

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان حسابات (۱) از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

(۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، بینند.

(۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

(۳) پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان پنوسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) درس‌نامه کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند! در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان حسابات (۱) نیاز دارید، تنها در ۲۲ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید! یک راهکار، موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ تا ۳ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول	آزمون شماره ۱ (طبقه‌بندی شده)	۱۷
اول	آزمون شماره ۲ (طبقه‌بندی شده)	۱۸
اول	آزمون شماره ۳ (طبقه‌بندی نشده)	۱۹
اول	آزمون شماره ۴ (طبقه‌بندی نشده)	۲۰
دوم	آزمون شماره ۵ (طبقه‌بندی شده)	۲۱
دوم	آزمون شماره ۶ (طبقه‌بندی شده)	۲۳
دوم	آزمون شماره ۷ (طبقه‌بندی شده)	۲۴
دوم	آزمون شماره ۸ (طبقه‌بندی شده)	۲۵
دوم	آزمون شماره ۹ (طبقه‌بندی نشده)	۲۷
دوم	آزمون شماره ۱۰ (طبقه‌بندی نشده)	۲۸
دوم	آزمون شماره ۱۱ (طبقه‌بندی نشده)	۲۹
دوم	آزمون شماره ۱۲ (طبقه‌بندی نشده)	۳۰

درس‌نامه توپ برای شب امتحان





ردیف	حسابان (۱)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
۱	آزمون شماره ۱	نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم	نمره	
۲	فصل اول	طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم، سپس نیمی از مساحت باقیمانده را رنگ می کنیم، به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده از مرحله قبل را رنگ می کنیم، پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد از سطح کل مربع رنگ شده است؟ (د) ۹۶		
۳	۱	اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $= -5x^2 - 5x + 5 = 0$ باشند، معادله ای بنویسید که ریشه هایش 2α و 2β باشند.	(د) ۹۳	
۴	۲	باشد اصول رسم نمودار رو برای هم این هر سوالات، قوی بار بگیرن مخصوصاً نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ ، $y = x $ و $y = x-1 $ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (شهریور ۹۲)	(ب) ۹۶	معادله $x-1 = \sqrt{x+1}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.
۵	۳	تابع $y = x-4 + x-1 $ رارسم کنید. سپس تعیین کنید معادله $5 = x-4 + x-1 $ چند جواب دارد؟	(خداداد) ۹۶	معادله $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید.
۶	۴	اگر نقاط A(-۱,۴) و B(۳,۲) انتهای دو سر قطعیک دایره باشند مطلوب است: الف) شاعر و مرکز این دایره ب) مساحت و محیط دایره	(۱/۵)	
۷	۵	آیا دو تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x}{x - 5} & x \neq 5 \\ 4 & x = 5 \end{cases}$ با هم مساوی اند؟ چرا؟	(۱/۲۵)	تابع $y = x-1 + x-4 $ را به دست آورید.
۸	۶	دامنه و برد تابع مقابله و خابطة آن را به دست آورید. برای نوشتن خابطة هر یوچ به یک نمودار، به لفاظ توپ و تو قلن توجه کنید. همچنان در هر کله از نمودار، به عدد ۰ و دقت کنید.	(۱/۲۵)	
۹	۷	تابع بودن یا نبودن رابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} & x \geq 0 \\ x-7 & x \leq 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.	(۱/۵)	تابع بودن پذیری تابع $y = x-1 + x-4 $ را با شرط $x \geq 1$ بررسی کرده و در صورت وارون پذیر بودن، دامنه و خابطة وارون آن را به دست آورید.
۱۰	۸	دو تابع $y = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنه تابع gof را بدون تشکیل $(gof)(x)$ به دست آورید. ب) خابطة gof را به دست آورید. پ) مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ را محاسبه کنید.	(۲)	الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نهایی بنویسید. ب) جرم توده را پس از ۸ ساعت برآورد کنید.
۱۱	۹	اگر $x = 8 \log_4 2 \sqrt{2}$ باشد لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه x چه قدر است؟	(۱)	با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت های زیر را بیابید.
۱۲	۱۰	اگر $\log_4 \sqrt[7]{3}$ (الف) $\log_{10} 0.01$ (ب)	(۱)	از معادله $\log_4 3 + \log_5 \sqrt{5} = \log_{10}(x^2 + 1)$ مقدار x را بیابید.
۱۳	۱۱	جمع نمرات	۲۰	موفق باشید



