(درس ۲)

حل معادله‌ی درجه ۲ و کاربردها

برای پیداکردن جواب‌های یک معادله‌ی درجه‌دوم، روش‌های مختلفی وجود دارد. ما در این‌جا سه روش زیر را به طور کامل بررسی می‌کنیم:

۱) حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش تجزیه

۲) حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش مربع کامل‌سازی

۳) حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش کلی (Δ)

۱) حل معادله‌ی درجه دوم به روش تجزیه

یک خاصیت مهم در اعداد داریم به اسم «خاصیت عامل صفر» که می‌گوید: اگر حاصل‌ضرب دو عدد (یا چند عدد) صفر شود، حداقل یکی از آن‌ها صفر است؛ یعنی اگر $ab=0$ باشد، آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$.

یکی از روش‌های حل معادله‌ی درجه‌دوم، روش تجزیه است. در این روش این‌گونه عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی ۱ معادله را به شکل $ax^2+bx+c=0$ در می‌آوریم (یعنی تمام جملات را به سمت چپ می‌بریم).

مرحله‌ی ۲ عبارت سمت چپ را تجزیه می‌کنیم (تجزیه‌ی یک عبارت درجه‌دوم به صورت ضرب دو عبارت درجه یک است).

مرحله‌ی ۳ طبق «خاصیت عامل صفر» حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. با مساوی قرار دادن هر کدام از عبارت‌های مرحله‌ی (۲) با صفر، جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

برای این‌که عبارت‌های درجه‌دوم را راحت‌تر تجزیه کنیم، باید فصل ۱ را خوب بلد باشیم. ما در فصل ۱، به صورت کامل تجزیه‌ی عبارت‌های درجه‌دوم را بررسی کرده‌ایم.

روش‌های تجزیه‌ای که برای حل معادله‌های درجه‌دوم[1] در این فصل مورد استفاده قرار می‌دهیم، عبارت‌اند از:

(الف) فاکتورگیری — (ب) تجزیه با کمک اتحاد مربع

(ج) تجزیه با کمک اتحاد مزدوج — (د) تجزیه با کمک اتحاد جمله‌مشترک

مثال معادله‌های زیر را به روش فاکتورگیری حل کنید.

(الف) $2x^2-8x=0$ — (ب) $(x+5)^2-3(x+5)=0$

پاسخ (الف) بین دو عبارت $2x^2$ و $8x$ از $2x$ فاکتور می‌گیریم:

$$2x^2-8x=0 \Rightarrow 2x(x-4)=0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

(ب) بین دو عبارت $(x+5)^2$ و $3(x+5)$ از $x+5$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x+5)^2-3(x+5)=0 \Rightarrow (x+5)(\underbrace{(x+5)-3}_{x+5-3})=0 \Rightarrow (x+5)(x+2)=0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

معادله‌های درجه‌دوم به فرم $ax^2+bx=0$ (یعنی $c=0$ است) را با روش فاکتورگیری حل می‌کنیم. (مثل قسمت (الف) مثال بالا)

مثال معادله‌های زیر را به روش تجزیه با کمک اتحاد مربع حل کنید.

(الف) $x^2-6x+9=0$ — (ب) $4x^2+4x+1=0$

پاسخ (الف) عبارت x^2-6x+9، بازشده‌ی $(x-3)^2$ است، پس:

$$x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

(ب) عبارت $4x^2+4x+1$، بازشده‌ی $(2x+1)^2$ است، پس:

$$4x^2+4x+1=0 \Rightarrow (2x+1)^2=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

۱- در این کتاب حل معادله‌های ساده با مراتب بالاتر از دو را هم، با همین روش‌ها بررسی خواهیم کرد.

اگر یک معادلهٔ درجه‌دوم را با کمک اتحاد مربع تجزیه کنیم، در نهایت معادله دارای یک جواب است که آن را «جواب مضاعف» یا «ریشهٔ مضاعف» معادله می‌نامیم.

معادلهٔ درجه‌دومی که ریشهٔ مضاعف دارد به شکل $(x-\alpha)^2 = 0$ درمی‌آید (یعنی یک سمت تساوی به صورت اتحاد مربع و سمت دیگر آن صفر است.)

