ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۲) یازدهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شـده: آزمون‌های شـمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شـما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ تا ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شـده: آزمون‌های شـمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشـده: آزمون‌های شـمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشـابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شـب امتحانی: این قسـمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۲ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار، موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

فصل اول

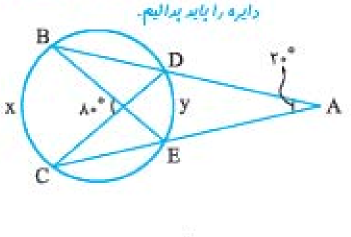
درس اول

۱ اوضاع نسبی خط و دایره را با رسم شکل بیان کنید. — ۱/۵

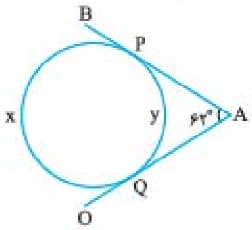
۲ ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. — ۱/۲۵

۳ مقادیر مجهول را بیابید. (در قسمت (ب) AP و AQ بر دایره مماس هستند.) — ۱/۵

اندازه‌های زاویه‌های درونی و بیرونی در دایره را باید بدانیم.



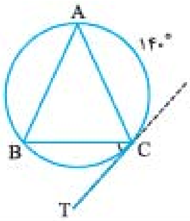
(الف)



(ب)

۴ در شکل روبه‌رو $AB = AC$، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰$ است. اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{C}T$ چه‌قدر است؟ — ۰/۷۵

ویژگی‌های زاویه‌های ظلی و محاطی در دایره



درس دوم

۵ قضیه: هرگاه دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M داخل دایره، همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه ثابت کنید:
$MA \times MB = MC \times MD$ — ۱/۲۵

اولین قضیهٔ رابطهٔ طولی بسیار مهم است.

۶ طریقهٔ رسم مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ متخارج را با رسم شکل به طور دقیق بیان و طول آن را پیدا کنید. — ۱/۷۵

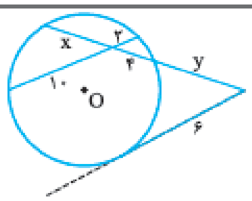
برای رسم مماس‌مشترک خارجی باید دایره‌ای اضافی به مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر رسم شود.

۷ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ مماس خارج هستند. مطلوب است طول مماس‌مشترک خارجی این دو دایره. — ۱

رابطه‌های طول‌های مماس‌مشترک خارجی و داخلی را می‌دانید؟

۸ مقادیر مجهول را بیابید. — ۱

رابطهٔ طولی در حالتی که یکی از قاطع‌ها به صورت مماس درآید را می‌دانید؟



$x, y = ?$

درس سوم

۹ چندضلعی محاطی و محیطی را با دو رسم شکل مناسب تعریف کنید. — ۱

۱۰ قضیه: یک چهارضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند. — ۱/۵

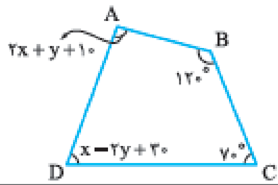
یادآوری می‌شود که طول مماس‌های وارد بر یک دایره از یک نقطه با هم برابرند.

۱۱ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد. — ۱/۵

ویژگی نقطهٔ همرسی میانه‌ها در مثلث متساوی‌الاضلاع

۱۲ در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD محاطی است. مقدارهای مجهول را بیابید. — ۱

در چهارضلعی محاطی بین زاویه‌های مقابل چه رابطه‌ای وجود دارد؟



نمره	نوبت اول پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	آزمون شمارهٔ ۱	ردیف

فصل دوم

درس اول

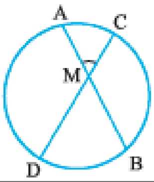
ردیف		نمره
۱۳	درستی یا نادرستی هر عبارت داخل جدول را مشخص کنید.	۱/۵

	طولپا	جهت شکل را حفظ می‌کند	مساحت را حفظ می‌کند
انتقال			
تجانس			

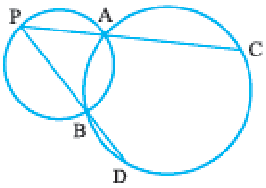
ردیف		نمره
۱۴	بازتاب را تعریف و سه مورد از ویژگی‌های آن را بیان کنید.	۱/۵
۱۵	ثابت کنید دوران، یک تبدیل طولپاست. (در دو حالت مختلف)	۲
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

هندسه (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شمارهٔ ۹	نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

۱ ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره، درون دایره متقاطع باشند، زاویهٔ بین دو وتر، برابر است با نصف مجموع دو کمان نظیر آن؛ یعنی در شکل مقابل داریم: $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{2}$ ۱/۵



۲ دو دایره یکدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی یکی از دو دایره و بیرون دایرهٔ دیگر باشد و امتدادهای PA و PB دایرهٔ دیگر را در نقاط C و D قطع کنند، ثابت کنید با تغییر نقطهٔ P روی دایرهٔ مفروض، اندازهٔ کمان CD ثابت می‌ماند. ۱/۲۵



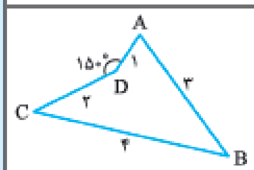
۳ ثابت کنید اگر در دایره‌ای، دو وتر نابرابر باشند، وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز نزدیک‌تر است. ۱/۲۵

۴ ثابت کنید ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع در نقطهٔ O، یک دوران به مرکز O و زاویهٔ 2α است که α زاویهٔ بین دو محور می‌باشد. ۱/۵

۵ خط d و نقطهٔ A بیرون آن و به فاصلهٔ ۱ از خط d مفروض‌اند. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را A' می‌نامیم. مجانس نقطهٔ A' در تجانس به مرکز A و با نسبت ۲− را A'' می‌نامیم. اگر فاصلهٔ A از خط d برابر ۱ باشد، طول $A'A''$ چه‌قدر است؟ ۱/۲۵

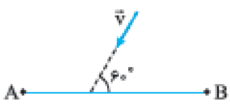
۶ دو نقطهٔ A و O به فاصلهٔ ۱ از یکدیگر قرار دارند. اگر A_1 مجانس A به مرکز نقطهٔ O و با نسبت ۲− و A_2 دوران‌یافتهٔ A_1 حول نقطهٔ O به اندازهٔ $+90^\circ$ باشد، طول پاره‌خط AA_2 چه‌قدر است؟ ۱/۵