ردیف	حسابان (۱)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com										
۱	آزمون شماره ۹	نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم	نمره											
۱	۱	اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^3 - mx - 7 = 0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را به دست آورید.												
۲	۲	معادله $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ را حل کنید.												
۳	۳	سه نقطه $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) طول اضلاع مثلث را به دست آورید. ب) نشان دهید ABC قائم الزاویه است.												
۴	۴	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند:												
۵	۵	نمودار تابع f را رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند: الف) f وارون پذیر نباشد. ب) برای هر عدد حقیقی x نامساوی $f(x) < x$ برقرار باشد.												
۶	۶	اگر 2 باشد، تابع $(fog)(x) = x^7 - 4x + 5$ را به گونه‌ای مشخص کنید که g را به گونه‌ای از f باشد.												
۷	۷	اگر $\log_5 3 = a$ مطلوب است حاصل 625^{a} باشد.												
۸	۸	نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای M حدود 10 سال است. اگر نمونه‌ای از M که دارای جرم 20 میلی‌گرم است داشته باشیم آن‌گاه: الف) جدول رویه‌رو را تکمیل کنید.												
۹	۹	<table border="1" style="width: 100%;"><tr><td>t</td><td>۰</td><td>۱۰</td><td>۲۰</td><td>۳۰</td></tr><tr><td>جرم باقی‌مانده</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	t	۰	۱۰	۲۰	۳۰	جرم باقی‌مانده						
t	۰	۱۰	۲۰	۳۰										
جرم باقی‌مانده														
۱۰	۱۰	ب) جرمی که بعد از 5 سال باقی می‌ماند چقدر است؟												
۱۱	۱۱	چند دقیقه طول می‌کشد که عقریه دقيقه‌شمار به اندازه $\frac{3}{5}\pi / 2$ رادیان دوران کند؟												
۱۲	۱۲	سینوس و کسینوس زاویه 105° درجه را به دست آورید.												
۱۳	۱۳	اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد و $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ و $\cos \beta = \frac{3}{5}$ باشد حاصل عبارات $\sin 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.												
۱۴	۱۴	با رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{ x }$, وجود حد چپ و حد راست را در $x = 0$ و $x = 2$ بررسی کنید.												
۱۵	۱۵	با رسم نمودار $y = \sqrt{x-2} + 1$ مقدار حد را در اطراف نقطه $x = 2$ بررسی کنید.												
۱۶	۱۶	حدهای زیر را به دست آورید.												
۱۷	۱۷	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2}-x}$ (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin \Delta x \cdot \sin 3x}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7}{ 1-\cos x }$ (پ)												
۱۸	۱۸	نمودار $[y = x]$ را در بازه $(-1, 2)$ رسم کرده و بگویید آیا در بازه‌های $[0, 1]$ و $(1, 2]$ پیوسته است؟												
۱۹	۱۹	جمع نمرات	موفق باشید											



پاسخ نامه تشریحی

$$O = \frac{A+B}{2} = (1, 3)$$

-۹

$$OA = R = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{محيط دائرة } (b) = 2\pi R = 2\pi(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}\pi$$

$$\text{مساحت دائرة } (b) = \pi R^2 = \pi(\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=5 \Rightarrow f(x)=g(x)=4 \\ x \neq 5 \Rightarrow g(x)=\frac{x^2-5x}{x-5}=\frac{x(x-5)}{x-5}=x=f(x) \end{array} \right.$$

-۱۰

پس نتیجه می‌گیریم که دو تابع f و g با هم مساوی‌اند.

$$D_f = [-\infty, +\infty], R_f = (-\infty, -2] \cup [3, 5]$$

-۱۱

$$\begin{cases} A(-1, 2) \\ B(-6, 5) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{-6 + 1} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 1$$

$$-6 < x < -1, y = 3$$

$$\begin{cases} C(6, -2) \\ D(1, -4) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-4 - (-2)}{1 - 6} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 6) \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 & -6 \leq x \leq -1 \\ 3 & -1 < x < 6 \\ -\frac{2}{5}x + 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

-۱۲- برای تابع بودن توابع ۱ یا چند ضابطه‌ای دو شرط لازم است: ۱- همه ضابطه‌ها در دامنه خود تابع باشند. ۲- اشتراک دویه‌دو دامنه‌ها تهی باشد و یا این که اگر دامنه‌ها اشتراکی داشته باشند به ازای x ‌های مشترک یک مقدار برای ضابطه‌ها به دست آید.