مثال معادله‌های زیر را به روش تجزیه با کمک اتحاد مزدوج حل کنید.

(الف) $x^2 - 25 = 0$ (ب) $4x^2 - 9 = 0$ (پ) $x^4 - 16 = 0$

پاسخ (الف)

$$\underbrace{x^2 - 25}_{\text{تجزیه با کمک اتحاد مزدوج}} = 0 \Rightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+5) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

(ب)

$$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \underbrace{(2x)^2 - 3^2}_{\text{تجزیه با کمک اتحاد مزدوج}} = 0 \Rightarrow (2x-3)(2x+3) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

(پ)

$$x^4 - 16 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2)^2 - 4^2}_{\text{تجزیه با کمک اتحاد مزدوج}} = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2-4)}_{\text{تجزیه با کمک اتحاد مزدوج}}(x^2+4) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

معادله‌هایی به شکل «عدد منفی = x^2» جواب حقیقی ندارند، مثلاً معادلهٔ $x^2 = -1$ جواب حقیقی ندارد.

مثال معادله‌های زیر را به روش تجزیه با کمک اتحاد جمله‌مشترک حل کنید.

(الف) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (ب) $x^2 + 3x - 40 = 0$ (پ) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

(ت) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (ث) $2x^2 - 8x - 10 = 0$ (ج) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

پاسخ سمت چپ تمام معادله‌های بالا را در فصل ۱ (قسمت اتحاد جمله‌مشترک) تجزیه کرده‌ایم، پس جای سمت چپ تساوی، عبارت تجزیه‌شدهٔ آن را می‌نویسیم و سپس از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

(الف)

$$x^2 \underbrace{+5}_{\text{جمع}} x \underbrace{+6}_{\text{ضرب}} = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

(ب)

$$x^2 \underbrace{+3}_{\text{جمع}} x \underbrace{-40}_{\text{ضرب}} = 0 \Rightarrow (x+8)(x-5) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x+8=0 \Rightarrow x=-8 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

(پ)

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow (2x)^2 \underbrace{-4}_{\text{جمع}} (2x) \underbrace{+3}_{\text{ضرب}} = 0 \Rightarrow (2x-1)(2x-3) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

(ت)

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۳}} (3x)^2 \underbrace{-7}_{\text{جمع}} (3x) \underbrace{+6}_{\text{ضرب}} = 0 \Rightarrow (3x-1)(3x-6) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ 3x-6=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

(ث)

$$2x^2 - 8x - 10 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} x^2 \underbrace{-4}_{\text{جمع}} x \underbrace{-5}_{\text{ضرب}} = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

(ج)

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 \underbrace{-10}_{\text{جمع}} x^2 \underbrace{+9}_{\text{ضرب}} = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2-9)}_{\text{اتحاد مزدوج}}\underbrace{(x^2-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+3)(x-1)(x+1) = 0 \xrightarrow{\text{خاصیت عامل صفر}} \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

برای دیدن روند کامل تجزیه‌ی عبارت‌های این مثال به درس‌نامه‌ی فصل ۱ (اتحاد جمله‌مشترک) مراجعه کنید.

در آخر هم با چند نصیحت! بحث را تمام می‌کنیم:

- اگر معادله به شکل $ax^2 + bx = 0$ (یعنی $c = 0$) بود، معادله را با فاکتورگیری از x حل می‌کنیم.
- اگر معادله به شکل $ax^2 - c = 0$ بود (یعنی ضریب x صفر باشد)، معادله را به کمک اتحاد مزدوج حل می‌کنیم.
- اگر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ بود و هیچ‌کدام از ضرایب صفر نبودند، معادله را باید با کمک اتحاد مربع یا جمله‌مشترک تجزیه کنیم.

اگر α و β ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌دوم باشند، می‌توان گفت آن معادله به صورت $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ است. به عنوان مثال $x = 2$ و $x = 5$ ریشه‌های معادله‌ی $(x-2)(x-5) = 0$ هستند که آن را می‌توان به صورت $x^2 - 7x + 10 = 0$ نیز نوشت.

مثال معادله‌ی درجه‌دومی بنویسید که $x = -1$ و $x = 3$ ریشه‌های آن باشند.