۷ اگر بخواهیم بدون تغییر محیط چهارضلعی و تعداد اضلاع آن در شکل مقابل و با استفاده از بازتاب، مساحت شکل را افزایش دهیم، مساحت آن چه مقدار افزایش می‌یابد؟ ۱/۵

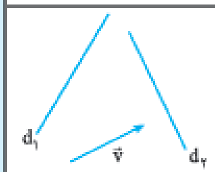


۸ اگر طول اضلاع مثلثی ۴، ۵ و ۷ باشند و مجانس این مثلث را در تجانس به مرکز O و با نسبت $k=-4$ رسم کنیم، مساحت شکل تبدیل‌یافته چه‌قدر است؟ ۱/۲۵

۹ در شکل مقابل بردار $\vec{v}$ به طول ۱ با پاره‌خط AB به طول $2\sqrt{3}$، زاویهٔ 60° می‌سازد. اگر $A'B'$ انتقال‌یافتهٔ پاره‌خط AB تحت بردار $\vec{v}$ باشد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ چه‌قدر است؟ ۰/۷۵



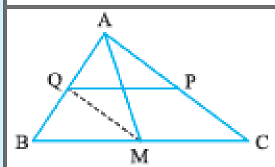
۱۰ دو خط d_1 و d_2 و بردار $\vec{v}$ داده شده‌اند. پاره‌خط AB را چنان رسم کنید که A روی d_1، B روی d_2 و $\overline{AB}$ موازی و مساوی با بردار $\vec{v}$ باشد. ۱/۲۵



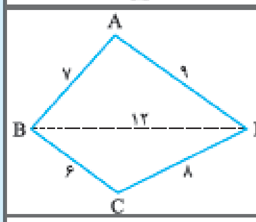
۱۱ اگر در مثلث ABC مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق و $AB=5\sqrt{3}$ باشد، طول نیمساز زاویهٔ درونی نظیر رأس A را پیدا کنید. ۱/۵

۱۲ در مثلث ABC داریم $\frac{p-a}{4}=\frac{p-b}{3}=\frac{p-c}{2}$ و مساحت دایرهٔ محاطی داخلی آن $\frac{8\pi}{3}$ است. مساحت مثلث را پیدا کنید. ۱/۵

۱۳ در شکل مقابل، نقطهٔ M وسط BC و MQ نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}B$ است. از Q خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید PM نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}C$ است. ۱/۵



۱۴ در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی را پیدا کنید. ۱/۵



۱۵ ثابت کنید اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، آن‌گاه مساحت آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $S=2R^2\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}$ ۱

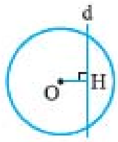
موفق باشید — جمع نمرات ۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

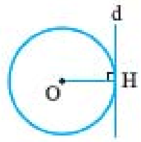
آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

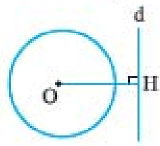
الف) متقاطع: $OH < R$



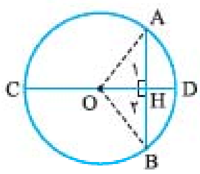
ب) مماس: $OH = R$



پ) خط و دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند: $OH > R$



۲- حکم: $\begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$



فرض کنیم O مرکز دایره باشد، از O بر وتر AB عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در H و کمان نظیرش را در D قطع کند. از O به A و B وصل کرده ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{OAH}$ و $\overset{\Delta}{OBH}$ همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = \text{شعاع} \\ OH = \text{مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر و یک ضلع قائمه همنهشت‌اند.

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ AH = BH \end{cases} \xrightarrow{\text{زوایای مرکزی}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$$

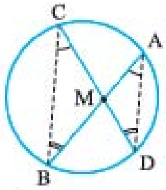
۳- الف)
$$\frac{x+y}{2} = 80^\circ \Rightarrow x+y = 160^\circ$$
$$\frac{x-y}{2} = 20^\circ \Rightarrow x-y = 40^\circ \Rightarrow \begin{cases} x+y=160^\circ \\ x-y=40^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 100^\circ \text{ و } y = 60^\circ$$

ب)
$$\frac{x-y}{2} = 62^\circ \Rightarrow x-y = 124^\circ$$
$x + y = 360^\circ$ (کل دایره)
$$\begin{cases} x+y = 360^\circ \\ x-y = 124^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 242^\circ \text{ و } y = 118^\circ$$

۴-
$$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 140^\circ$$
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 80^\circ$$
$$B\hat{C}T_{\text{ظلی}} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

۵- حکم: $MA \times MB = MC \times MD$

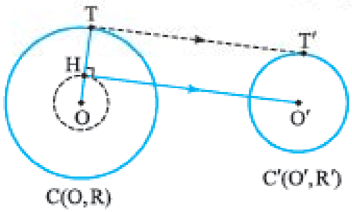
از C به B و از A به D وصل کرده و ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$ و $\overset{\Delta}{MAD}$ متشابه‌اند.



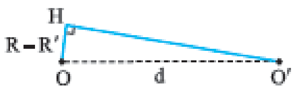
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{C}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \\ \hat{A}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A} \\ \left.\begin{array}{l} \hat{B}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \\ \hat{D}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ دو مثلث به حالت(ز ز) متشابه‌اند

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

۶- دو دایرهٔ متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم. به مرکز O و شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم و از O' بر این دایره مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ $C(O,R)$ را در نقطه‌ای مانند T قطع کند. $(OH \perp O'H)$ از T به موازات $O'H$ خط TT' را رسم می‌کنیم. TT' مماس‌مشترک خارجی دو دایره است. $OH = R - R'$



اکنون در مثلث $\overset{\Delta}{OO'H}$ رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

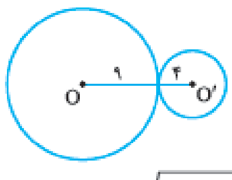


$$d^2 = (R-R')^2 + (O'H)^2 \Rightarrow O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