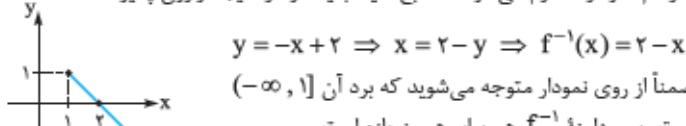
برای این سؤال، هریک از ضابطه‌ها تابع هستند. پس شرط اول برقرار است. دامنه‌ها در $x = 0$ اشتراک دارند پس $f(x)$ را از هر دو ضابطه حساب می‌کنیم، باید به یک جواب منحصر به فرد برسیم:

$$\begin{cases} \text{ضابطه بالا} \\ \text{ضابطه پایین} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} \neq 2 \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

-۱۳- چون $x \geq 1$ است، پس حاصل $(-x)$ نامنفی بوده و خودش از قدر مطلق خارج می‌شود:

$$f(x) = -(x-1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$

با رسم نمودار، معلوم می‌شود که تابع f یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.



$$f(x) = x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x+2}$$

-۱۴

$$\Rightarrow D_g = [-2, +\infty), D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq -2\} = [-1, +\infty)$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+2} = \sqrt{x-1+2} = \sqrt{x+1}$$

$$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2-1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2}$$

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

یک دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ حاصل می‌شود. طبق فرمول مجموع جملات

دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2^n} \geq -\frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100$$

$$\min(n) \rightarrow n = 7$$

يعني بعد از ۷ مرحله، حداقل سطح مرتع رنگ شده است.

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{5}{4} \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4}$$

$$S_{\text{جديد}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

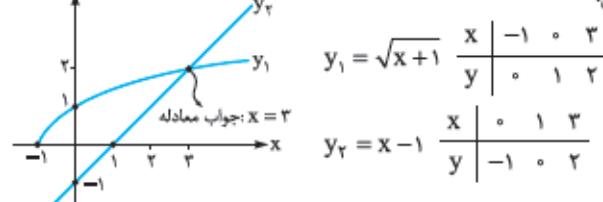
$$P_{\text{جديد}} = (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta = 4\left(-\frac{5}{4}\right) = -5$$

$$x^2 - S_{\text{جديد}} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - 5 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = x-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{غیرق}) \\ x = 3 & (\text{قق}) \end{cases}$$

حل هندسی:



-۱۵- ابتدا در سمت چپ تساوی مخرج مشترک بگیرید:

$$\frac{\Delta(x-2)-4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{\Delta x - 14}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

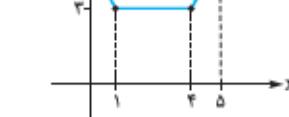
$$\Rightarrow \Delta x - 14 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & (\text{غیرق}) \\ x = 7 & (\text{قق}) \end{cases}$$

-۱۶- ابتدا تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بنویسید:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & x < 1 \\ 4 - 1 = 3 & 1 \leq x \leq 4 \\ 2x - 5 & x > 4 \end{cases}$$

معادله دو جواب دارد





(الف)

t	زمان (ساعت)	۰	۱	۲	۳
y	جرم (میلی‌گرم)	10	10×2	$(10 \times 2) \times 2$	$(10 \times 2) \times 2 \times 2$

$$\Rightarrow y = 10 \times 2^t \quad \xrightarrow{t=3} \quad y = 10 \times 2^3 = 256 \text{ میلی‌گرم} \quad (\text{ب})$$

$$x = \lambda \log_2 \sqrt[3]{2} = \lambda \log_2 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = \lambda \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \lambda \times \frac{2}{3} \log_2 2 \quad (-13)$$

$$= \lambda \times \frac{2}{3} = 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \log_x 4(x+3) = \log_2 4(6+3) = \log_2 36 = \log_2 6^2 = 2 \log_2 6 = 2$$

$$\text{الف) } \log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad (-14)$$

$$\text{ب) } \log_{10} 10 = x \Rightarrow 10^x = 10 \Rightarrow 10^x = \frac{1}{10^{-x}} \Rightarrow x = -1$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \quad (-15)$$

$$\log_2 \sqrt{5} = \log_2 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 5 = \frac{1}{2}$$