پاسخ $(x-(-1))(x-3) = 0 \Rightarrow \underbrace{(x+1)(x-3)}_{\text{اتحاد جمله‌مشترک}} = 0 \Rightarrow x^2 + (1+(-3))x + (1\times(-3)) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

حل یک معادله‌ی خاص!

می‌دانیم اگر توان عبارتی زوج باشد، حاصل آن عبارت حتماً نامنفی (مثبت یا صفر) است. حالا اگر چند عبارت نامنفی با هم جمع شوند و حاصل برابر صفر شود، چه نتیجه‌ای می‌توانیم بگیریم؟ فقط و فقط می‌توانیم نتیجه بگیریم که تک‌تک آن عبارت‌های نامنفی برابر صفر هستند، چون حتی اگر یکی از آن‌ها هم عددی مثبت باشد، آن‌وقت برای این‌که جمعشان صفر شود، باید یکی از آن‌ها منفی شود (که قراره نشه! چون نامنفی‌ان).

مثال اگر $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$ باشد، مقدار x و y را به دست آورید.

پاسخ خُب توان‌های دو عبارت $(x-2)^2$ و $(y+3)^2$ زوج است، پس هر دو نامنفی هستند و چون جمعشان صفر شده، پس هر دو برابر با صفر هستند:

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ y+3=0 \Rightarrow y=-3 \end{cases}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۸- جواب‌های معادله‌ی $3x = 9x^2$ کدام است؟

۱) ۰ و ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ و ۳ ۳) ۰ و $\frac{1}{3}$ ۴) ۳ و $\frac{1}{9}$

۱۹- جواب‌های معادله‌ی $x(x+3) - 4(x+3) = 0$ کدام است؟

۱) ۳ و ۴ ۲) -3 و ۴ ۳) ۳ و -4 ۴) -3 و -4

۲۰- برای حل معادله‌ی درجه‌دوم $(x-1)(x+1) = x - 1$ به روش تجزیه، آن را به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت درجه‌یک مساوی صفر درآورده‌ایم. یکی از این دو عبارت درجه‌یک کدام می‌تواند باشد؟

۱) x ۲) $x+1$ ۳) $x-2$ ۴) $x+2$

۲۱- اگر تجزیه‌شده‌ی عبارت $ax^2 + bx + c$ به صورت $(x+5)(2x-1)$ باشد، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{9}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۲۲- اعداد $\frac{1}{2}$ و -2 ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های زیر هستند؟

۱) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ۲) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ۳) $2x^2 + 5x - 2 = 0$ ۴) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

۲۳- جواب معادله‌ی $x^2 + 36 = 12x$ کدام است؟

۱) -12 ۲) ۱۲ ۳) -6 ۴) ۶

۲۴- کدام‌یک از معادله‌های زیر ریشه‌ی مضاعف $x=\frac{1}{2}$ دارد؟

۱) $4x^2-4x+1=0$ ۲) $4x^2+4x+1=0$ ۳) $2x^2-4x+1=0$ ۴) $2x^2+4x+1=0$

۲۵- اگر معادله‌ی $4x^2-12x=k$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -9 ۲) 9 ۳) -3 ۴) 3

۲۶- اگر $(a+2b)^2+a^2=6a-9$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{-9}{2}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $-\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۲۷- اگر $a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$ باشد، مقدار a کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸- جواب‌های معادله‌ی $12x^2-24=0$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) ± 2 ۳) $\pm 2\sqrt{2}$ ۴) ± 4

۲۹- ریشه‌ی کدام‌یک از معادله‌های زیر $\pm\frac{2}{5}$ است؟

۱) $4x^2+25=0$ ۲) $25x^2+4=0$ ۳) $25x^2-4=0$ ۴) $4x^2-25=0$

۳۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی $(x-5)^2=(3x+1)^2$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 4 ۴) -4

۳۱- ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های زیر، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-25=0$ بیشتر است؟

۱) $x^2-16=0$ ۲) $x^2+2x-24=0$ ۳) $x^2-2x-24=0$ ۴) $x^2-36=0$

۳۲- جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x-10=0$ کدام است؟

۱) ۲ و -5 ۲) ۲ و ۵ ۳) -2 و ۵ ۴) -2 و -5

۳۳- جواب کوچک‌تر معادله‌ی $25x^2-10x=24$ کدام است؟

۱) $-\frac{6}{5}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{6}{5}$

۳۴- حاصل‌ضرب عددی در سه واحد بیشتر از قرینه‌اش برابر ۲۸- شده است. این عدد کدام می‌تواند باشد؟

