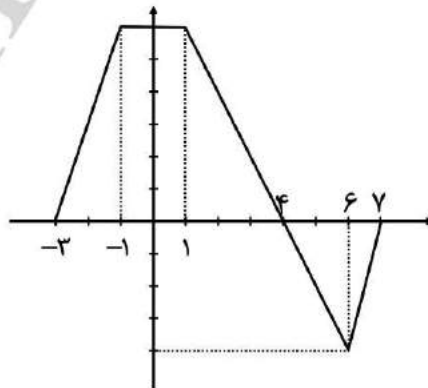
۹- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



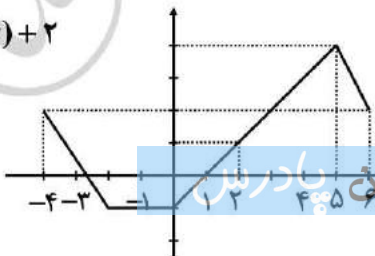
الف)  $y = f(-x)$



ب)  $y = 2f(x-1)$

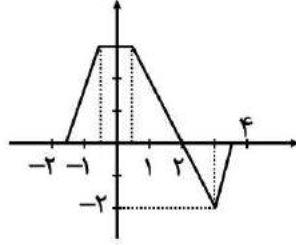


پ)  $y = -f(x) + 2$

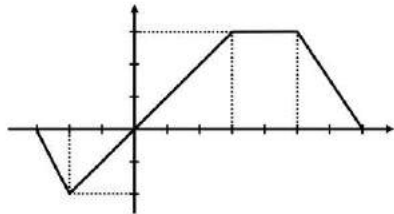




ت)  $y = f(2x-1)$



ث)  $y = f(3-x)$

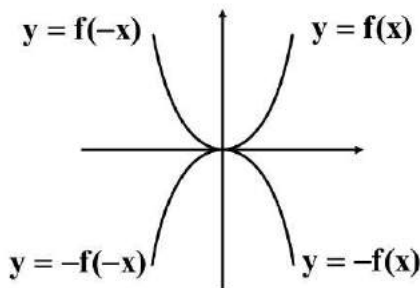


۱۰- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را به کمک آن رسم کنید.

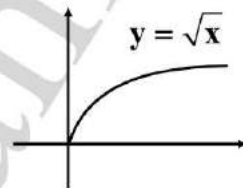
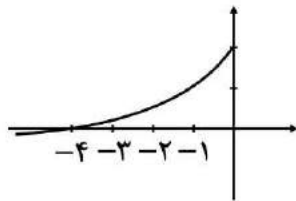
الف)  $y = f(-x)$

ب)  $y = -f(x)$

پ)  $y = -f(-x)$



۱۱- نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  بدست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



پاسخ: می‌دانیم نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به صورت مقابل است:

حال برای رسیدن به نمودار تابع داده شده باید نمودار تابع  $g = \sqrt{x}$  را نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  قرینه و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:

$$-f(-x) + 2 = -\sqrt{-x} + 2 \Rightarrow y = 2 - \sqrt{-x}$$

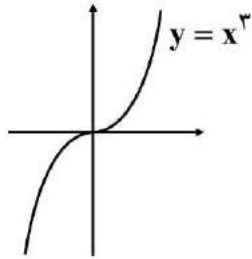




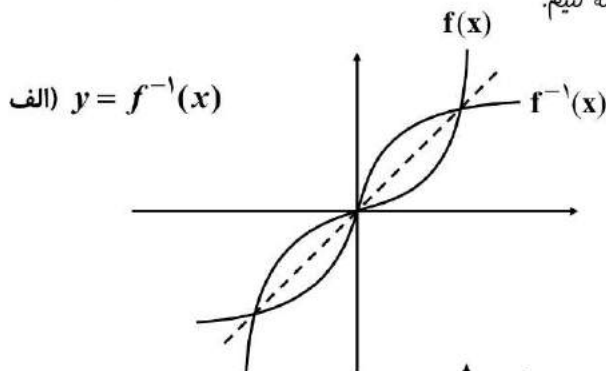


## سوالات مربوط به تابع درجه سوم

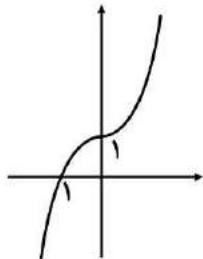
۱- به کمک نمودار تابع  $f(x) = x^3$ ، نمودارهای زیر را رسم کنید:



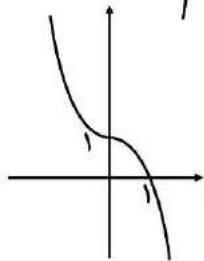
پاسخ: برای رسم تابع وارون، کافی است نمودار را نسبت به خط  $y = x$  قرینه کنیم.