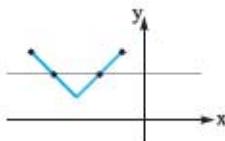
$$\log_2^r + \log_2^{\sqrt{5}} = \log_2^{(2^r+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{2} = \log_2 (2^r + 1) \Rightarrow r = 2^r + 1$$

$$\Rightarrow 2^r - r + 1 = 0 \Rightarrow (2-1)^r = 0 \Rightarrow r = 1$$



۵- برای آن که f وارون پذیر نباشد باید آن را طوری رسم کنیم که خط افقی پیدا شود که نمودارش را در بیش از یک نقطه قطع کند. ضمناً در شکل رسم شده، طول نقاط منفی و عرض آنها مثبت است، پس رابطه $x < f(x)$ هم بقرار است. ($f(x) = y$ همان y است.)



$$f(g(x)) = g^r(x) + 2g(x) + 2 \quad \text{پس } f(x) = x^r + 2x + 2$$

$$\text{از طرفی سؤال گفته } f(g(x)) = x^r - 4x + 5 \quad \text{پس:}$$

$$g^r(x) + 2g(x) + 2 = x^r - 4x + 5$$

$$\Rightarrow g^r(x) + 2g(x) + 1 = x^r - 4x + 4$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^r = (x - 4)^r \quad \xrightarrow{\text{جذر}} \quad g(x) + 1 = \pm(x - 4)$$

$$\Rightarrow g(x) = \pm(x - 4) - 1$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} 625 = \log_{\frac{4}{3}} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{\frac{4}{3}} 5 = \frac{12}{3} \log_{\frac{4}{3}} 5 \quad -7$$

$$= 6 \times \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} 5} = 6 \times \frac{1}{a} = \frac{6}{a}$$

(الف)

t	۰	۱۰	۲۰	۳۰
جرم باقیمانده	۲۰	$\frac{1}{2} \times 20$	$\frac{1}{4} \times 20$	$\frac{1}{8} \times 20$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} \times 20 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} \times 20 = \left(\frac{1}{2}\right)^t \times 20 = \frac{20}{3^t} = \frac{20}{3^t} \quad \text{ب)$$

-۶- عقریه دقیقه‌شمار در یک دور کامل یعنی در 360° دقیقه، 2π رادیان دوران می‌کند.
 $\frac{2\pi}{2/\Delta\pi} = \frac{60}{x}$ با یک تناسب ساده خواهیم داشت:

$$\Rightarrow x = \frac{60 \times 2 / \Delta\pi}{2\pi} = \frac{60}{\pi}$$

یعنی ۷۵ دقیقه طول می‌کند تا $2\pi / 5\pi$ دوران کند.

$$\sin(10^\circ) = \sin(45^\circ + 6^\circ) = \sin 45^\circ \cos 6^\circ + \cos 45^\circ \sin 6^\circ \quad -10$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(10^\circ) = \cos(45^\circ + 6^\circ) = \cos 45^\circ \cos 6^\circ - \sin 45^\circ \sin 6^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos^r \alpha = 1 - \sin^r \alpha = \frac{16}{25} \quad \xrightarrow{\text{جذر}} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad -11$$

$$\cos \beta = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin^r \beta = 1 - \cos^r \beta = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sin \beta = -\frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

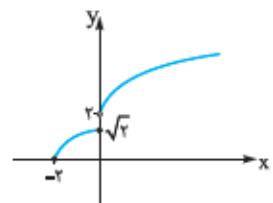
$$\cos 2\alpha = \cos^r \alpha - \sin^r \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^r - \left(\frac{3}{5}\right)^r = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{63}{65}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = [-2, +\infty] \\ \text{برد} = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند. چون در معادله اولیه، صدق می‌کنند.

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad -3\text{-الف)$$

$$AC = \sqrt{(1-5)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

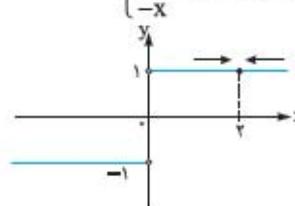
مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

(ب)

-۴

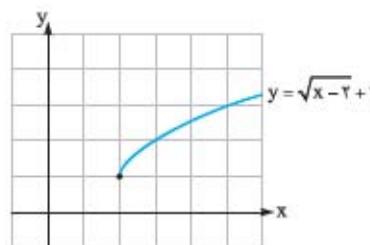


$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$



($\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = -1$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f$ ندارد وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow \gamma^+} f = \lim_{x \rightarrow \gamma^-} f = 1$$