۱) 4 ۲) -7 ۳) -4 ۴) -1

۳۵- مجموع دو جواب بزرگ‌تر معادله‌ی $x^4-13x^2+36=0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۳

۲) حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل سازی

یه خاصیت مهم در اعداد داریم به اسم «خاصیت ریشه‌ی زوج» که می‌گوید:

اگر $x^2=a$ و $a\ge 0$ باشد، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{a}$. به طور مثال اگر $x^2=24$ (چون امروز ۲۴ فروردین ۹۵ است!) باشد، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{24}$.

مثال معادله‌های زیر را با استفاده از خاصیت ریشه‌ی زوج حل کنید.

(الف) $x^2-9=0$ (ب) $(x+1)^2=5$ (پ) $(x+3)^2=(2x-9)^2$

پاسخ

(الف) $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

(ب) $(x+1)^2=5 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+1=\pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x+1=\sqrt{5} \Rightarrow x=\sqrt{5}-1 \\ x+1=-\sqrt{5} \Rightarrow x=-\sqrt{5}-1 \end{cases}$

(پ) $(x+3)^2=(2x-9)^2 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+3=\pm(2x-9) \Rightarrow \begin{cases} x+3=2x-9 \Rightarrow x-2x=-9-3 \Rightarrow x=12 \\ x+3=-2x+9 \Rightarrow x+2x=9-3 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

حالا که خاصیت ریشه‌ی زوج را فهمیدیم می‌رویم سراغ حل معادله‌ی درجه‌دوم به روش مربع کامل‌سازی.

در زیر مراحل حل یک معادله‌ی درجه‌دوم به روش مربع کامل‌سازی را بیان می‌کنیم. تمام مراحل را هم روی معادله‌ی $۳x^۲-۱۲x-۱۵=۰$ انجام می‌دهیم.

۱) جملات شامل متغیر (x) را به سمت چپ تساوی و عدد ثابت را به سمت راست تساوی می‌بریم:
$۳x^۲-۱۲x=۱۵$

۲) تمام جملات را به ضریب $x^۲$ تقسیم می‌کنیم (اگر ضریب $x^۲$، یک بود، می‌رویم مرحله‌ی بعد):

$$۳x^۲-۱۲x=۱۵ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} x^۲-۴x=۵$$

۳) نصف ضریب x را به توان دو می‌رسانیم و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$\text{نصف ضریب } x=-\frac{۴}{۲}=-۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (-۲)^۲=۴$$

$$\xrightarrow[\text{۴+ اضافه می‌کنیم}]{\text{به دوطرف}} x^۲-۴x+۴=۵+۴ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۹$$

۴) سمت چپ را به صورت یک اتحاد مربع می‌نویسیم:
$(x-۲)^۲=۹$

۵) از خاصیت ریشه‌ی زوج استفاده می‌کنیم:
$x-۲=\pm\sqrt{۹} \Rightarrow x-۲=\pm۳$

۶) دو معادله‌ی به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-۲=۳ \Rightarrow x=۵ \\ x-۲=-۳ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

مثال معادله‌ی $۲x^۲-۶x-۲۰=۰$ را به روش مربع کامل‌سازی حل کنید.

پاسخ اول -۲۰ را به سمت راست تساوی می‌بریم:
$۲x^۲-۶x-۲۰=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۶x=۲۰$

حالا طرفین تساوی را به ۲ تقسیم می‌کنیم:
$۲x^۲-۶x=۲۰ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^۲-۳x=۱۰$

مربع نصف ضریب x را حساب می‌کنیم:
$\text{نصف ضریب } x=\frac{-۳}{۲} \xrightarrow{\text{مربع}} (\frac{-۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$

$\frac{۹}{۴}$ را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:
$x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=۱۰+\frac{۹}{۴}$

سمت چپ اتحاد مربع است و سمت راست را هم با مخرج مشترک‌گیری ساده می‌کنیم:
$(x-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۴۹}{۴}$

از خاصیت ریشه‌ی زوج استفاده می‌کنیم:
$x-\frac{۳}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۴۹}{۴}} \Rightarrow x-\frac{۳}{۲}=\pm\frac{۷}{۲}$