چهارضلعی $HTT'O'$، ۴ زاویهٔ قائمه دارد، پس مستطیل است، در نتیجه: $O'H = TT'$

$$\Rightarrow TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

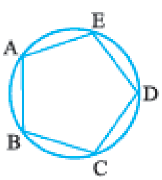
۷- دو دایرهٔ $C(O,9)$ و $C'(O',4)$ را که بر یکدیگر مماس خارج هستند در نظر می‌گیریم. واضح است که طول خط‌المرکزین این دو دایره ۱۳ است؛ یعنی: $d = OO' = 9 + 4 = 13$



$$\Rightarrow TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

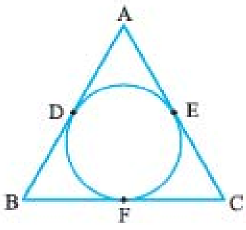
۸-
$$4x = 2 \times 10 \Rightarrow x = 5$$
$$6^2 = y(y+9) \Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y+12)(y-3) = 0 \Rightarrow y = 3$$

۹- چندضلعی را محاطی گویند، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همهٔ رئوس آن بگذرد. در این صورت دایره را محیطی و چندضلعی را محاط در دایره یا به طور خلاصه محاطی نامند.



دایرهٔ محیطی
پنج‌ضلعی محاطی

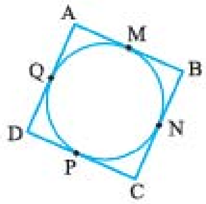
چندضلعی را محیطی نامند، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همهٔ ضلع‌های آن مماس باشد. در این صورت دایره را محاطی و چندضلعی را محیطی نامند.



دایرهٔ محاطی
مثلث محیطی

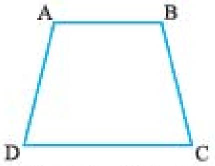
۱۰- می‌دانیم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول دو مماس با هم برابر است.

فرض کنید چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد:



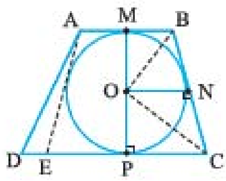
$$AB+CD=(AM+BM)+(CP+DP)$$
$$=AQ+BN+CN+DQ$$
$$=(AQ+DQ)+(BN+CN)=AD+BC$$

برعکس: فرض کنید $AB+CD=BC+AD$ نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. طبق خاصیت نیمساز، (هر نقطه روی نیمساز از اضلاع زاویه به یک فاصله است).



$$\Rightarrow OM=ON=OP$$

به مرکز O و شعاع OM دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره بر اضلاع AB، BC و CD مماس می‌باشد. اگر بر ضلع AD نیز مماس باشد که کار تمام است. در غیر این صورت از A مماس AE را بر دایره رسم می‌کنیم. چون $ABCE$ محیطی است، پس بنا بر قسمت قبل:



$$AB+EC=BC+AE \Rightarrow AB-BC=AE-EC \quad (1)$$

از طرفی بنا به فرض $AB+CD=BC+AD$، در نتیجه:

$$AB-BC=AD-CD \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$AD-CD=AE-EC$$

$$\Rightarrow AD=AE+\underbrace{CD-EC}_{ED} \Rightarrow AD=AE+ED$$

اما در مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ چنین رابطه‌ای امکان ندارد، پس فرض مماس‌نبودن AD بر دایره باطل است و AD بر دایرهٔ رسم‌شده مماس است.

۱۱- بنا بر رابطهٔ $C_n=2R\sin\frac{180}{n}$ داریم: $a=2R\sin\frac{180^\circ}{3}=2R\sin 60^\circ=R\sqrt{3}$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}R)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3R^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

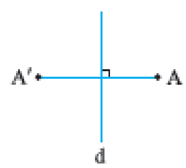
۱۲- می‌دانیم در هر چهارضلعی محاطی، زوایای روبه‌رو مکمل‌اند، پس:

$$x-2y+30+120=180 \Rightarrow x-2y=30$$
$$2x+y+10+70=180 \Rightarrow 2x+y=100$$

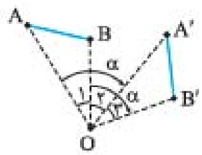
$$\Rightarrow 2\times\begin{cases}2x+y=100^\circ\\ x-2y=30^\circ\end{cases} \Rightarrow 5x=230^\circ \Rightarrow x=46^\circ, y=8^\circ$$

۱۳- انتقال: طولپاست، جهت شکل را حفظ می‌کند و مساحت را نیز حفظ می‌کند.
تجانس: لزوماً طولپا نیست (در حالت $k=1$ طولپاست) و جهت شکل را حفظ می‌کند و اگر $|k|\neq 1$ باشد، مساحت را نیز حفظ نمی‌کند.

۱۴- تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' است به طوری که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد و اگر A بر d منطبق باشد، تصویرش بر خودش منطبق است. d را محور بازتاب می‌نامند. بازتاب، یک تبدیل طولپاست ـ شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند ـ مقدار زاویه را حفظ می‌کند.



۱۵- **حالت اول** مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $A\hat{O}B$ بیشتر باشد.



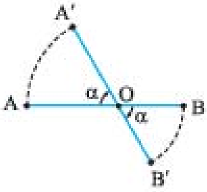
با توجه به شکل:
$$\left.\begin{aligned}\hat{O}_1+\hat{O}_2=\alpha\\ \hat{O}_2+\hat{O}_3=\alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

$$\begin{cases}OA=OA' & \text{(طبق تعریف دوران)}\\ \hat{O}_1=\hat{O}_3\\ OB=OB' & \text{(طبق تعریف دوران)}\end{cases}$$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OA'B'}$ به حالت ض‌زض همنهشت‌اند.

$\Rightarrow AB=A'B' \Rightarrow$ طولپاست

حالت دوم اگر نقطهٔ O روی پاره‌خط AB باشد:



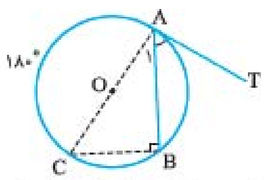
$$AB=AO+OB$$
$$A'B'=A'O+OB'$$

طبق تعریف دوران:
$$\begin{aligned}AO=A'O\\ BO=B'O\end{aligned} \Rightarrow AB=A'B'$$

پس دوران یک تبدیل طولپاست.

آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- حکم: $B\hat{A}T=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$



قطر AC را رسم می‌کنیم و از C به B وصل می‌کنیم.

