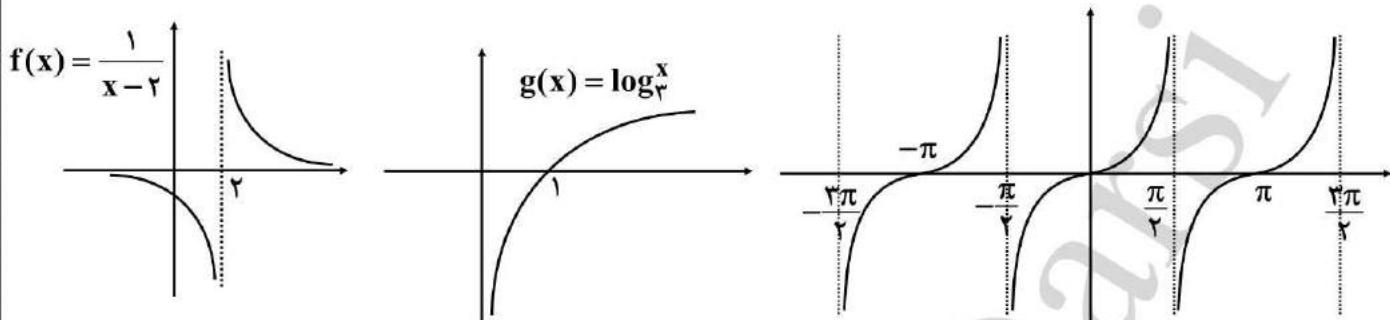


۱- نمودار توابع  $f$  و  $g$  و  $h$  در شکل‌های زیر داده شده‌اند، با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

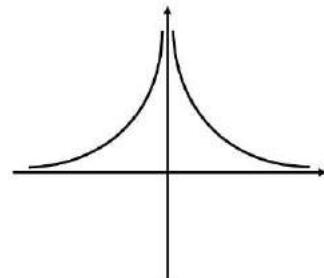
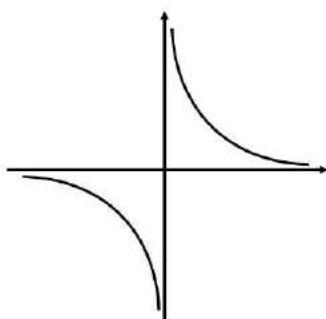
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (+\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

۲- با استفاده از نمودار توابع داده شده حدود زیر را بدست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = -\infty \end{cases}$$

۳- حاصل حد‌های زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = \frac{\text{در ناهیه اول قرار}}{\text{میگیرد و }} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sin x} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1-x}{x+1} = \frac{1+2}{(-1)^++2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x|-2}{x-2} = \frac{\text{ابتدا هرمه صحیح را به عدد تبدیل کن}}{[2^-] = 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-2}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



۴- تابع  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  و  $g(x) = x + 1$  را در نظر بگیرید.

الف) حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  را بدست آورید.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) = 1 \end{cases}$$

ب) تابع  $f + g$  را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f + g)(x)$  را محاسبه کنید.

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2} + (x + 1) = \frac{1+x^3+x^2}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2} = \frac{1}{(0)^2} = +\infty$$

پ) تابع  $f \cdot g$  را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x)$  را محاسبه کنید.

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (x + 1) = \frac{x+1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x^2} \right) = \frac{1}{(0)^2} = +\infty$$

۵- حاصل حد های زیر را بدست آورید و مشخص کنید در هر مرحله از کدام قضیه استفاده کرده اید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+1}{-\infty} = -\infty \Rightarrow$  قضیه ۳

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty \Rightarrow$  قضیه ۵

پ)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow$  قضیه ۳

ت)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{2 - 1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$  قضیه ۳

۶- با استفاده از قضایای حد نامتناهی درستی حد های زیر را نشان دهید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|\Delta-x|}{|\Delta+x|} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|\Delta-x|}{\lim_{x \rightarrow -2} |\Delta+x|}$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} |\Delta-x| = |\Delta - (-2)| = \gamma \\ \lim_{x \rightarrow -2} |\Delta+x| = 0^+ \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|\Delta-x|}{|\Delta+x|} = +\infty$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} (1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0^+$

$\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$





۷- حد های زیر را بدست آورید.

(الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{2}{\frac{x^2 - 4}{x}} = \frac{2}{-\infty} = -\infty$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\underbrace{x^2 + 2x - 1}_{(x-3)(x+4)}}{x^2 + x - 12} = \frac{14}{-\infty} = -\infty$

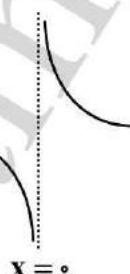
(ب)  $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3+1}{9-(9^+)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

### سوالات مربوط به مجانب قائم

۱- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$  در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

برای یافتن مجانب قائم می توانیم ریشه های مخرج را بدست آوریم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$



۲- مجانب های قائم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$  را در صورت وجود بدست آورید.