هر دو معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-\frac{۳}{۲}=\frac{۷}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۲}=۵ \\ x-\frac{۳}{۲}=\frac{-۷}{۲} \Rightarrow x=\frac{-۴}{۲}=-۲ \end{cases}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۶- برای حل معادله‌ی درجه‌دوم $۲x^۲+۳x-۵=۰$ به روش مربع کامل کردن، پس از تبدیل ضریب $x^۲$ به یک، کدام عدد را باید به دو طرف معادله اضافه کنیم؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۳۷- در حل معادله‌ی $۲x^۲-۶x-۱=۰$ به روش مربع کامل‌سازی، (بعد از تبدیل ضریب $x^۲$ به عدد یک) از چه عددی جذر گرفته می‌شود؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۵}{۴}$

۳۸- قطر مربعی $۴\sqrt{۳}$ است. محیط آن کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۸\sqrt{۶}$

۳۹- اگر بتوانیم معادله‌ی درجه‌دوم $x^۲-۲bx-۱۶=۰$ را به شکل $(x-b)^۲=۲۵$ تبدیل کنیم، مقدار $b^۲$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۱

۴۰- کدام معادله جواب حقیقی ندارد؟

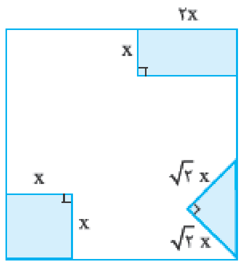
۱) $۲-x^۲=۰$ ۲) $x^۲-\sqrt{۲}=۰$ ۳) $۱-۲x^۲=۰$ ۴) $x^۲+۲=۰$

۴۱- تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $(۵x-۴)^۲-۸=۱$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۶

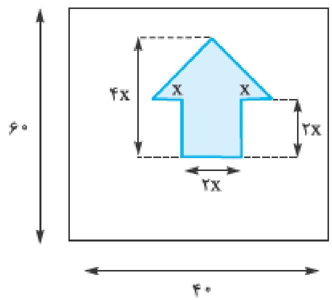
۴۲- ریشه‌ی کوچک‌تر معادله‌ی $(۳x-۱)^۲=(۴-x)^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{-۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۳}{۲}$



۴۳- از مربعی به ضلع ۶ cm سه شکل زیر بریده شده است. مساحت باقی‌مانده $۲۴\ cm^۲$ است. طول ضلع کوچک بریده‌شده چه‌قدر است؟ (کتاب درسی)

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۳
۳) ۲
۴) $\sqrt{۲}$



۴۴- برای ساخت تابلوی روبه‌رو، هزینه‌ی هر $۱\ cm^۲$ برچسب آبی ۳۰ تومان و هزینه‌ی هر $۱\ cm^۲$ برچسب سفید ۱۰ تومان است. اگر مجموع هزینه‌های برچسب‌های سفید و آبی برابر با ۶۰۰۰۰ تومان شده باشد، x چه‌قدر است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

۳) حل معادله‌ی درجه دوم به روش کلی

برای آن‌که از شر روش مربع کامل‌سازی خلاص شویم و هر دفعه، مراحل ۶ گانه‌ی بالا را انجام ندهیم یک بار حالت کلی معادله‌ی درجه‌دوم یعنی $ax^۲+bx+c=۰$ را به روش مربع کامل‌سازی حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده از این روش عبارت‌اند از:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}}$$

عبارت $b^۲-۴ac$ را «مُبَیِّن» معادله‌ی درجه‌دوم می‌نامیم و آن را با نماد Δ (دلتا) نشان می‌دهیم. پس جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} \quad , \quad (\Delta=b^۲-۴ac)$$

بی‌دردسرترین روش حل معادله‌ی درجه‌دوم همین روش است. فقط کافی است این رابطه‌ها را حفظ باشیم. اصلاً هم نیاز به سوزاندن فسفر ندارد!