$\lim_{x \rightarrow \gamma^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \gamma^-} f(x) = 1$ وجود ندارد

پس در $x = \gamma$ حد ندارد.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \times \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+\sqrt{2-x}} = \frac{x^2-1}{x^2-2+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \sin \alpha x} \frac{1-\cos x}{\sin \alpha x \cdot \sin x} = \frac{0}{0}$$

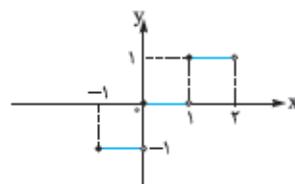
$$\lim_{x \rightarrow \sin \alpha x} \frac{\sin x}{\sin \alpha x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow \sin \alpha x} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -} \frac{x^\alpha}{|1-\cos x|} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -} \frac{x^\alpha}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow -} \frac{x^\alpha}{\alpha \sin x} = \frac{0}{\alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -} \frac{x^\alpha}{\alpha \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

مثال: وقتی $x \rightarrow -$ نتیجه می‌گیریم که x در ربع چهارم است. در ربع چهارم مقدار کسینوس بین صفر و یک است لذا حاصل $(1-\cos x)$ مثبت می‌شود و خودش از قدر مطلق خارج می‌شود.



تابع در بازه $[0, \pi]$ ناییوسته و در بازه $(\pi, 2\pi]$ پیوسته است.



درس نامهٔ توب برای شب امتحان

مثال: در یک دنباله هندسی $a_5 = 36$ و $a_7 = 36$ است. مجموع ۴ جمله اول دنباله را به دست آورید.

$$\begin{aligned} a_7 &= 36 \Rightarrow aq^6 = 36 && \text{تقسیم روایط} \\ a_5 &= 4 \Rightarrow aq^4 = 4 && \text{برهم} \\ \Rightarrow q^2 &= 9 \Rightarrow q = \pm 3 \end{aligned}$$

$$aq^4 = 4 \xrightarrow{(q=\pm 3)} a \cdot a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{a}$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_7 = \frac{\frac{4}{a}(1-3^7)}{1-3} = \frac{4}{a} \times 40 = \frac{160}{a}$$

معادلات درجه دوم

معادله درجه دوم: در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله درجه دوم آشنا شدید. یادآوری: هر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ (۰) است که با فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ ، جواب‌های آن در صورت وجود از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، خواهیم داشت:

$$\text{۱) } S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} : \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$\text{۲) } P = \alpha \beta = \frac{c}{a} : \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

$$\text{۳) } |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} : \text{تفاضل ریشه‌ها}$$

$$\text{۴) } \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P : \text{مجموع مربعات ریشه‌ها}$$

$$\text{۵) } \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS : \text{مجموع مکعبات ریشه‌ها}$$

$$\text{۶) } |\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}| = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}} : \text{و مثبت (}\alpha\text{)}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، بدون به دست آوردن ریشه‌ها حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

$$\text{الف) } |\alpha - \beta| \quad \text{ب) } \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{ج) } \alpha^2 \beta + \beta^2 \alpha$$

$$\text{الف) } x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = 2, \quad P = \frac{c}{a} = -4$$

$$\alpha^2 \beta + \beta^2 \alpha = \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) = -4(2^2 - 2(-4)) = -48$$

$$\text{ب) } \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{S}{S^2 - 2PS} = \frac{2}{2^2 - 2(-4)(2)} = \frac{2}{8 + 24} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ج) } |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{4 - 4(1)(-4)}}{|1|} = \frac{\sqrt{20}}{1} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

نکته: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم را داشته باشیم خود معادله برابر است با:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم $(1 \pm \sqrt{3})$ باشند، خود معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

فصل ۱: محاسبات حسابی، معادلات و نامعادلات

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله حسابی و هندسی آشنا شدید. مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + n - 1 + \dots + 1$$

$$\Rightarrow 2S = \underbrace{(1+n) + (1+n) + \dots + (n+1)}_{n \text{ تا}}$$

$$\Rightarrow 2S = n(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: بر محیط یک دایره 10 نقطه متمایز قرار می‌دهیم و هر نقطه را به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد تمام پاره خط‌های حاصل (این پاره خط‌ها و تتر نامیده می‌شوند) را به دست آورید.