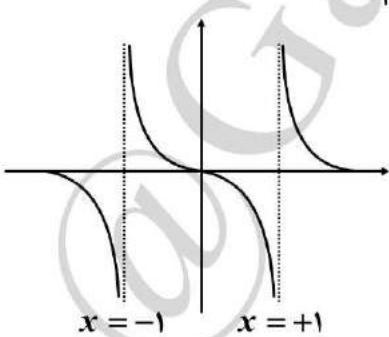
ابتدا ریشه های مخرج را بدست می آوریم.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{9-9+2}{9-3-6} = \frac{2}{-6} = -\infty \Rightarrow x = 3 \text{ مجانب قائم است.}$$

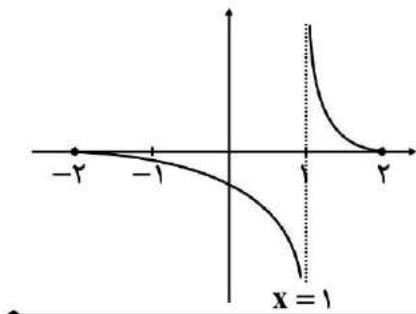
$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{4+6+2}{4+2-6} = \frac{12}{-6} = \infty \Rightarrow x = -2 \text{ مجانب قائم است.}$$

۳- نمودار تابعی رارسم کنید که دامنه آن  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.





۴- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه  $\{1, 2, 3\}$  بوده و دارای مجذوب قائم باشد.



۵- مجذوب‌های قائم تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

(الف)  $f(x) = \frac{2x-1}{3-x} \Rightarrow 3-x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0} = \infty$

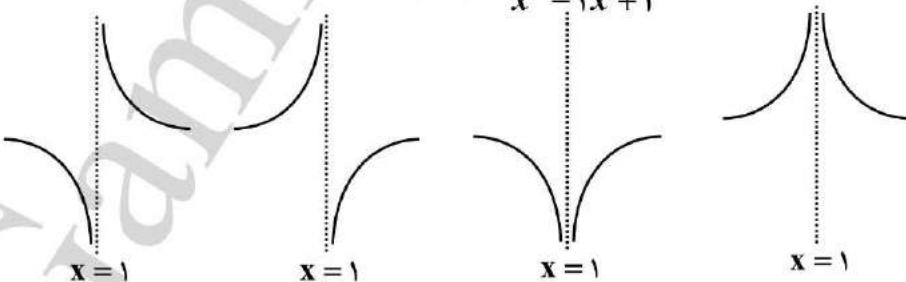
(ب)  $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} \Rightarrow x^2-x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = -1 \Rightarrow x = 0$  مجذوب قائم نیست.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x = 1$  مجذوب قائم است.

۶- نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$  در مجاورت مجذوب قائم خود چگونه است؟

۷- کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$  را در همسایگی  $x=1$  نمایش می‌دهد؟



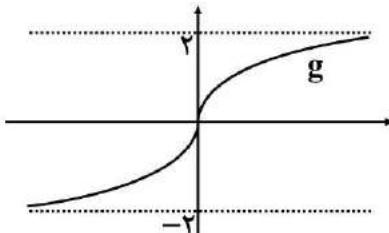
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



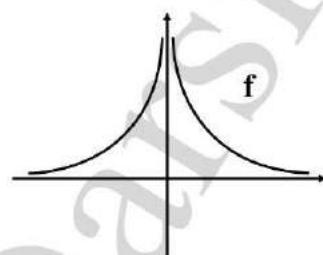


## سوالات مربوط به حد در بی‌نهایت

۱- با استفاده از نمودارهای  $f$  و  $g$  حد های زیر را بدست آورید.

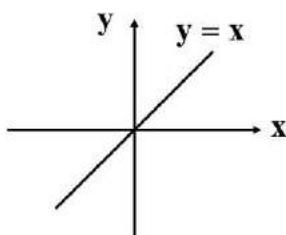
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$

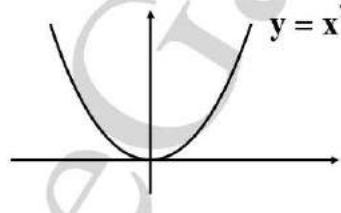


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

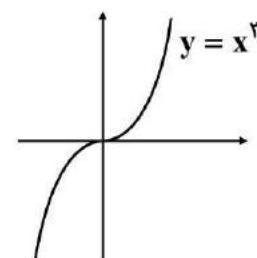
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

۲- مفاهیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  را بیان کنید.یعنی با کاهش مقدار  $x$  از هر عدد دلخواهی، مقادیر  $(x)$   $f$  از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتر می‌شود.یعنی با کاهش مقدار  $x$ ، مقادیر  $(x)$   $f$  از هر عدد دلخواه منفی، کوچکتر می‌شود.۳- با توجه به نمودار توابع  $y = x^r$ ,  $y = x^r$  و  $y = x^r$  حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = -\infty$$

۴- با استفاده از قضیه ۷ حاصل حد های زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x^r}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{5}{x^r}) = 3 + 0 = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^r}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{3}{x^r})}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{5}{x}) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4)} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

۵- (الف) اگر  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  و  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm} \frac{a_n}{b_n} \cdot x^{n-m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$



ب) در هر یک از حالت‌های  $m > n$  و  $m < n$  و  $m = n$  حدهای قسمت قبل به چه صورتی نوشته می‌شود؟

$$m > n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \gg f(x).$$

$$m = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{a_m}$$

$$n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \gg g(x) \rightarrow \pm\infty$$

۶- مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ : هر په مقادیر  $x$  بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر  $f(x)$  به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ : هر په مقادیر  $x$  کوچک و کوچکتر شود، مقادیر  $f(x)$  به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۷- برای تابع  $f$  که نمودار آن داده شده است، موارد زیر را بدست آورید.