در زیر، مراحل حل یک معادله‌ی درجه‌دوم به روش کلی را بیان می‌کنیم. تمام مراحل را روی معادله‌ی $۳x^۲-۷x=-۲$ انجام می‌دهیم:

۱) باید تمام جملات در یک سمت تساوی قرار بگیرند و در سمت دیگر تساوی صفر باشد: $۳x^۲-۷x+۲=۰$

۲) a و b و c را تعیین می‌کنیم: $a=۳\ ,\ b=-۷\ ,\ c=۲$

۳) Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=b^۲-۴ac=(-۷)^۲-۴(۳)(۲)=۴۹-۲۴=۲۵$

۴) x را از فرمول گفته‌شده به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۷)\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۳)}=\frac{۷\pm۵}{۶}\Rightarrow\begin{cases} x_۱=\dfrac{۷+۵}{۶}=\dfrac{۱۲}{۶}=۲ \\ x_۲=\dfrac{۷-۵}{۶}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

مثال معادله‌های زیر را به روش کلی حل کنید.

(الف) $5x^2-7x+2=0$ (ب) $x^2-2x-2=0$

پاسخ (الف) ضرایب را تعیین می‌کنیم: $a=5\ ,\ b=-7\ ,\ c=2$

Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4(5)(2)=49-40=9$

x را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2(5)}=\frac{7\pm 3}{10}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{7+3}{10}=\frac{10}{10}=1\\ x_2=\frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\end{cases}$$

(ب) ضرایب را تعیین می‌کنیم: $a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-2$

Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-2)=4+8=12$

x را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2(1)}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{3})}{\cancel{2}}=1\pm\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1-\sqrt{3}\\ x_2=1+\sqrt{3}\end{cases}$$

مثال اگر $x=1$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x^2+kx+5=0$ باشد، k و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

پاسخ جواب‌های معادله در معادله صدق می‌کنند، پس $x=1$ در $2x^2+kx+5=0$ صدق می‌کند:

$$2x^2+kx+5=0\xrightarrow{x=1\ \text{جای‌گذاری}}2(1)^2+k(1)+5=0\Rightarrow 2+k+5=0\Rightarrow k+7=0\Rightarrow k=-7$$

حالا که $k=-7$ شد، معادله‌ی $2x^2-7x+5=0$ را با روش کلی حل می‌کنیم:

$a=2\ ,\ b=-7\ ,\ c=5$ $\qquad \Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4(2)(5)=49-40=9$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{7\pm3}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{7+3}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\\ x_2=\frac{7-3}{4}=\frac{4}{4}=1\end{cases}$$

جواب دیگر معادله $x=\frac{5}{2}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۵- جواب کوچک‌تر معادله‌ی $2x^2-5x-3=0$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -3 ۴) 3

۴۶- یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم $x(x-2)=2$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{12}$ ۲) $1+\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $1-\sqrt{12}$

۴۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم $6x^2+5x-1=0$ باشند، حاصل $x_1^2+x_2^2$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{36}$ ۲) $\frac{23}{36}$ ۳) $\frac{37}{36}$ ۴) $\frac{43}{36}$

۴۸- مجموع جواب‌های معادله‌ی $x^2-2kx+15=0$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $-2k$ ۳) $2\sqrt{k^2-15}$ ۴) $-2\sqrt{k^2-15}$

۴۹- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم $mx^2-3x+4=0$ برابر ۲ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟ (سنجش ۸۹)

۱) -4 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 4

۴) دو معادله‌ی درجه دوم پرکاربرد

در معادله‌ی درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ دو حالت خاص وجود دارد که زیاد مورد سؤال قرار می‌گیرند. این دو حالت را با هم بررسی می‌کنیم:

① $a+b+c=0$ (جمع ضرایب صفر باشد)؛ در این حالت ریشه‌های معادله ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند.

مثلاً در معادله‌ی $2x^2-7x+5=0$ که $a=2$، $b=-7$ و $c=5$ است، چون $a+b+c=0$ است، پس ریشه‌های معادله عبارت‌اند از: $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$

② $a-b+c=0$ (یا $a+c=b$ باشد)؛ در این حالت ریشه‌های معادله -1 و $-\frac{c}{a}$ هستند.