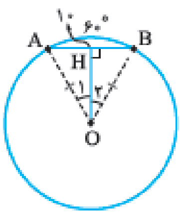
$$\hat{B}_{\text{محاطی}}=\frac{180}{2}=90 \Rightarrow \hat{A}_1+\hat{C}=90$$

اما $\hat{A}_1+B\hat{A}T=90^\circ$، زیرا شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.

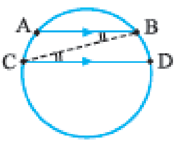
$$\Rightarrow B\hat{A}T=\hat{C}$$

از طرفی $\hat{C}_{\text{محاطی}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ در نتیجه: $B\hat{A}T=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

۲- $\hat{O}$ زاویهٔ مرکزی و برابر 60° و $OA=OB$، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ است، در نتیجه ارتفاع نظیر آن $\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ می‌باشد.



۳- فرض: $AB\parallel CD$
حکم: $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$



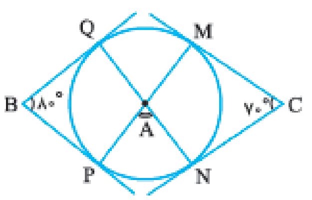
از B به C وصل می‌کنیم؛ بنا بر قضیهٔ خطوط موازی و مورب:

$$\begin{cases}AB\parallel CD\\ BC \text{ مورب}\end{cases} \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$$

اما $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زوایای محاطی‌اند، پس:

$$\left.\begin{aligned}\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

۴-



$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{MQPN}-\overset{\frown}{MN}}{2}$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{MQPN}-\overset{\frown}{MN}=140^\circ$$
$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{PNMQ}-\overset{\frown}{PQ}}{2}$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{PNMQ}-\overset{\frown}{PQ}=160^\circ$$

چون $\hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ$، در نتیجه: $\sin\hat{D}_1=\sin\hat{D}_2$ (۳)

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۳) \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{12\sin\hat{D}_1}{4\sin\hat{D}_2}=3$$

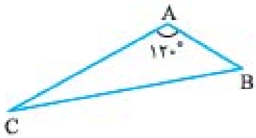
۱۰- می‌دانیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

بنا بر ویژگی مهم تناسب نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{12}{\frac{3}{2}}=2R \Rightarrow R=4$$

۱۱- پس از گذشت نیم‌ساعت مسافت‌های پیموده‌شده عبارت‌اند از:



$$AB=V_1t=60\times0/5=30\ km$$

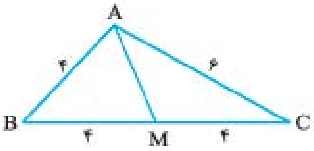
$$AC=V_2t=100\times0/5=50\ km$$

پس از نیم‌ساعت، فاصلهٔ دو اتومبیل برابر BC است.

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\times AB\times\cos120^\circ$$

$$BC^2=900+2500-2\times30\times50\times\frac{-1}{2}=4900\Rightarrow BC=70\ km$$

۱۲- اگر AM میانه باشد، رابطهٔ استوارت را در مثلث شکل مقابل می‌نویسیم:



$$AB^2\times MC+AC^2\times MB=AM^2\times BC+BM\times MC\times BC$$

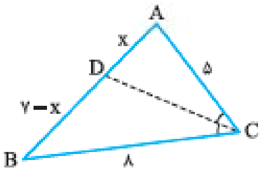
$$\Rightarrow 4^2\times4+6^2\times4=AM^2\times8+4\times4\times8$$

بر ۸ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 64+144=8AM^2+128$$

$$\Rightarrow 8+18=AM^2+16\Rightarrow AM^2=10\Rightarrow AM=\sqrt{10}$$

۱۳- نیمساز زاویهٔ متوسط، نظیر ضلع متوسط است.



$$\text{نیمساز } CD\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{x}{7-x}=\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 8x=35-5x\Rightarrow 13x=35\Rightarrow x=\frac{35}{13}$$

پس $AD=\frac{35}{13}$ و $BD=7-\frac{35}{13}=\frac{91-35}{13}=\frac{56}{13}$.

۱۴- اولاً: چون طول هر سه ضلع مثلث ADE برابرند، پس $\hat{A}=60^\circ$. اکنون در مثلث ABC داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^2=8^2+6^2-2\times8\times6\times\frac{1}{2}=52\Rightarrow BC=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

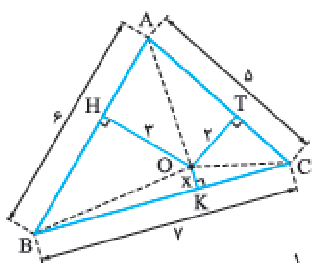
ثانیاً:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times8\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE}=\frac{1^2\times\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{DECB}=S_{ABC}-S_{BDE}=12\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{47\sqrt{3}}{4}$$

۱۵-



$$P=\frac{6+5+7}{2}=9$$

$$S=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$

$$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$$

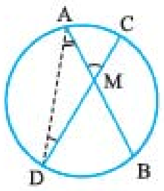
از طرفی: $S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times OH+\frac{1}{2}AC\times OT+\frac{1}{2}BC\times OK$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times6\times3+\frac{1}{2}\times5\times2+\frac{1}{2}\times7\times x\Rightarrow x=\frac{12\sqrt{6}-28}{7}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- از A به D وصل می‌کنیم:

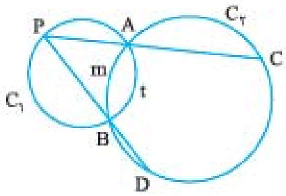


$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\ \text{محاطی}\\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\ \text{محاطی}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{2}\quad(۱)$$

$$\text{M زاویهٔ خارجی مثلث AMD}\Rightarrow\hat{M}=\hat{A}+\hat{D}\quad(۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲)\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{2}$$

۲- در دایرهٔ C_1، $\hat{P}$ زاویه‌ای محاطی است،



پس: $P=\frac{\overset{\frown}{AtB}}{2}=$ ثابت. در دایرهٔ C_2، $\hat{P}$ زاویه‌ای خارجی است، پس:

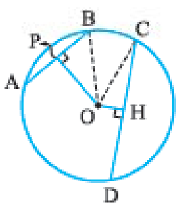
$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AmB}}{2}\Rightarrow\overset{\frown}{CD}=2\hat{P}+\overset{\frown}{AmB}$$

چون $\overset{\frown}{AmB}$ و $\hat{P}$ ثابت هستند، پس اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ ثابت است و به جای نقطهٔ P بستگی ندارد.