پاسخ: نقطه اول را به 9 نقطه دیگر وصل می‌کنیم، 9 وتر به وجود می‌آید. نقطه دوم را به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول)، وصل کنید 8 وتر دیگر به وجود می‌آید. با ادامه همین روند، تعداد تمام وترها برابر است با: $9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = \frac{9(9+1)}{2} = 45$. مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی را نماد S_n (مجموع n جمله اول) تماش می‌هند. که از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شوند:

اگر جملة اول و قدرنسبت را داشته باشیم

$$\begin{array}{c} \text{تعداد جملات} \\ \uparrow \\ S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) \\ \downarrow \\ \text{دنباله حسابی} \end{array}$$

اگر جملة اول و جمله آخر را داشته باشیم

$$\begin{array}{c} \text{جمله آخر} \\ \uparrow \\ S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \\ \downarrow \\ \text{دنباله هندسی} \end{array}$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad (q \neq 1)$$

مثال: مجموع چند جمله اول دنباله حسابی $1, 15, 17, 15, \dots$ برابر صفر است؟

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) \xrightarrow{a=17, d=-2, n=7, S_n=0} \frac{n}{2} [2(17) + (n-1)(-2)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} (34 - 2n + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ 36 - 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 18$$

مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع 10 جمله اول 33 برابر مجموع 5 جمله اول است. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

$$S_{10} = 33S_5 \Rightarrow \frac{a(1-q^{10})}{1-q} = 33 \times \frac{a(1-q^5)}{1-q}$$

$$\Rightarrow (1-q^5)(1+q^5) = 33(1-q^5) \Rightarrow 1+q^5 = 33$$

$$\Rightarrow q^5 = 32 = 2^5 \Rightarrow q = 2$$



لمسه: چون $x = \frac{1}{2}$ صفر تابع f است پس $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) - k\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{k}{2} - 8 = 0 \Rightarrow k = -12$$

اکنون از تقسیم (x) بر $2x - 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} 8x^2 + 4x^2 + 12x - 8 \\ \hline - 8x^2 + 4x^2 \\ \hline 8x^2 + 12x - 8 \\ \hline - 8x^2 + 4x \\ \hline 16x - 8 \\ \hline - 16x + 8 \\ \hline \end{array} \quad | \quad 2x - 1$$

$$f(x) = (2x - 1)(4x^2 + 4x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{+4} x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0 \Rightarrow$$

یعنی تابع f صفر دیگری ندارد.

بحث در مورد علامت ریشه‌های معادله درجه ۲ بدون حل آن

اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه باشد (یعنی $\Delta > 0$ باشد)

آن‌گاه بدون حل کامل آن می‌توان گفت:



مثال: بدون حل معادله و با استفاده از S ، P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های

$$\text{معادله } 7x^2 - 7x - 18 = 0 \text{ بحث کنید.}$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(-18) = 121 > 0 \quad \text{لمسه:}$$

$$P = \frac{c}{a} = -18 < 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها مختلف‌العلامت هستند.}$$

$$S = \frac{-b}{a} = 7 > 0 \Rightarrow \text{ریشه مثبت از قدر مطلق ریشه منفی، بزرگ‌تر است.}$$

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه دوم

می‌دانید که هر تابع درجه دوم به شکل $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ یک سهمی

$$\text{قائم می‌باشد که طول رأس آن } x_S = \frac{-b}{2a} \text{ و عرض رأس } y_S = \frac{-\Delta}{4a} \text{ می‌باشد. ضمناً}$$

اگر $a > 0$ باشد، سهمی به شکل S می‌باشد یعنی دارای \min است و اگر $a < 0$

باشد، سهمی به شکل S است یعنی \max دارد؛ ضمناً خط به معادله $x = \frac{-b}{2a}$

محور تقارن سهمی است.

مثال: اگر نمودار تابع $y = (3-m)x^2 + (m^2 - 16)x + 1$ در نقطه‌ای به طول

(-1) دارای مینیمم باشد، مقدار m را به دست آورید.

$$P = \alpha \cdot \beta = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

$$x^2 - 8x + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، مقدار m را

$$\alpha\beta^2 + 4 = 0$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\alpha\beta^2 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha\beta} \cdot \beta + 4 = 0 \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله به جای } x]{(-1)^2 - 3m(-1) + 4 = 0} m = \frac{-5}{3}$$

مثال: اگر به جای P از S استفاده می‌کردیم به رابطه $S = \frac{-b}{a}$ می‌رسیدیم

که دارای مجھول m بود و نمی‌توانستیم مسئله را حل کنیم.