مثلاً در معادله‌ی $3x^2-5x-8=0$ که $a=3$، $b=-5$ و $c=-8$ است، چون $a-b+c=0$ است، پس ریشه‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{-c}{a}=\frac{-(-8)}{3}=\frac{8}{3}$$

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $7x^2-9x+2=0$ (ب) $5x^2+11x+6=0$

پاسخ (الف) در این معادله $a=7$، $b=-9$ و $c=2$ است، پس در شرط $a+b+c=0$ صدق می‌کند و ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{7}$$

(ب) در این معادله $a=5$، $b=11$ و $c=6$ است، پس در شرط $a-b+c=0$ صدق می‌کند و ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$x_1=-1\ ,\ x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{6}{5}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۰- جواب کوچک‌تر معادله‌ی $17x^2-20x+3=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{3}{17}$ ۴) $-\frac{3}{17}$

۵۱- در معادله‌ی $x(11x+10)=1$ نصف ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{22}$ ۴) $-\frac{1}{22}$

۵۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+kx-7=0$ برابر با $\frac{7}{3}$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $-\frac{3}{7}$

۵۳- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(m+3)x^2-(2m+1)x=2-m$ کدام است؟ $(m\neq -3)$

۱) $\frac{m+3}{m-2}$ ۲) $\frac{2-m}{m+3}$ ۳) -1 ۴) ۱

۵) حل معادله‌ی درجه دوم به روش تغییر متغیر

در برخی از معادلات با جای‌گذاری t به جای عبارتی برحسب x، می‌توان معادله را به شکل یک معادله‌ی درجه‌دوم ساده‌تر نوشت. سپس معادله‌ی برحسب t را حل می‌کنیم، مقادیر t را به دست می‌آوریم. در نهایت باید عبارتی که به جای آن t را قرار داده‌ایم، مساوی با جواب‌های t قرار دهیم و x را به دست آوریم.

مثال معادله‌ی $2(3x-1)^2-3(3x-1)-2=0$ را حل کنید.

پاسخ $3x-1$ را t می‌گیریم: $3x-1=t$

پس معادله به شکل روبه‌رو درمی‌آید: $2t^2-3t-2=0$

با روش کلی این معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(-2)=9+16=25$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2(2)}=\frac{3\pm5}{4}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\frac{3+5}{4}=2\\ t_2=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

حالا که t به دست آمد، جواب‌های آن را در $3x-1=t$ جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$3x-1=t\xrightarrow{t_1=2}3x-1=2\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1\ ,\ 3x-1=t\xrightarrow{t_2=-\frac{1}{2}}3x-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow 3x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{1}}=\frac{1}{6}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $۴(۲x-۱)^۲ - ۵(۲x-۱) + ۱ = ۰$ کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۸}$

۵۵- در معادله‌ی درجه‌دوم $(x-۱)^۲ + ۲\sqrt{۳}(x-۱) = ۶$، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) $۴-\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۵۶- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^۴ + ۱۰x^۲ + ۹ = ۰$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۷- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x^۲+x)^۲ - ۱۸(x^۲+x) + ۷۲ = ۰$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۶) ترکیب تمام روش‌های گفته شده!

در حل سؤال‌های این قسمت، انتخاب روش حل معادله‌ی درجه‌دوم با خودتان است. البته باید حواسمان هم باشد که سرعت حل روش‌ها در مثال‌های مختلف با هم متفاوت هستند. ما پیشنهادهای زیر را برای شما داریم!

۱) اول از هر چیز حواسمان به دو نوع پرکاربرد معادله‌ی درجه‌دوم باشد: یکی حالتی که $a+b+c=۰$ است که در این حالت جواب‌های معادله ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند و دومی حالتی که $a-b+c=۰$ است که در این حالت هم جواب‌های معادله -۱ و $-\frac{c}{a}$ هستند.

۲) اگر معادله با یک نگاه، با تجزیه حل می‌شود، بهترین راه تجزیه است. اگر هم تجزیه برایتان سخت است، می‌رویم سراغ روش‌های دیگر!