ب)  $y = (x+1)^3$



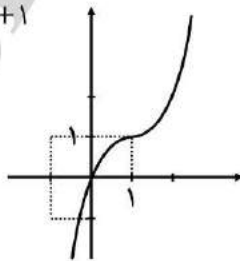
پ)  $y = -x^3 + 1$



ت)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

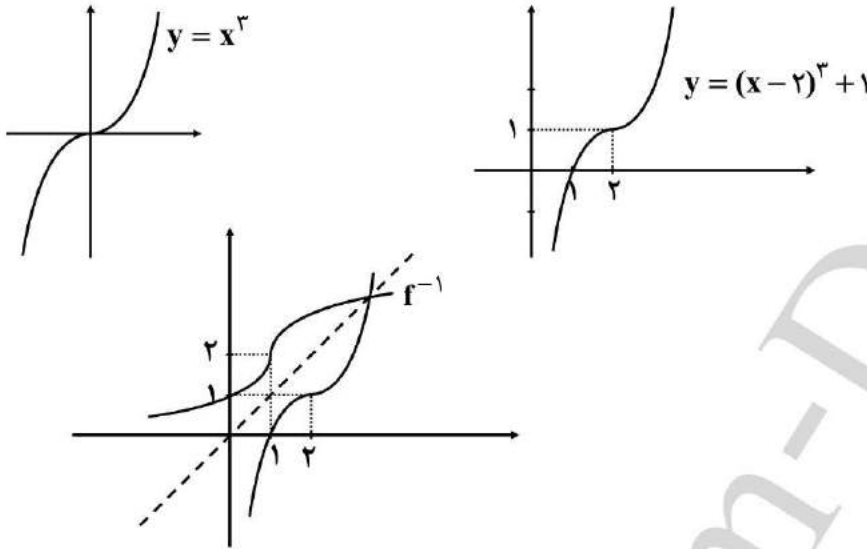
پاسخ: برای رسم این تابع می‌توانیم ابتدا عدد ۱ را اضافه و کم کنیم تا بتوانیم اتحاد مکعب تشکیل دهیم.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1$$





۲- الف) نمودار تابع  $y = (x-2)^3 + 1$  را به کمک تابع  $y = x^3$  رسم کنید.  
 ب) نمودار تابع  $f^{-1}(x)$  را رسم و سپس ضابطه‌ی آنرا بیابید.



$$y = (x-2)^3 + 1 \rightarrow x = (y-2)^3 + 1 \rightarrow (y-2)^3 = x-1$$

$$\Rightarrow y-2 = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

### سوالات مربوط به توابع صعودی و نزولی

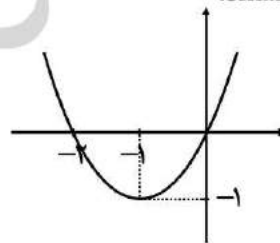
۱- نمودار توابع  $y = x^2 + 2x$  و  $y = 2^{-x}$  و  $y = |x+2|$  را رسم کنید و مشخص کنید این توابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند.

الف)  $y = x^2 + 2x$  عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم  $\rightarrow$

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

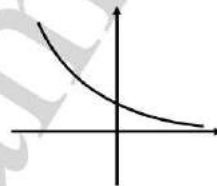
$(-\infty, -1] \rightarrow$  اکیداً نزولی

$[-1, +\infty) \rightarrow$  اکیداً صعودی



ب)  $y = 2^{-x}$

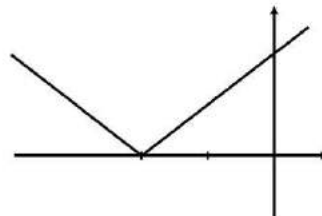
$(-\infty, +\infty) \rightarrow$  اکیداً نزولی



پ)  $y = |x+2|$

$(-\infty, -2] \rightarrow$  اکیداً نزولی

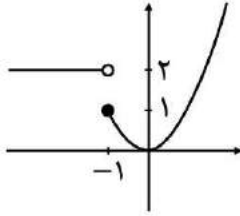
$[-2, +\infty) \rightarrow$  اکیداً صعودی







۲- نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$  را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



نزولی  $\rightarrow (-\infty, 0]$   
صعودی  $\rightarrow [0, +\infty)$

۳- فرض کنید تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این فاصله باشد. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \leq b$ .