چندجمله‌ای وارونه یک چندجمله‌ای

جایگزینی کنیم

اگر چندجمله‌ای $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد ($a \neq 0$ ، به چندجمله‌ای $Q(x) = dx^n + cx^{n-1} + \dots + bx + a$ وارونه چندجمله‌ای $P(x)$ می‌گوییم، ریشه‌های معادله $= 0$ معکوس ریشه‌های $= 0$ هستند.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $= 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید

که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

مثال: کافی است چندجمله‌ای وارونه $P(x) = 4x^2 - 5x - 6 = 0$ را مساوی صفر قرار دهیم، یعنی:

صفرهای تابع

نقاط برخورد نمودار f با محور X را «صفرهای تابع f » می‌نامیم. طول این نقاط، در واقع جواب‌های معادله $= 0$ می‌باشند.

متلاً اگر نمودار f به صورت رویه‌رو باشد نتیجه می‌گیریم که معادله $= 0$ یک ریشه ساده (x_1) و یک ریشه مضاعف (x_2) دارد دقت کنید که در ریشه مضاعف، نمودار بر محور X هماس است.

مثال: صفرهای تابع زیر را به دست آورید.

$$g(x) = (x - \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) + 2$$

لمسه: عبارت $(x - \frac{1}{x})$ دو بار تکرار شده پس آن را t نامیده تا یک معادله درجه دوم ایجاد شود (به این روش، روش تغییر متغیر می‌گوییم).

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{معادله (1)}: x - \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 - 1 = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{معادله (2)}: x - \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{جوابهای معادله (1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{جوابهای معادله (2)}$$

مثال: اگر $x = \frac{1}{k}$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = 8x^2 + 4x^2 - kx - 8$ باشد، ابتدا k را باید سپس سایر صفرها را در صورت وجود باید.



مثال: دو نقاش در حال رنگ زدن یک سالن هستند. اگر این دو نقاش با هم کار کنند، ۱۸ روزه کار تمام می شود. ولی اگر هر کدام به تنها یکی کار کنند، نقاش اول ۱۵ روز زودتر از دیگری کار را تمام می کند. هر کدام از این دو نقاش به تنها یکی کار را در چند روز تمام می کنند؟

پاسخ: گفته شده این دو نفر اگر با هم کار کنند ۱۸ روزه کار تمام می شود پس این دو نقاش در هر روز $\frac{1}{18}$ کل کار را انجام می دهند. اگر نقاش اول کار را در X روز تمام کند

طبق فرض سؤال، نقاش دوم، کار را در $(X+15)$ روز تمام می کند. لذا:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مقدار کار نفر اول در هر روز} = \frac{1}{X} \\ \text{مقدار کار نفر دوم در هر روز} = \frac{1}{X+15} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{X} + \frac{1}{X+15} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{\text{ضرب تمام جملات در}}{18(X+15)} \rightarrow 18(X+15) + 18X = X(X+15)$$

$$\Rightarrow X^2 - 21X - 270 = 0 \Rightarrow (X-30)(X+9) = 0 \Rightarrow X = 30, X = -9$$

ولی $X = -9$ رد می شود چون تعداد روزهای کار نمی تواند منفی باشد. پس نفر اول به تنها یکی در ۳۰ روز و نفر دوم به تنها یکی در ۴۵ روز کار را تمام می کند.

مثال: محسن می خواهد محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد تولید کند. اگر او

۲۰۰ گرم آب نمک ۴ درصدی در اختیار داشته باشد:

(الف) چه قدر نمک به آن اضافه کند تا محلول مطلوب به دست آید؟

(ب) چه قدر آب نمک موجود را تبخیر کند تا به محلول موردنظرش برسد؟

پاسخ: گرم X گرم نمک به محلول اضافه کنیم، وزن نمک $(X+4)$ و وزن محلول

فرض کنید X گرم نمک به محلول اضافه کنیم، وزن نمک $(X+4)$ و وزن محلول $(200+X)$ می شود؛ با یک تناسب ساده خواهیم داشت:

$$\frac{X+4}{200+X} = \frac{7}{200} \Rightarrow X = \frac{600}{93} \approx 6.45 \Rightarrow 1400 + 7X = 1400 + 10.0X \Rightarrow 1400 - 7X = 100 \Rightarrow X = \frac{600}{7} \approx 85.71$$

