«باسمه تعالی»

اداره آموزش و پرورش منطقه۴تهران

جای مهر

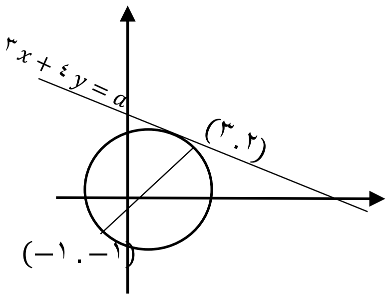
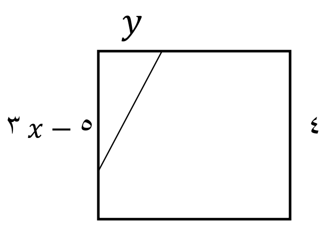
دبیرستان نمونه دولتی ابوعلی سینا متوسطه دوم امتحانات: **پایانی اول**

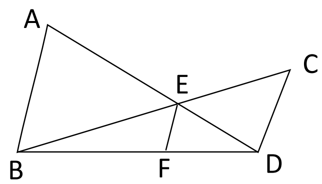
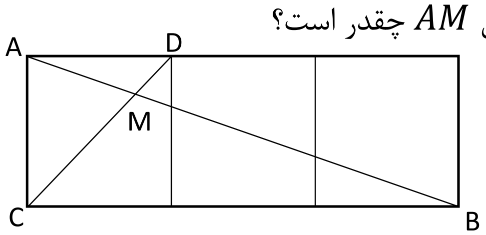
نام و نام خانوادگی:

کلاس: امتحان: **ریاضی ۲** پایه: **یازدهم** رشته: **تجربی** تاریخ امتحان: **۱۴۰۰/۱۰/۲۵**

شماره صندلی: مدت زمان: ۹۰ دقیقه

نام دبیر: آقای لطفی‌زاده تعداد صفحات:

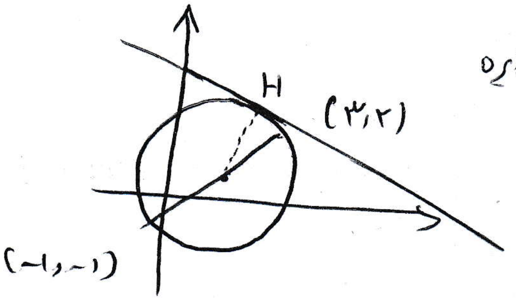
ردیف	فرزندان خوبم با یاد خدا و ذکر صلوات بر پیامبر مهربانی‌ها و خاندان مطهرش به سوالات زیر با دقت پاسخ دهید.	بارم
۱	دو انتهای قطر دایره‌ای نقاط $(-۱ . -۱)$ و (۳.۲) هستند. اگر این دایره بر خط $۳\,x + ۴\,y = a$ مماس باشد، aرا بیابید. 	۱/۵
۲	به ازای کدام مقادیر m ، مجموع مربعات ریشه‌های معادله زیر برابر ۶ است. $mx^۲ - (m + ۳)x + ۵ = ۰$	۱/۵
۳	در مربع زیر از دو ضلع مجاور هم، به اندازه y و $۳\,x - ۵$ واحد به گونه‌ای جدا می‌کنیم که مجموع آن‌ها برابر طول ضلع مربع شود. حداکثر مساحت مثلث ایجاد شده چقدر است؟ 	۱/۵

۴	معادله مقابل را حل کنید و جواب‌های قابل قبول را معلوم نمایید. $\sqrt{x^۲ + ۴x + ۵} = (x + ۱)(x + ۳)$	۱/۵
۵	در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۸\sqrt{۳}$ ، اندازه شعاع دایره محیطی آن چقدر است؟	۲
۶	در شکل روبرو $AB \parallel CD \parallel EF$ است. ثابت کنید: $\frac{۱}{EF} = \frac{۱}{AB} = \frac{۱}{CD}$ 	۲
۷	در شکل مقابل سه مربع به ضلع واحد کنار هم قرار دارند طول AM چقدر است؟ 	۲

۸	تابع $f(x) = \frac{\|x\|}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]$ را در فاصله $-۲ < x < ۳$ رسم کنید. سپس برد آن را بدست آورید.	۲
۹	دامنه تابع مقابل را بیابید. $f(x) = \frac{\|x\|-[x]}{[x]^{۲}-۳[x]-۱۰}$	۲
۱۰	اگر تابع $y = ۲\|x-۱\|+۳$ در بازهٔ $[a\,.\,+\infty]$ یک‌به یک باشد، چه مقادیری می‌تواند داشته باشد، چرا؟	۲
۱۱	اگر $f(x) = x\|x-۲\|$ و $D_f = (۱\,.\,۲)$ ، آنگاه اولاً نشان دهید که f یک‌به یک است. ثانیاً ضابطه معکوس f را محاسبه کنید.	۲

