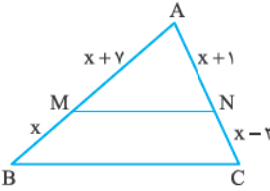
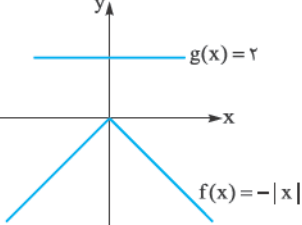
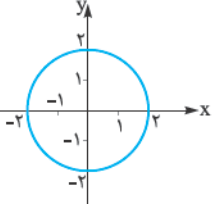
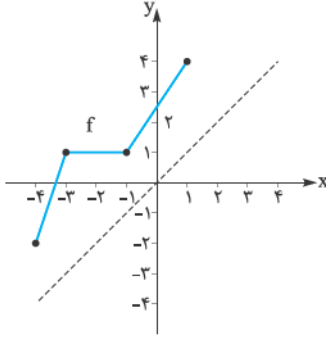


نمره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۲)
آزمون شماره ۱				
فصل اول				
۱/۵	<p>معادلات زیر را حل کنید.</p> <p>الف) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5x+2} + 2 = 0$</p> <p>ب) $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$</p>			
۱	<p>۲ دو فرد A و B کاری را با هم در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند؛ ولی اگر تک تک، این کار را انجام دهند، فرد A در این گونه مسائل، معمولاً دو مجهول وجود دارد که باید یکی از اون‌ها رو X فرض کنید و دیگری رو هم بر حسب X بنویسید، یعنی توی معادله‌ای که می‌نویسید نباید دو تا مجهول مثل X و Y وجود داشته باشه، چون معادله قابل حل نیست.</p>			
۱	<p>۳ نسبت دو عدد مثبت برابر است با عدد طلایی، اگر عدد کوچک‌تر $(\sqrt{5}-1)$ باشد، عدد بزرگ‌تر را به دست آورید.</p>			
۰/۷۵	<p>۴ خط $2x - 5y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(1, -4)$ مماس است. شعاع دایره، محیط و مساحت آن را به دست آورید.</p>			
۰/۷۵	<p>۵ معادله $0 = 2x^2 - 7x^2 - 4$ را به روش تغییر متغیر حل کنید.</p>			
فصل دوم				
۱	<p>۶ درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید، برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید. الف) در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌روی آن‌ها برابر باشند. ب) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن گاه قطرهای بر هم عمودند و برعکس. پ) در مثلث متساوی‌الاضلاع، یک پاره‌خط نیمساز است اگر و تنها اگر میانه باشد. ت) اگر در یک چهارضلعی، قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آن گاه بر هم عمودند.</p>			
۱/۵	<p>۷ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید. الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد. ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد. پ) مثلثی که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 8 cm^2 باشد.</p>			
۱	<p>۸ اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی زوج باشد، به کمک برهان خلف ثابت کنید که n نیز عددی زوج است.</p>			
۱/۵	<p>۹ در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x و سپس طول اضلاع AC و AB را بیابید.</p> <p>از قضیه تالس یا عکس قضیه تالس، تماماً در تمام امتحانات سوال طرح می‌شه، با این‌که ساده است ولی خیلی مهمه. فاصله، تالس رو چری بگیرید برای فودش شفیقی پوده‌ها.</p>			
				
فصل سوم				
۱	<p>۱۰ با توجه به نمودارهای f و g نمودار تابع $(f-g)(x)$ را رسم کنید.</p>			
				
۱	<p>۱۱ آیا نمودار روبه‌رو، تابع است؟ چه قسمتی از دایره را انتخاب کنیم تا نمودارش یک‌به‌یک باشد؟</p>			
				

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۲)
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف
۱	<p>توجه کنید برای تساوی دو تابع، فقط تساوی فرمول‌های آن‌ها کافی نیست بقیه‌شو نمی‌گم که جواب، نونره.</p> <p>آیا توابع $f(x) = \begin{cases} 3x-3 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = 3$ با هم برابرند؟ چرا؟</p>			۱۲
۱/۵	<p>نمودار وارون تابع مقابل را رسم کنید. آیا نموداری که رسم می‌کنید خودش تابع است؟ آیا نمودار f یک‌به‌یک است؟</p> 			۱۳
فصل چهارم				
۱/۵	<p>حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.</p> $A = 2 \cos(-45^\circ) \times \tan 12^\circ + \cot 24^\circ \times \sin(-225^\circ)$			۱۴
۱/۵	<p>بدون رسم نمودار مشخص کنید آیا نمودار دو تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ و $y = -\cos(4\pi - x)$ بر هم منطبق هستند یا خیر؟</p>			۱۵
۱	<p>این سوال رو پارسال هم داشتین، یعنی در واقع تکراریه، ولی چون در کتاب یازدهم دوباره مطرح شده ما هم ازش سوال آوردیم.</p> <p>ثابت کنید:</p> $\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\cot x - \cos x}{\cos x} = \frac{2}{\sin x}$			۱۶
۱/۵	<p>نمودار $y = 2 \cos x - 1$ را در یک بازه دلخواه به طول 2π رسم کنید.</p>			۱۷
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) $\sqrt{x-3} + \sqrt{5x+2} + 2 = 0$
 نامنفی نامنفی مثبت

جمع دو عبارت نامنفی و یک عدد مثبت، هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر صفر شود، پس این معادله جواب ندارد.