۳- فرض کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر CD از وتر AB بزرگ‌تر باشد. اگر OP و OH به ترتیب بر AB و CD عمود باشند، آن‌گاه $PB=\frac{1}{2}AB$ و $CH=\frac{1}{2}CD$.

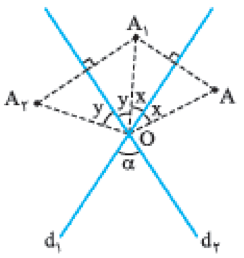
$$\overset{\Delta}{OBP}:OP^2=OB^2-PB^2=R^2-\frac{AB^2}{4}\quad(۱)$$

$$\overset{\Delta}{OCH}:OH^2=OC^2-CH^2=R^2-\frac{CD^2}{4}\quad(۲)$$

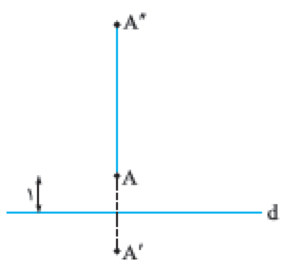


چون $AB<CD$، پس $-\frac{AB^2}{4}>-\frac{CD^2}{4}$ یا $R^2-\frac{AB^2}{4}>R^2-\frac{CD^2}{4}$. با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $OP^2>OH^2$ یا $OP>OH$.

۴- اگر دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ O متقاطع و زاویهٔ بین دو خط، α باشد، چنان‌چه بازتاب A نسبت به d_1، A_1 باشد و بازتاب A_1 نسبت به d_2، A_2 باشد، آن‌گاه $OA=OA_1$ و $OA_1=OA_2$، پس $OA=OA_2$. از طرفی با توجه به شکل، زاویهٔ بین OA و OA_2 برابر $2x+2y=2(x+y)=2\alpha$ است، پس A_2 دوران‌یافتهٔ نقطهٔ A نقطهٔ O به اندازهٔ 2α می‌باشد.

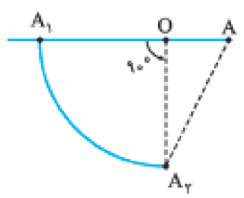


۵- واضح است که $AA'=2$ و چون A'' مجانس A' در تجانس به مرکز A و با نسبت -2 است، پس باید A بین A' و A'' و $AA''=2AA'=4$ باشد، پس با توجه به شکل داریم:



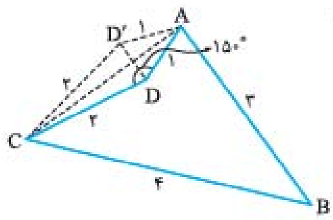
$$A'A''=A'A+AA''=2+4=6$$

۶- چون A_1 مجانس A به مرکز O و با نسبت -2 است، پس O بین A و A_1 است و $OA_1=2OA=2$ می‌باشد. با توجه به شکل، OA_2 بر AA_1 عمود است و $OA_2=2$ و چون $OA=1$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAA_2 داریم:



$$AA_2^2=OA^2+OA_2^2=1^2+2^2\Rightarrow AA_2=\sqrt{5}$$

۷- کافی است بازتاب D نسبت به AC را پیدا کنیم. اگر این نقطه را D' بنامیم، آن‌گاه دو مثلث ACD و ACD' همنهشت هستند، پس مقدار افزایش مساحت شکل، دو برابر مساحت مثلث ADC است.



$$\text{افزایش مساحت} = 2S_{ACD} = 2\times(\frac{1}{2}AD\times CD\times \sin 150^\circ)$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\frac{1}{2} = 1$$

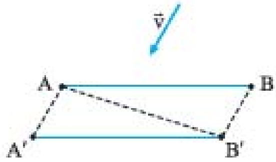
۸- مساحت مثلث اولیه را پیدا می‌کنیم. $2p = 4+5+7 = 16 \Rightarrow p = 8$

با استفاده از رابطهٔ هرون داریم:

$$S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8\times 4\times 3\times 1} = 4\sqrt{6}$$

می‌دانیم تجانس، زاویه را حفظ می‌کند، پس تصویر با خود شکل، متشابه است و چون نسبت تجانس ۴− است، پس مساحت شکل مجانس $(-4)^2 = 16$ برابر مساحت شکل اولیه است، در نتیجه: $\text{مساحت شکل تبدیل‌یافته} = 16\times 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$

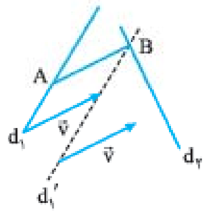
۹- اگر A' و B' به ترتیب انتقال‌یافته‌های A و B تحت بردار $\vec{v}$ باشند، آن‌گاه $BB' = 1$ و $\hat{B} = 60^\circ$، پس: $S_{ABB'A'} = 2S_{ABB'}$



$$= 2(\frac{1}{2}AB\times BB'\times \sin B)$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

۱۰- اگر فرض کنیم مسئله حل شده و پاره‌خط AB جواب مسئله باشد، آن‌گاه چون $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$، پس نقطهٔ B انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ A تحت بردار $\vec{v}$ است. برای رسم به صورت زیر عمل می‌کنیم: انتقال‌یافتهٔ d_1 را تحت بردار $\vec{v}$ خط d'_1 می‌نامیم. نقطهٔ برخورد d'_1 و d_2 را B می‌نامیم. از B خطی موازی با $\vec{v}$ رسم می‌کنیم تا d_1 را در A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسئله است.