۱۲	اگر طول عقربه ساعت‌شمار یک ساعت برابر ۱۵ سانتی‌متر باشد، مسافت طی شده توسط نوک عقربه ساعت شمار بعد از ۹ دقیقه چند سانتی‌متر است؟	
۱۳	در دایره‌ای به شعاع ۱۲متر، طول کمانی از این دایره ۹متر است زاویه مرکزی مقابل به این کمان چند رادیان است؟	
	نمره با عدد .... **با حروف** .... **امضا و تاریخ**	

۱-



$O\left(1, \frac{1}{2}\right)$ مرکز دایره

$2R = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{2}$

$OH = \frac{|3+2-a|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5-a = \pm\frac{25}{2}$

$5-a = \frac{25}{2} \rightarrow \boxed{\frac{-15}{2} = a}$

$5-a = -\frac{25}{2} \rightarrow \boxed{\frac{35}{2} = a}$

۲-

$mx^2-(m+3)x+5=0$

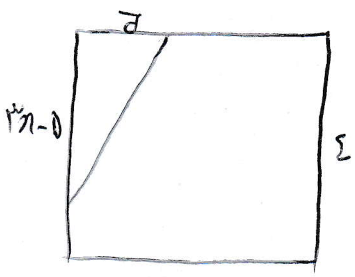
$x_1^2+x_2^2 = 6 \Rightarrow S^2-2P = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} = 6 \Rightarrow$

$m^2+9+6m-10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2+4m-9=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \ \times \\ \boxed{m=\frac{-9}{5}} \end{cases}$

اگر $m=1 \rightarrow x^2-4x+5=0 \ \times$

اگر $m=-\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2-\frac{6}{5}x+5=0 \rightarrow 9x^2+6x-25=0 \ \checkmark \ \Delta>0$

۳-



$3x-5+y=4 \rightarrow \boxed{y=-3x+9}$

$S_\Delta = \frac{y(3x-5)}{2} = \frac{(-3x+9)(3x-5)}{2} \Rightarrow$

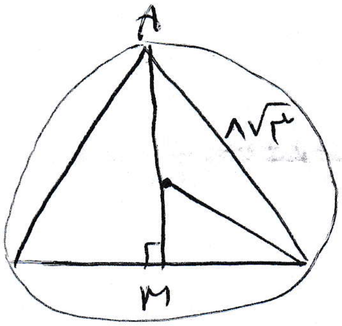
$S = -\frac{9}{2}x^2+21x-\frac{45}{2} \rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{-21}{-9} = \boxed{\frac{7}{3}}$

$x=\frac{7}{3} \rightarrow S_{Max} = -\frac{9}{2}\left(\frac{49}{9}\right)+21\left(\frac{7}{3}\right)-\frac{45}{2} = -\frac{49}{2}+49-\frac{45}{2} = \boxed{2}$

$\sqrt{x^2+4x+5} = (x+1)(x+3) \rightarrow \sqrt{x^2+4x+5} = x^2+4x+3 \rightarrow$ ٤-

$x^2+4x+3=A$ $\quad \sqrt{A+2} = A \xrightarrow{\text{توان ۲}} A+2=A^2 \rightarrow A^2-A-2=0 \ \begin{cases} A=-1 \\ A=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+4x+3=-1 \rightarrow x^2+4x+4=0 \rightarrow \boxed{x=-2} \ \times \\ x^2+4x+3=2 \rightarrow x^2+4x+1=0 \rightarrow \boxed{x=-2\pm\sqrt{3}} \ \checkmark \end{cases}$

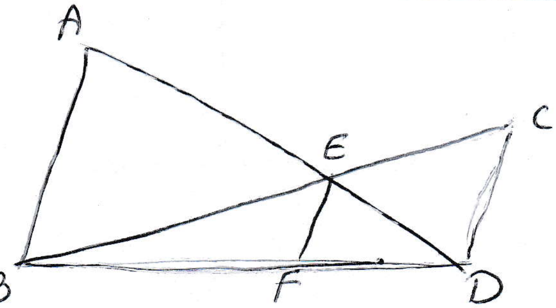


۵- در مثلث متساوی الاضلاع، میانه و عمود منصف بر هم منطبق هستند

طول میانه

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}(8\sqrt{3}) = \boxed{12}$$

$$\text{شعاع دایره محیطی} = \frac{2}{3} \times 12 = \boxed{8}$$



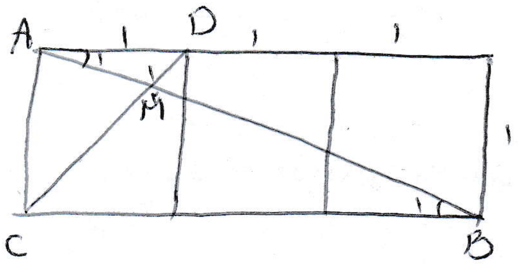
۶-

$$\overset{\triangle}{ABD}: \frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BD} \quad (EF \parallel AB)$$

$$\overset{\triangle}{BCD}: \frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BD} \quad (EF \parallel CD)$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو طرف}} \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = \overbrace{\frac{FD}{BD} + \frac{BF}{BD}}^{1} \Longrightarrow EF\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}}$$