ب) $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$

ضرب تمام جملات در $3x(x-1)$ → $6x(3x) + (x-1)(x-1) = 3(3x)(x-1)$

⇒ $18x^2 + x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 9x$ ⇒ $10x^2 + 7x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(10)(1) = 9$ ⇒ $x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{-7 \pm 3}{20}$

⇒ $\begin{cases} x' = \frac{-7+3}{20} = \frac{-4}{20} = \frac{-1}{5} \\ x'' = \frac{-7-3}{20} = \frac{-10}{20} = \frac{-1}{2} \end{cases}$

هر دو جواب قابل قبول اند، چون هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند.

۲- اگر زمان فرد A را X در نظر بگیریم، زمان فرد B برابر $(X+10)$ خواهد بود، لذا:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$ → ضرب جملات در $12x(x+10)$

$12(x+10) + 12x = x(x+10)$ ⇒ $12x + 120 + 12x = x^2 + 10x$

⇒ $x^2 - 14x - 120 = 0$ ⇒ $(x-20)(x+6) = 0$
تجزیه

⇒ $\begin{cases} x-20=0 \Rightarrow x=20 & (\text{قق}) \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 & (\text{غقق}) \end{cases}$

پس زمان شخص B هم برابر است با: (ساعت) $x+10 = 20+10 = 30$

تذکره: در ابتدای حل مسئله، می‌توانستید زمان فرد B را X و زمان فرد A را $(X-10)$ فرض کنید.

۳- اگر عدد بزرگ‌تر را X و عدد کوچک‌تر را Y بنامیم، با توجه به متن سؤال، خواهیم داشت:

$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

طرفین وسطین → $2x = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) \Rightarrow 2x = (\sqrt{5})^2 - 1^2$

⇒ $2x = 4 \Rightarrow x = 2$

۴- فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، همان شعاع دایره است، لذا:

$2x - 5y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=0 \end{cases}, W \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ x_1 \\ \downarrow \\ y_1 \end{matrix}$

شعاع = $r = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) + (-5)(-4) + 0|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{22}{\sqrt{29}}$

محیط دایره = $2\pi r = 2\pi \times \left(\frac{22}{\sqrt{29}}\right) = \frac{44\pi}{\sqrt{29}}$

مساحت دایره = $\pi r^2 = \pi \left(\frac{22}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{484\pi}{29}$

۵-

$2x^2 - 7x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2=t} 2t^2 - 7t - 4 = 0$

$\Delta = 49 + 32 = 81 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{7+9}{4} = 4 \\ t = \frac{7-9}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2 \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$

۶- الف) درست است.

ب) نادرست است؛ چون مثلاً مستطیل، نوعی متوازی‌الاضلاع است ولی قطرهای آن بر هم عمود نیستند.

پ) درست است.

ت) نادرست است؛ مثلاً در متوازی‌الاضلاع مقابل، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، ولی بر هم عمود نیستند.

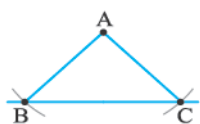


۷- الف) کافی است به مرکز A و شعاعی که اندازه‌اش

بیشتر از فاصله A تا d باشد کمانی بزنیم تا خط d را در ۲

نقطه به نام‌های B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقین

ABC به دست می‌آید.



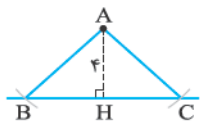
مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ⇒ شعاع دایره $AB = AC$

ب) کافی است کمانی به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر بزنیم تا خط d را در نقاطی

مثل N و M قطع کند؛ مثلث AMN متساوی‌الساقین بوده و طول ساق‌های آن ۶

سانتی‌متر است.

پ) طبق شکل، AH ارتفاع وارد بر قاعده است و داریم:



مساحت $S = \frac{BC \times AH}{2} = 8 \Rightarrow \frac{BC \times 4}{2} = 8 \Rightarrow BC = 4$

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر وتر، میانه هم

هست لذا: $BH = HC = 2$ بنابراین:



فیناگورس: $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

جذر → $AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

پس باید به مرکز A و شعاع $2\sqrt{5}$ کمان بزنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند، مثلث ABC جواب است.