۱۱- اگر در مثلثی مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. نیمسازِ زاویه‌های درونی مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع آن نیز می‌باشد، پس:

$$d_a = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 5\sqrt{3} = \frac{15}{2}$$

۱۲- اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را r بگیریم، آن‌گاه: $S = \pi r^2 = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

از طرفی با استفاده از ویژگی مهم تناسب، خواهیم داشت:

$$\frac{p-a}{4} = \frac{p-b}{3} = \frac{p-c}{2} = \frac{3p\overbrace{-a-b-c}^{=-2p}}{4+3+2} = \frac{p}{9} = k$$

در نتیجه: $p = 9k$ و همچنین: $\frac{p-a}{4} = k \Rightarrow p-a = 4k \Rightarrow a = 5k$

$$\frac{p-b}{3} = k \Rightarrow p-b = 3k \Rightarrow b = 6k$$

$$\frac{p-c}{2} = k \Rightarrow p-c = 2k \Rightarrow c = 7k$$

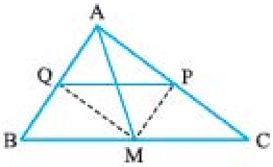
پس: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9k\times 4k\times 3k\times 2k} = 6k^2\sqrt{6}$

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{6k^2\sqrt{6}}{9k} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{k\sqrt{6}}{3}$$

به توان ۲ می‌رسانیم: $\frac{2}{3} = \frac{6k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 1 \xrightarrow{k>0} k = 1$

پس $S = 6\sqrt{6}$.

۱۳- چون MQ نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}B$ است. پس بنا بر ویژگی نیمساز در مثلث AMB داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{MB}\\ PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{PC}\\ BM = CM\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{CM}$$

بنا بر ویژگی عکس نیمساز زاویه، نتیجه می‌شود MP نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}C$ است.

۱۴- با استفاده از هرون مساحت هر یک از مثلث‌ها را پیدا می‌کنیم.

در مثلث ABD داریم $p = \frac{7+9+12}{2} = 14$، پس:

$$S_{ABD} = \sqrt{14\times(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5}$$

در مثلث BCD داریم $p = \frac{6+8+12}{2} = 13$، پس:

$$S_{BCD} = \sqrt{13(13-6)(13-8)(13-12)} = \sqrt{455}$$

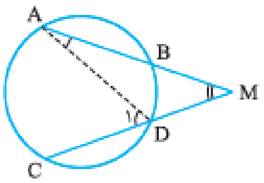
$$S_{ABCD} = 14\sqrt{5} + \sqrt{455}$$

۱۵- می‌دانیم $a = 2R\sin\hat{A}$ و $b = 2R\sin\hat{B}$. از طرفی $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$، پس:

$$S = \frac{1}{2}\times(2R\sin\hat{A})(2R\sin\hat{B})\sin\hat{C} = 2R^2\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}$$

آزمون شمارهٔ ۱۰ (نوبت دوم)

۱- از A به D وصل می‌کنیم. $\hat{D}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث ADM است، پس:

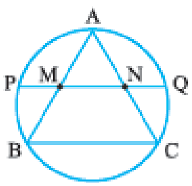


$$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{D}_1 - \hat{A}$$

اما $\hat{D}_1$ و $\hat{A}$ محاطی هستند، پس $\hat{D}_1 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ و $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$، در نتیجه:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2}$$

۲- در مثلث ABC پاره‌خط MN میان‌خط است، پس: $MN = \frac{1}{2}BC = 1$



اگر فرض کنیم $PM = x$ و $NQ = y$، آن‌گاه چون دو وتر AB و PQ در نقطهٔ M متقاطع هستند، داریم:

$$PM\times MQ = AM\times MB \Rightarrow x(1+y) = 1\times 1 \quad (1)$$

برای دو وتر AC و PQ نیز داریم:

$$QN\times PN = AN\times NC \Rightarrow y(1+x) = 1\times 1 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow x(1+y) = y(1+x) \Rightarrow x = y$$

$$(1) \Rightarrow x(1+x) = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

و چون $x > 0$ است، پس $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$، در نتیجه:

$$PQ = x + 1 + y = 2x + 1 = \sqrt{5} - 1 + 1 = \sqrt{5}$$

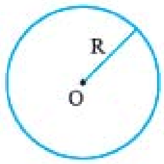
درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره

دایره، مجموعهٔ نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطهٔ ثابت، مرکز دایره و مقدار ثابت، اندازهٔ شعاع دایره نامیده می‌شوند.

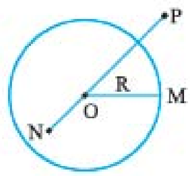


دایره به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهند. هر دایره، صفحه را به ۳ قسمت جدا از هم تقسیم می‌کند:

۱ داخل دایره: مجموعهٔ نقاطی مانند N که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است، پس $ON < R$.

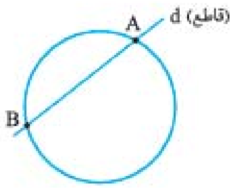
۲ روی دایره: مجموعهٔ نقاطی مانند M که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است، پس $OM = R$.

۳ خارج دایره: مجموعهٔ نقاطی مانند P که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است، پس $OP > R$.

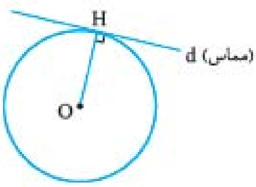


خط‌های قاطع و مماس نسبت به دایره

خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می‌شود.

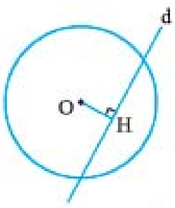


در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. در این حالت شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.

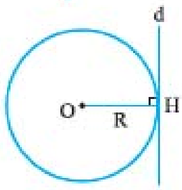


وضعیت خط و دایره: اگر OH فاصلهٔ O از خط d باشد، خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ نسبت به هم دارای ۳ وضعیت هستند:

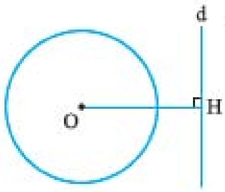
۱ خط و دایره متقاطع هستند: در این حالت خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند و $OH < R$.



۲ خط بر دایره مماس است: در این حالت خط و دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند و $OH = R$.



۳ خط d دایره را قطع نمی‌کند: در این حالت خط و دایره، نقطهٔ مشترک ندارند و $OH > R$.



چند تعریف

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نامیده می‌شود.

تعریف قطر: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر نامیده می‌شود. قطر، بزرگ‌ترین وتر در دایره است.

تعریف کمان: قسمتی از دایره که بین دو نقطه روی دایره محدود باشد، کمان دایره می‌گویند.

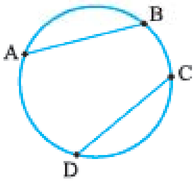
تعریف شعاع: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و انتهای دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع نام دارد.

