

مدت پاسخگویی: ۱۱۰ دقیقه

تاریخ امتحان: ۹۴/۰۳/

نام دبیر: آقای هاشمی زاده

نمره:

امضاء دبیر :

به نام دلتای توانا
اداره آموزش و پرورش ناحیه ۴ مشهد



مؤسسه آموزشی تربیت علامه طباطبائی

دبیرستان پسرانه علامه طباطبائی

متوسط ۱ متوسط ۲

نام و نام خانوادگی:

شماره صندلی:

نام امتحان: هندسه تحلیلی

پایه - رشته: چهارم - ریاضی فیزیک

شماره کلاس: ۴۰۱

تعداد صفحه:

بارم	سوالات	ردیف
۱/۵	بردارهای $a = (1, -1, 6)$ و $b = (6, 4, 0)$ و $c = (2, 1, -1)$ مفروضند الف: قرینه بردار a را نسبت به امتداد بردار $b - 2c$ پیدا کنید ب: حجم متوازی السطوح تولید شده توسط بردار a ، b و c را محاسبه کنید	۱
۰/۵	اگر $ \vec{a} = 2$ ، $ \vec{b} = 3$ و $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 4$ مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بدست آورید.	۲
۱/۵	فاصله دو خط موازی $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$ و $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ زیر را پیدا کنید.	۳
۱/۵	مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 + 8x + 8y = 0$ را تعیین نموده و آن را رسم کنید.	۴
۰/۵	معادله دایره ای را بنویسید که مرکزش $O(2, 3)$ و بر خط $3x + 4y = 8$ مماس باشد؟	۵
۵/۵	توجه: ادامه ی سوالات در صفحه ی دوم است	جمع بarm صفحه

۱	معادله بیضی را بنویسید که کانون های آن $F\left(\frac{2 \pm \sqrt{5}}{3}\right)$ و نقطه $A(7,3)$ رأس کانونی آن باشد	۶
۱	معادلات مجانب های هذلولی به صورت $y = kx - 4$ و $y = (2k - 6)x + 8$ می باشد . الف : مقدار k را بدست آورید . ب: مرکز هذلولی را بدست آورید	۷
۱/۵	با انتخاب زاویه ای مناسب و با استفاده از دوران محورهای مختصات نوع مقطع مخروطی به معادله ی $xy + 9\sqrt{2} + 1 = 0$ را مشخص کنید ؟	۸
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^5 را بدست آورید .	۹
۱	اگر $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را بدست آورید ؟	۱۰
۵/۵	توجه : ادامه ی سوالات در صفحه ی سوم است جمع بارم صفحه	

۱/۵	<p>۱۱</p> <p>ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید؟</p>	۱۱
۱	<p>۱۲</p> <p>اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ باشند آنگاه ماتریس $(AB)^6$ را بدست آورید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>۱۳</p> <p>به کمک خواص دترمینان ثابت کنید.</p> $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$	۱۳
۴	<p>توجه: ادامه ی سوالات در صفحه ی چهارم است</p> <p>جمع بارم صفحه</p>	

۱	اگر $A^3 = 0$ معکوس ماتریس $I - A$ را تعیین کنید .	۱۴
۱/۵	اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $(2AB)^{-1}$ را بیابید ؟	۱۵
۱/۵	دستگاه $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y + z = -1 \\ 7x - y + z = 4 \end{cases}$ را به روش گاوس یا کرامر حل کنید .	۱۶
۱	در دستگاه $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = y = -z \\ y + mx - 2z = 5 \end{cases}$ مقدار m را طوری بیابید تا دستگاه جواب نداشته باشد	۱۷
۲۰	جمع نمرات	

موفق و پیروز باشید

ردیف	سوال	بارم
۱	بردارهای $a = (1, -1, 6)$ و $b = (6, 4, 0)$ و $c = (2, 1, -1)$ مفروضند الف: قرینه بردار a را نسبت به امتداد بردار $b - 2c$ پیدا کنید ب: حجم متوازی السطوح تولید شده توسط بردار a ، b و c را محاسبه کنید	۱/۵
۲	اگر $ \vec{a} = 2$ ، $ \vec{b} = 3$ و $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 4$ مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بدست آورید.	۰/۵
۳	فاصله دو خط موازی $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$ و $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ زیر را پیدا کنید.	۱/۵
۴	مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 + 8x + 8y = 0$ را تعیین نموده و آن را رسم کنید.	۱/۵
۵	معادله دایره ای را بنویسید که مرکزش $O(2, 3)$ و بر خط $3x + 4y = 8$ مماس باشد؟	۰/۵
۵/۵	توجه: ادامه ی سوالات در صفحه ی دوم است	جمع بارم صفحه

الف) $u = b - 2c = (2, 2, 2)$ را محاسبه کنید
 $a' = \left(\frac{a \cdot u}{|u|^2} \right) u = \frac{2-2+12}{12} (2, 2, 2) = (2, 2, 2)$ ، $a'' = 2a' - a = (3, 5, -2)$
 ب) $a \times b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 36, 10)$ $v = |c \cdot (a \times b)| = 22$

اگر $|\vec{a}| = 2$ ، $|\vec{b}| = 3$ و $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 4$ مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بدست آورید.
 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 4 \Rightarrow a \cdot a - a \cdot b + 2b \cdot a - 2b \cdot b = 4$
 $\Rightarrow 4 + a \cdot b - 6 = 4 \Rightarrow a \cdot b = 6$