۸- فرض می‌کنیم n فرد باشد (فرض خُلف) لذا خواهیم نوشت:

$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1$

m هر عدد صحیحی که باشد، حاصل $2m + 1$ عددی فرد می‌شود؛ پس به تناقض رسیده‌ایم،

چون در متن سؤال، گفته شده n^2 زوج است؛ لذا فرض خُلف نادرست بوده و n زوج است.



$$\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\cot x - \cos x}{\cos x}$$

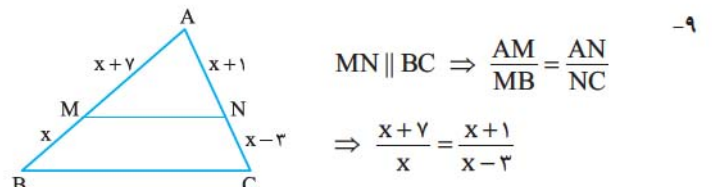
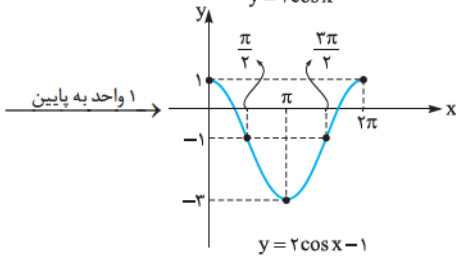
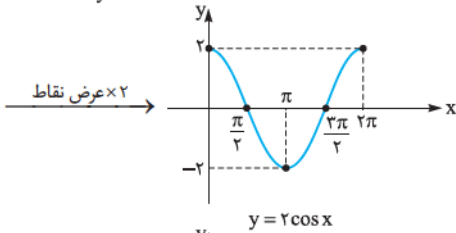
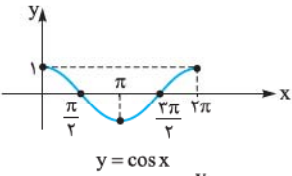
$$= \frac{(1 + \sin x) \cos x + \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x \right)}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\cos x + \cancel{\sin x \cos x} + \cos x - \cancel{\sin x \cos x}}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin x}$$

-۱۶

سمت چپ تساوی با سمت راست آن برابر شد، پس رابطه داده شده صحیح است.

-۱۷



-۹

طرفین وسطین $\rightarrow (x+7)(x-3) = x(x+1)$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 21 = x^2 + x \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

$$AB = x + 7 + x = 7 + 7 + 7 = 21$$

$$AC = x + 1 + x - 3 = 7 + 1 + 7 - 3 = 12$$

-۱۰

$(D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}) \Rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = -|x| - 2$



$$y = -|x| - 2$$

۱۱- خیر، تابع نیست؛ چون می توان خطی عمودی (موازی محور y ها) رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.

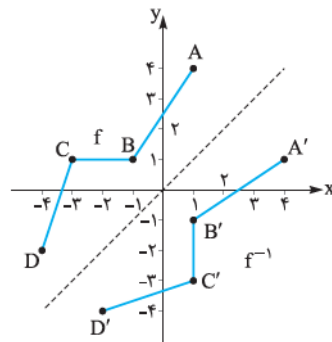
اگر هر یک از ربع دایره ها را انتخاب کنیم، تابعی یک به یک و وارون پذیر ایجاد می شود، مانند:

دامنه $= [0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3$$

-۱۲

پس f و g با هم برابرند، چون هم دامنه ها و هم ضابطه هایشان مساوی شدند.



۱۳- کافی است قرینه نقاط مهم

شکل (A, B, C, D) را نسبت به

خط $y = x$ رسم کرده و آن ها را با

خطوط راست به هم وصل کنیم، مثلاً

$A(1, 4) \Rightarrow A'(4, 1)$ ضمناً f^{-1}

تابع نیست چون f یک به یک نیست.

-۱۴

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 12^\circ = \tan(18^\circ - 6^\circ) = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 24^\circ = \cot(\overset{\text{ربع دوم}}{18^\circ + 6^\circ}) = \cot 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(-225^\circ) = -\sin 225^\circ = -\sin(\overset{\text{ربع سوم}}{18^\circ + 45^\circ}) = -(-\sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{-5\sqrt{6}}{6}$$

$$y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$$

-۱۵

$$y = -\cos(\overset{\text{ربع اول}}{4\pi - x}) = -\cos x$$

$$y = -\cos(\overset{\text{ربع چهارم}}{4\pi - x}) = -\cos x$$

ضابطه های دو تابع با هم برابر شدند، دامنه هایشان هم که هر دو برابر \mathbb{R} است، پس

نمودارهایشان نیز بر هم منطبق است.