زوایای مرکزی، محاطی، ظلی، داخلی و خارجی

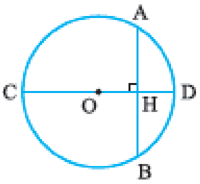
زاویهٔ مرکزی زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع زاویه شعاع‌های دایره باشند، زاویهٔ مرکزی نام دارد. اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برابر است با اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن زاویه.

نکته: دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ از دایرهٔ $C(O,R)$ با هم برابرند، اگر و تنها اگر دو وتر AB و CD از این دایره با هم برابر باشند.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$



قضیه: ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

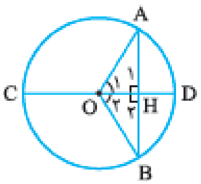


اثبات:

$$\text{فرض}: \begin{cases} CD: \text{قطر} \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \qquad \text{حکم}: \begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$$

از O به A و B وصل کرده، ثابت می‌کنیم دو مثلث حاصل همنهشت‌اند.

$$\begin{cases} OA = OB \\ OH \ \text{مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\Delta}{OHA} \cong \overset{\Delta}{OHB}$$



$$\xrightarrow{\text{اجزاء نظیر}} \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

اما زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ مرکزی‌اند، پس مساوی کمان‌های روبه‌رویشان هستند.

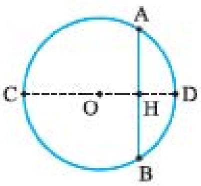
$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{AD} \\ \hat{O}_2 = \overset{\frown}{BD} \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$$

نکته: در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز نگذشته باشد، وصل کند، بر آن وتر عمود است.

نکته: در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

مسئلهٔ ترسیم: اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

حل: طبق قضیه و دو نکتهٔ قبل، کافی است وسط وتر و کمان را به هم وصل کرده و امتداد دهید تا از مرکز دایره بگذرد و دایره را در نقطهٔ دیگر قطع کند. پاره‌خط حاصل قطر موردنظر است و چون از مرکز به وسط وتر و کمان $\overset{\frown}{AB}$ وصل شده پس حتماً بر آن وتر عمود است

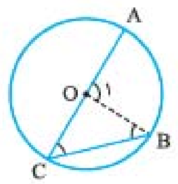


زاویهٔ محاطی
زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و هر دو ضلع آن، دو وتر از دایره باشند زاویهٔ محاطی می‌نامند.

قضیه: ثابت کنید اگر یک ضلع زاویهٔ محاطی، قطر و ضلع دیگر وتری دلخواه از دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر است با نصف کمان نظیر آن.

حکم: $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

اثبات:

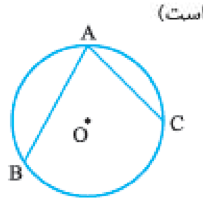


اگر از O به B وصل کنیم، آن‌گاه شعاع $=OB=OC$، پس مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ در رأس O متساوی‌الساقین است و $\hat{C}=\hat{B}$.
اما $\hat{O}_۱$ زاویه‌ای خارجی برای مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ است، پس $\hat{O}_۱=\hat{B}+\hat{C}$ و در نتیجه $\hat{O}_۱=\hat{C}+\hat{C}=۲\hat{C}$ از طرفی $\hat{O}_۱$ زاویه‌ای مرکزی است، پس $\hat{O}_۱=\overset{\frown}{AB}$؛ در نتیجه:

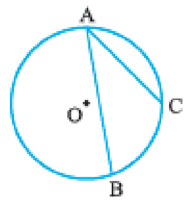
$$۲\hat{C}=\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

تمرین: با فرض این‌که بدانیم اگر یک ضلع زاویهٔ محاطی، قطری از دایره باشد، اندازهٔ آن نصف کمان نظیرش می‌باشد، آن‌گاه در حالت‌های زیر ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف کمان نظیر آن است: (O مرکز دایره است)

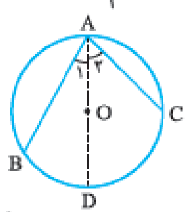
الف) O درون زاویه است.



ب) O بیرون زاویه است.

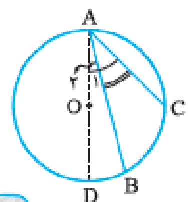


حل: الف) از A به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند.
چون $\hat{A}_۱$ محاطی است و یک ضلع آن، قطری از دایره می‌باشد، پس $\hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$ و به دلیل مشابه $\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}$.



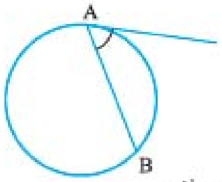
$$\hat{A}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

ب) از A به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. چون $\hat{A}_۱$ محاطی و یک ضلع آن، قطری از دایره است، پس: $\hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$ و به دلیل مشابه $\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$.



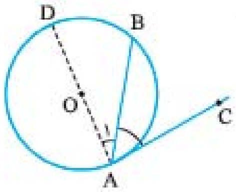
$$\hat{A}=\hat{A}_۱-\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

زاویهٔ ظلی
زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر وتری از دایره باشد زاویهٔ ظلی می‌نامند.



قضیه: ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، نصف کمان نظیرش می‌باشد.

اثبات: قطر AD را رسم می‌کنیم. چون شعاع وارد بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس داریم:

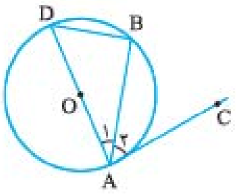


$$DA\perp AC \Rightarrow D\hat{A}C=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{A}_۱=۹۰$$
$$\Rightarrow \hat{A}=۹۰-\hat{A}_۱$$

چون $\hat{A}_۱$ محاطی است، پس $\hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$ و داریم:

$$\hat{A}=۹۰^\circ-\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

اثبات دیگری برای اندازهٔ زاویهٔ ظلی



قطر AD را رسم و از D به B وصل می‌کنیم.

$$\hat{B}_{\text{محاطی}}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

پس در مثلث $\overset{\triangle}{ADB}$ داریم: $\hat{D}+\hat{A}_۱=۹۰^\circ$

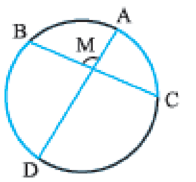
از طرفی DA قطر و AC مماس بر دایره است، بنابراین: $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{D}_{\text{محاطی}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

نکته: اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی باشند، آن‌گاه کمان‌های محدود بین آن‌ها با هم برابرند و برعکس.