فاصله دو خط موازی $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$ و $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ زیر را پیدا کنید.
 $\begin{cases} A(1, -1, 2) \\ u(2, -1, -2) \end{cases} \quad \begin{cases} B(0, 2, 3) \\ u'(2, -1, -2) \end{cases} \quad \vec{AB} = (-1, 3, 1)$
 $\vec{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, -5, -5) \rightarrow h = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 + 8x + 8y = 0$ را تعیین نموده و آن را رسم کنید.
 $F'_u = 2u + 8 = 0 \rightarrow u = -4 = x \rightarrow 16 - 32 + 8y = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow S(-4, 2)$
 $\left[a = -\frac{1}{4} \rightarrow a = -2 \right] \quad F(-4, 0)$

معادله دایره ای را بنویسید که مرکزش $O(2, 3)$ و بر خط $3x + 4y = 8$ مماس باشد؟

 $R = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 8|}{5} = 2$
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

۱	<p>معادله بیضی را بنویسید که کانون های آن $F(2 \pm \sqrt{5}, 3)$ و نقطه $A(7, 3)$ رأس کانونی آن باشد</p> <p>$\theta = \frac{F_2 - F_1}{r} = (2, 3) \quad c = \sqrt{5}, \quad a = 5 \rightarrow b^2 = 25 - 5 = 20$</p> $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{20} = 1$	۶
۱	<p>معادلات مجانب های هذلولی به صورت $y = kx - 4$ و $y = (2k - 6)x + 8$ می باشد.</p> <p>الف: مقدار k را بدست آورید.</p> <p>ب: مرکز هذلولی را بدست آورید</p> <p>$m + m' = 0 \rightarrow k + 2k - 6 = 0 \rightarrow k = 2$</p> <p>$k = 2 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$</p> <p>$2y = 4 \rightarrow y = 2 \rightarrow 2 = 2x - 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow \theta(2, 2)$</p>	۷
۱/۵	<p>با انتخاب زاویه ای مناسب و با استفاده از دوران محورهای مختصات نوع مقطع مخروطی به معادله ی $xy + 9\sqrt{2} + 1 = 0$ را مشخص کنید؟ $\theta = 45^\circ \rightarrow 2a = 9 \rightarrow a = 4.5$</p> <p>$\tan \theta = \frac{b}{a-e} = \frac{1}{0}$</p> <p>$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') + 9\sqrt{2} + 1 = 0$</p> <p>$\frac{x'}{2} - \frac{y'}{2} + 9\sqrt{2} + 1 = 0$</p>	۸
۱	<p>اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^5 را بدست آورید</p> <p>$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$</p> <p>$A^3 = A^2 A = 3A \times A = 3 \times 3A = 9A$</p> <p>$A^5 = A^2 \times A^3 = 3A \times 9A = 27 \times 3A = 81A$</p>	۹
۱	<p>اگر $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را بدست آورید؟</p> <p>$\begin{cases} -3 + a = 1 \rightarrow a = 4 \\ 3 + 2b + a = 1 \rightarrow b = -3 \end{cases}$</p>	۱۰
۵/۵	<p>توجه: ادامه ی سوالات در صفحه ی سوم است</p> <p>جمع بارم صفحه</p>	

۱/۵

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید؟

$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 \\ 7 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱

۱

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ باشند آنگاه ماتریس $(AB)^t$ را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 70^\circ & -\sin 70^\circ \\ \sin 70^\circ & \cos 70^\circ \end{bmatrix} = R^{70^\circ}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = R^{-45^\circ}$$

$$(AB)^t = (R^{70^\circ} R^{-45^\circ})^t = (R^{25^\circ})^t = (R^{10^\circ})^t = R^{10^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 10^\circ & -\sin 10^\circ \\ \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix}$$

۱۲

۱/۵

به کمک خواص دترمینان ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

$$\xrightarrow{C_1 + C_2 + C_3 \rightarrow C_1} \begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 1+x+y+z & 1+y & z \\ 1+x+y+z & y & 1+z \end{vmatrix}$$

$$= (1+x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & 1+y & z \\ 1 & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3}} (1+x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x+y+z)$$

۴ جمع بارم صفحه

توجه: ادامه ی سوالات در صفحه ی چهارم است

۱	<p>اگر $A^2 = 0$ معکوس ماتریس $I - A$ را تعیین کنید.</p> $A^2 = 0 \rightarrow I - A^2 = I \rightarrow (I - A)(I + A + A^2) = I$ $\Rightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2$	۱۴
۱/۵	<p>اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $(2AB)^{-1}$ را بیابید؟</p> $(2AB)^{-1} = \frac{1}{2} B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	۱۵
۱/۵	<p>دستگاه $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y + z = -1 \\ 7x - y + z = 4 \end{cases}$ را به روش گاوس یا کرامر حل کنید.</p> $\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \end{cases}$	۱۶
۱	<p>در دستگاه $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = y = -z \\ y + mx - 2z = 5 \end{cases}$ مقدار m را طوری بیابید تا دستگاه جواب نداشته باشد</p> $\frac{x-1}{2} = y = -z \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2y \\ x-1 = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y+1 \\ x = -2z+1 \end{cases}$ $y + m(2y+1) - 2(-2z) = 5 \Rightarrow y + m(2y+1) - 2(-2z) = 5$ $(2m+3)y + m - 2z = 5$	۱۷
۲۰	<p>جمع نمرات</p> <p>موفق و پیروز باشید</p> $m = -\frac{3}{2}$	