ب) فرض کنید باید X گرم آب را تبخیر کنیم تا به غلظت موردنظر برسیم، در این صورت مقدار نمک تغییری نمی کند:

محلول نمک

$$\frac{X}{7} = \frac{200-X}{100} \Rightarrow 1400 - 7X = 800 \Rightarrow X = \frac{600}{7} \approx 85.71$$

معادلات گنگ (رادیکالی یا اصم)

برای حل این گونه معادلات، ابتدا در صورت امکان، قسمت رادیکالی را از بقیه قسمت ها جدا کرده سپس طرفین را به توان فرجه رادیکال می رسانیم. (عموماً این فرجه در امتحانات نهایی برابر ۲ است).

پس از حل معادله حاصل، باید جواب را در معادله اولیه جای گذاری کنیم، دو طرف معادله باید مساوی شوند. ضمناً اگر فرجه زوج باشد، زیر رادیکال نباید منفی شود.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{15+\sqrt{2x+80}} = 5 \quad (\text{الف}) \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$$

$$\sqrt{15+\sqrt{2x+80}} = 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 15+\sqrt{2x+80} = 25 \quad (\text{الف})$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+80} = 10 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x+80 = 100 \Rightarrow x = 10$$

جواب قابل قبول است چون در معادله اولیه، صدق می کند.

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9} \quad (\text{ب})$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1+3x+4+2\sqrt{3x^2+7x+4} = 5x+9$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+7x+4} = x+4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$4(3x^2+7x+4) = x^2+8x+16 \Rightarrow 11x^2+20x = 0$$

پاسخ: طول مینیمم یا ماکسیمم، هر دو از فرمول $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید، لذا:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m^2-16)}{2(4-m)} = -1 \Rightarrow m^2-16 = 8-2m$$

$$\Rightarrow m^2+2m-24 = 0 \Rightarrow (m+6)(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 4 \end{cases}$$

جواب $m = 4$ رد می شود چون با جای گذاری آن در معادله سهمی، ضریب x^2 صفر می شود و سهمی از بین می روید.

مثال: در تابع درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در هر یک از حالت های زیر اولاً ضوابط a ، b ، c ، ثانیاً علامت $(P(x))$ را تعیین کنید.



پاسخ: $O(0,0) \in$ سهمی $\Rightarrow 0 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(4,0) \in \text{سهمی} \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) \Rightarrow 16a + 4b = 0 \\ B(-2,-2) \in \text{سهمی} \Rightarrow -2 = a(-2)^2 + b(-2) \Rightarrow 4a - 4b = -2 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = \frac{-1}{6}, b = \frac{2}{3}$$

پس معادله سهمی به صورت $P(x) = \frac{-1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x$ می باشد:

x	$-\infty$	+	4	$+\infty$
$P(x)$	-	+	+	-

$O(0,0) \in$ سهمی $\Rightarrow c = 0$

$$x_S = \frac{-b}{2a} \xrightarrow{x_S = 0} \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$A(1,2) \in \text{سهمی} \Rightarrow 2 = a(1)^2 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow P(x) = ax^2 = 2x^2 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & + & +\infty \\ \hline P & + & : & + \end{array}$$

معادلات گویا

برای حل معادلات گویا، ابتدا در صورت امکان، مخرج ها را تجزیه می کنیم و تمام جملات را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم تا مخرج ها از بین بروند سپس معادله حاصل را حل می کنیم. دقت کنید که جواب به دست آمده نباید هیچ مخرجی را صفر کند. البته بچههای عزیز دقت کنید که طراحان امتحان نهایی، ممکن است یک مسئله مطرح کنند که برای حل آن، لازم باشد یک معادله گویا تشکیل دهیم.

$$\text{معادله گویا: } \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{2x-1} = 0 \Rightarrow 2x+3 = 5 \Rightarrow x = 1$$

$$2x-2 = 2(x-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2-1 = (x-1)(x+1) \\ 2x+2 = 2(x+1) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 2(x-1)(x+1)$$

$$2(x-1)(x+1)\left(\frac{2x+3}{2(x-1)} - \frac{5}{(x-1)(x+1)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x+3) - 5(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2+3x+2x+3 - 5x+5 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولی $x = 1$ حداقل یکی از مخرج های معادله اولیه را به صفر تبدیل می کند پس معادله جواب ندارد.