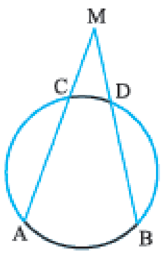
دو قضیهٔ مهم:

الف) هرگاه دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه زاویهٔ بین آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

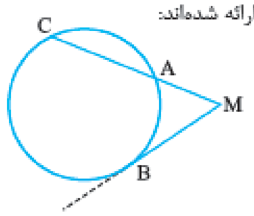
ب) هرگاه دو وتر خارج دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه زاویهٔ بین آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M}=\frac{|\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}|}{۲}$$

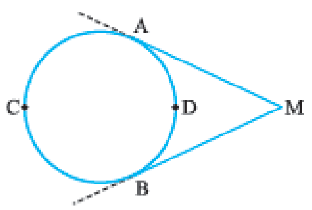
دو حالت خاص از قضیه که بسیار مهم هستند در زیر ارائه شده‌اند:

الف) زاویهٔ بین قاطع و مماس:



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

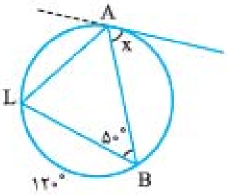
ب) زاویهٔ بین دو مماس:



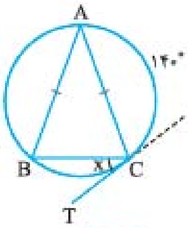
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

مثال: در هر حالت مقادیر مجهول را بیابید.

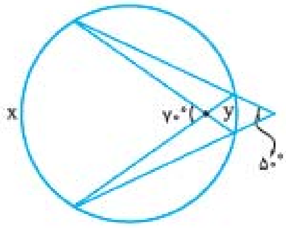
الف) $x = ?$



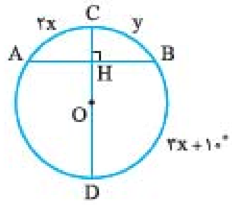
ب) $x = ?$



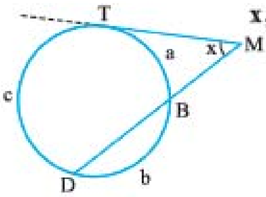
پ) $x,y = ?$



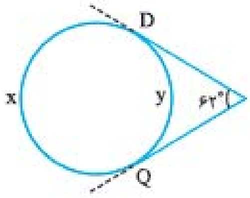
ت) $x,y = ?$



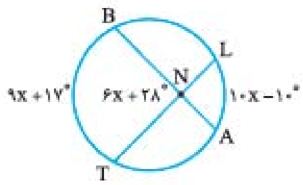
ث) اگر در شکل مقابل $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ باشد، $x,y = ?$



ج) $x,y = ?$



چ) $x = ?$ و $B\hat{N}T = ?$



حل: الف)

$$\hat{B} = 50^\circ \xrightarrow{\text{محاطی}} \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AL}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AL} = 100^\circ$$

$$100^\circ + 120^\circ + \overset{\frown}{AB} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{ظلی}} \hat{A} = x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

ب)

$$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 140^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ \Rightarrow 140^\circ + 140^\circ + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{ظلی } B\hat{C}T} x = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

پ)

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 70^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 140^\circ \\ x-y = 100^\circ \end{cases}$$

$$2x = 240^\circ \Rightarrow x = 120^\circ \Rightarrow y = 20^\circ$$

ت)

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \frac{2x+3x+10^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 180^\circ - 10^\circ = 170^\circ \Rightarrow x = \frac{170^\circ}{5} = 34^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = 180^\circ \Rightarrow 3x + 10^\circ + y = 180$$

$$\Rightarrow 3(34^\circ) + 10^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 68^\circ$$

ث)

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = t \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 4t \\ c = 7t \end{cases}$$

$$a + b + c = 360^\circ \Rightarrow 12t = 360^\circ \Rightarrow t = 30^\circ$$

$$x = \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TD} - \overset{\frown}{TB}}{2} = \frac{c-a}{2}$$

$$= \frac{7t - t}{2} = \frac{6t}{2} = 3t = 3(30^\circ) = 90^\circ$$

ج)

$$\frac{x-y}{2} = 62^\circ \Rightarrow \begin{cases} x - y = 124^\circ \\ x + y = 360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 484^\circ \Rightarrow x = 242^\circ \Rightarrow y = 118^\circ$$

چ)

$$6x + 28^\circ = \frac{(9x + 17^\circ) + (10x - 10^\circ)}{2}$$

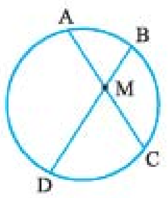
$$\Rightarrow 12x + 56^\circ = 19x + 7^\circ \Rightarrow 7x = 49^\circ \Rightarrow x = 7^\circ$$

$$B\hat{N}T = 6x + 28^\circ = 6(7^\circ) + 28^\circ = 42^\circ + 28^\circ = 70^\circ$$

درس دوم: روابط طولی در دایره

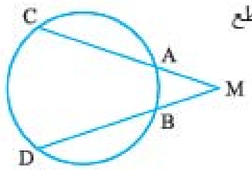
قضیه: الف) هرگاه دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$$MA \times MC = MB \times MD \quad \text{(جزء در جزء)}$$



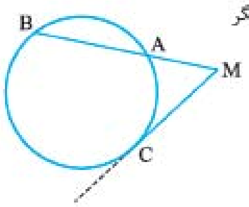
ب) هرگاه امتداد دو وتر، خارج دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$$MA \times MC = MB \times MD \quad \text{(جزء در کل)}$$



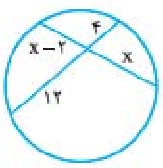
پ) هرگاه یک مماس و یک قاطع در بیرون دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$$MC^2 = MA \times MB$$

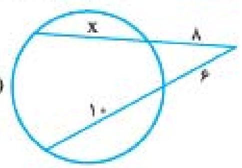


مثال: مقدار مجهول را در هر شکل بیابید.

الف)



ب)



پ)