۷-

$$AB^2 = 9 + 1 = 10 \Longrightarrow \boxed{AB = \cancel{\pm}\sqrt{10}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \ (\text{موازی و مورب}) \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \ (\text{متقابل به رأس}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AMD} \sim \overset{\triangle}{MCB}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MB} \Longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{AM}{\sqrt{10} - AM} \Longrightarrow \sqrt{10} - AM = 3AM$$

$$\rightarrow 4AM = \sqrt{10} \rightarrow \boxed{AM = \frac{\sqrt{10}}{4}}$$

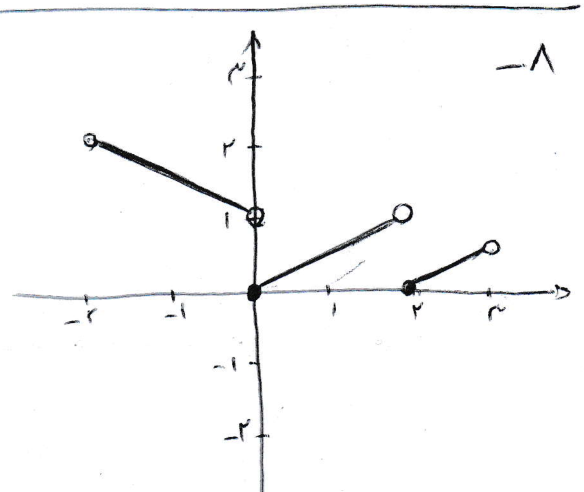
۸-

$$y = \frac{|x|}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] \quad -2 < x < 3 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < \frac{3}{2}$$

$$-1 < \frac{x}{2} < 0 \rightarrow -2 < x < 0 \rightarrow y = -\frac{x}{2} + 1 \qquad \begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$0 \leq \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 0 \leq x < 2 \rightarrow y = \frac{x}{2} \qquad \begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$$1 \leq \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \rightarrow 2 \leq x < 3 \rightarrow y = \frac{x}{2} - 1 \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$



$$R = [0, 2) - \{1\}$$

۹ـ

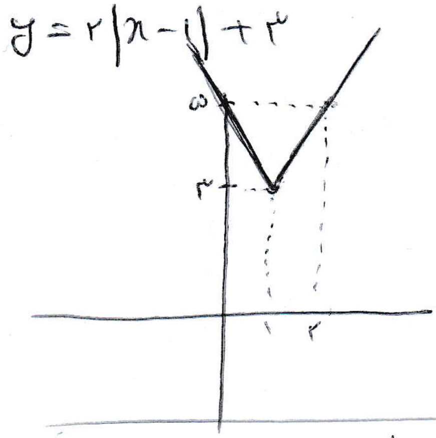
$$f(x) = \frac{|x| - [x]}{[x]^2 - 3[x] - 10}$$

$$[x]^2 - 3[x] - 10 = 0 \longrightarrow ([x]-5)([x]+2) = 0 \quad \begin{cases} [x]=5 \to x \in \boxed{[5,6)} \\ [x]=-2 \to x \in \boxed{[-2,-1)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \big([-2,-1) \cup [5,6)\big) = \boxed{(-\infty,-2) \cup [-1,5) \cup [6,+\infty)}$$

۱۰ـ

$y = 2|x-1| + 3$



این تابع در فاصله $[1,+\infty)$ یا $(-\infty,1]$ یک به یک می‌باشد. پس:

$$\boxed{a \geq 1}$$

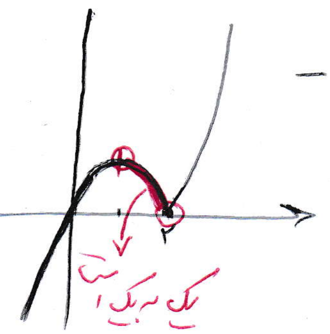
۱۱ـ

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & : x < 2 \end{cases}$$

x	0	1	2
x^2-2x	0	-1	0

x	0	1	2
$-x^2+2x$	0	1	0

$D_f = (1,2)$



$R_f = (0,1)$

معکوس: $y = x|x-2| \xrightarrow{1<x<2} y = -x^2 + 2x$

$\xrightarrow{\text{معکوس}} x = -y^2 + 2y \longrightarrow y^2 - 2y + x = 0 \longrightarrow (y-1)^2 - 1 + x = 0 \longrightarrow$

$D_{f^{-1}} = R_f$

$$(y-1)^2 = -x+1 \longrightarrow y - 1 = \pm\sqrt{1-x} \longrightarrow \boxed{y = 1 \pm \sqrt{1-x} \quad ; \quad 0 < x < 1}$$

۱۲ـ