پاسخ: از برهان فلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $a > b$  باشد پس باید  $f(a) > f(b)$  می‌باشد و از طرفی چون تابع اکیداً صعودی است پس این نتیجه خلاف فرض است.

۴- اگر  $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود  $x$  را بدست آورید.

پاسخ: چون مبنای لگاریتم بزرگتر از یک است داریم:

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \Rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

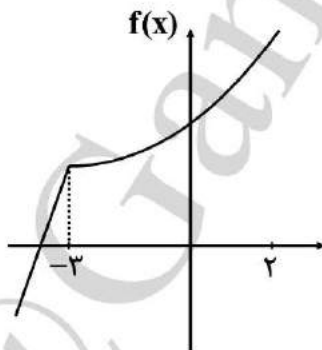
۵- فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه اکیداً نزولی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این بازه باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$ ، نشان دهید که  $a \geq b$ .

پاسخ: از برهان فلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $b > a$  باشد پس باید  $f(a) > f(b)$  شود که این نتیجه خلاف فرض است.

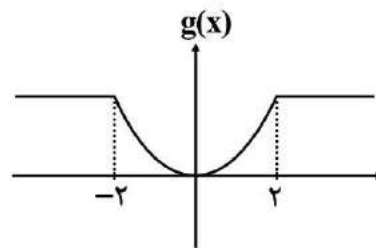
۶- اگر  $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود  $x$  را بدست آورید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow[\text{تابع نزولی است و داریم}]{\text{چون مبنای بین صفر تا یک است}} 6 \geq 3x-2 \Rightarrow x \leq \frac{8}{3}$$

۷- نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  در زیر رسم شده‌اند مشخص کنید تابع  $f$  در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی و تابع  $g$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



$\begin{cases} x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ x \in (-\infty, +\infty) \rightarrow \text{صعودی} \end{cases}$

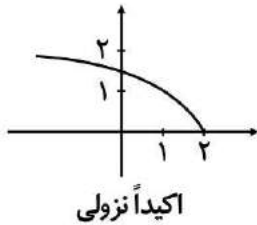


$\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \rightarrow \text{نزولی} \\ x \in [-2, 0] \rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$

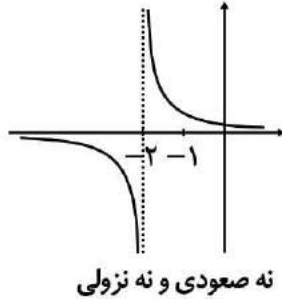


۸- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در دامنه خود، اکیداً یکنوا هستند؟

الف)  $f(x) = \sqrt{2-x}$



ب)  $g(x) = \frac{1}{x+2}$



ج)  $h(x) = \log_3 x$



### سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای  $x^3 + x - 1$  بر  $2x + 1$  را بدست آورید:

پاسخ: برای بردست آوردن باقی مانده کافی است ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{باقی مانده } R(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{-13}{8}$$

۲- اگر چند جمله‌ای  $x^2 + ax - 2$  بر  $x - a$  بخش پذیر باشد، مقدار  $a$  را تعیین کنید.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است، پس باقی مانده برابر صفر می باشد.

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$R(x) = a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 2 \rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۳- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای  $x^3 + kx^2 + 2$  بر  $x - 2$  برابر ۶ باشد،  $k$  را تعیین کنید.

پاسخ: اگر مقسوم را برابر  $f(x)$  در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow (2)^3 + k(2)^2 + 2 = 6 \Rightarrow 4k = -4 \rightarrow k = -1$$

۴- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای  $x^3 + ax^2 + bx + 1$  بر  $x - 2$  و  $x + 1$  بخش پذیر باشد.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(-1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{پاسخ: چون مقسوم بر } x - 2 \text{ و } x + 1 \text{ بخش پذیر است، پس:}$$

$$f(2) = (2)^3 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 0 \rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 \rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$4a + 2b = -9 \xrightarrow{a=b} 4b + 2b = -9 \rightarrow 6b = -9 \rightarrow b = -\frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵- چند جمله‌ای‌های  $x^5 - 1$  و  $x^6 - 64$  را به کمک اتحادها باز کنید.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$





۶- عبارت  $x^5 + 1$  را بر حسب  $(x+1)$  تجزیه کنید:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۷- هر یک از چندجمله‌های زیر را بر حسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید:

الف)  $x^6 - 1$  بر حسب  $x-1$

$$(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب)  $x^6 - 1$  بر حسب  $x+1$

$$(x^6 - 1) = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

پ)  $x^5 + 32$  بر حسب  $x+2$

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