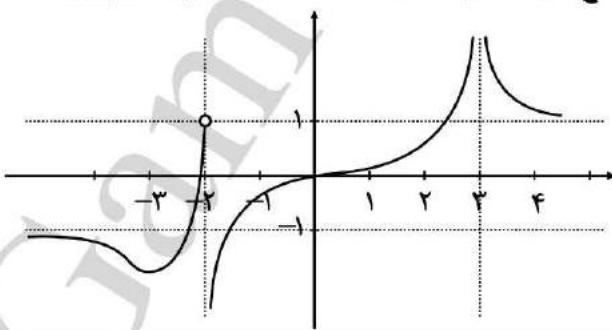
۱)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$

۲)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

۳)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

۴)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

۵)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$



۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 4x + 1}{2x^3 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1} = \pm\infty$

۲)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x + 1}{5x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3}{5x^3} = -\frac{3}{5}$

۳)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

۴)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x + \Delta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x} = 3$

۵)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^r + 1}{t^r - 4t^r + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^r}{t^r} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$

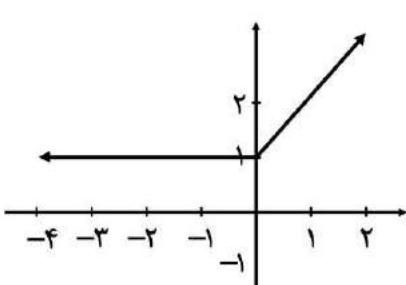
۶)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^r + 2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^r}{4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x) = \mp\infty$

۷)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^r - 2x^r) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^r) = -\infty$

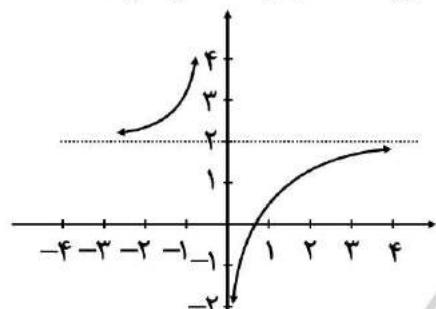
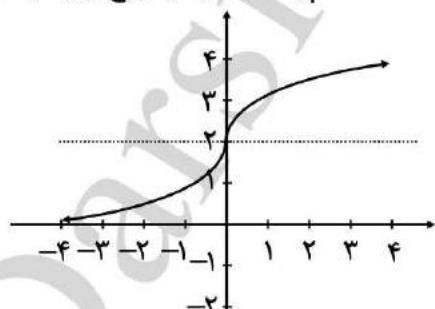


## سوالات مربوط به مجانب افقی

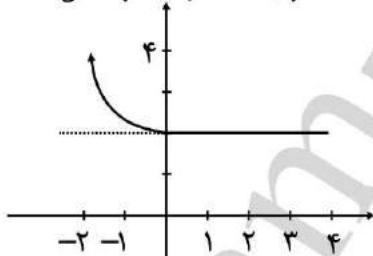
۱- کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی است؟ آن را مشخص کنید.



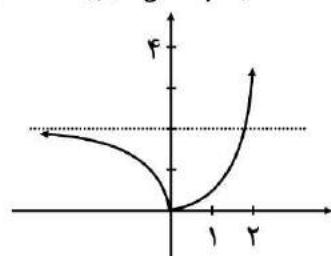
(پ) مجانب افقی ندارد

(ب)  $y = 2$  مجانب افقی

(الف) مجانب افقی ندارد



(ث) مجانب افقی ندارد

(ت)  $y = 2$  مجانب افقی دارد.

۲- مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$(الف) f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

جانب افقی ندارد.  $x \rightarrow \pm\infty$

$$(ب) g(x) = x^r \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^r = \pm\infty$$

جانب افقی ندارد.  $x \rightarrow \pm\infty$

۳- مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$(الف) y = \frac{2x-1}{x-3}$$

جانب قائم

جانب افقی

$$(ب) y = \frac{1+2x^r}{1-x^r}$$

جانب قائم  $-1 < r < 1$

جانب افقی

$$(ب) y = \frac{x}{x^2-4}$$

جانب قائم  $x = 2 \rightarrow x = -2$

جانب افقی  $y = 0$

$$(ت) y = \frac{2x}{1+x^2}$$

جانب قائم ندارد.  $y = 0$

۴- نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

$$(الف) f(-1) = f(-2) = 0$$

$$(ب) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

(پ) خط  $-1 = y$  مجانب افقی آن باشد.