۳) اگر یک معادله به شکل $\bigcirc^۲ = \square^۲$ بود، آن را با خاصیت ریشه‌ی زوج حل می‌کنیم. مثلاً معادله‌ی $(x+۴)^۲ = ۹$ را این‌گونه حل می‌کنیم:

$$(x+۴)^۲ = ۹ \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x+۴ = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} x+۴=۳ \Rightarrow x=-۱ \\ x+۴=-۳ \Rightarrow x=-۷ \end{cases}$$

۴) اگر از تجزیه و مربع کامل قطع امید کردید، روش حل کلی معادله‌ی درجه‌دوم هیچ وقت شما را تنها نمی‌گذارد! Δ را محاسبه می‌کنیم و بعد از رابطه‌ی $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۸- جواب کوچک‌تر معادله‌ی $x^۲ - ۲x - ۴۸ = ۰$ در کدام محدوده است؟

۱) $۷ < x < ۹$ ۲) $-۹ < x < -۷$ ۳) $-۸ < x < -۶$ ۴) $-۷ < x < -۵$

۵۹- جواب‌های معادله‌ی $x^۲ - x - ۱ = ۰$ متعلق به چه مجموعه‌ای هستند؟

۱) اعداد صحیح منفی ۲) اعداد گویا ۳) اعداد گنگ ۴) اعداد طبیعی

۶۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی $(x+۲)^۲ = ۵$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) -۵

۶۱- جواب کوچک‌تر معادله‌ی $۱۳x^۲ - ۵x = ۲(x+۳)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۶}{۱۳}$ ۴) $\frac{۶}{۱۳}$

۶۲- حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $x(۳x-۵) = (۲x+۴)(۳x-۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۹}$ ۲) $\frac{-۲۰}{۹}$ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $\frac{-۲۰}{۳}$

۶۳- اگر $x=۱$ یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم $۵x^۲ - ۳x + k = ۰$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ (سراسری ۸۳ و سنجش ۸۸)

۱) $-۰/۴$ ۲) $-۰/۳$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴$

۶۴- یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم $۳x^۲ + mx = m - ۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. ریشه‌ی دیگر کدام است؟ (سنجش ۸۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۲}{۳}$ ۳) $\frac{-۴}{۳}$ ۴) $\frac{-۵}{۳}$

۶۵- یکی از جواب‌های معادله‌ی $۵x(x-۱)=۲(x+۶)$ کدام است؟

۱) ۲/۴ ۲) ۲/۴- ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۲-

۶۶- جواب بزرگ‌تر معادله‌ی $x^۲-(\sqrt{۲}+۱)x+\sqrt{۲}=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}+۱$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۶۷- تعداد جواب‌های معادله‌ی $۲x^۴-۷x^۲-۹=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷) تعیین تعداد جواب‌های معادله‌ی درجه دوم

همان‌طور که قبل از این گفتیم، جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به صورت $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند. چون قرار است Δ زیر رادیکال برود، پس کمی محدودیت دارد.

Δ می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد، پس Δ سه حالت دارد:

۱) اگر $\Delta>۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز (غیریکسان) است: $x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$, $x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲) اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف (دو جواب یکسان) است: $x=\frac{-b\pm\sqrt{۰}}{۲a} \Rightarrow \boxed{x_{\text{مضاعف}}=\frac{-b}{۲a}}$

۳) اگر $\Delta<۰$ باشد، از آن‌جایی که اعداد منفی نمی‌توانند زیر رادیکال بروند، معادله در این حالت جواب حقیقی ندارد.

نتیجه اگر $\Delta\geq۰$ باشد، معادله‌ی درجه‌دوم جواب دارد.

مثال تعداد جواب‌های معادله‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $۳x^۲+۷x+۵=۰$ (ب) $x(x+۱)=۵$ (پ) $۹x^۲-۳۰x+۲۵=۰$

پاسخ فقط کافی است مقدار Δ را حساب کنیم. اگر $\Delta>۰$ شد، دو جواب متمایز، اگر $\Delta=۰$ شد، یک جواب مضاعف و اگر $\Delta<۰$ شد معادله جواب حقیقی ندارد.

(الف) $a=۳$, $b=۷$, $c=۵$

$\Delta=b^۲-۴ac=۷^۲-۴(۳)(۵)=۴۹-۶۰=-۱۱\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله جواب حقیقی ندارد.

(ب) اول معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم و بعد دلتا می‌گیریم: $x(x+۱)=۵ \Rightarrow x^۲+x=۵ \Rightarrow x^۲+x-۵=۰$

$a=۱$, $b=۱$, $c=-۵$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱^۲-۴(۱)(-۵)=۱+۲۰=۲۱\xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو جواب متمایز دارد.

(پ) $a=۹$, $b=-۳۰$, $c=۲۵$

$\Delta=(-۳۰)^۲-۴(۹)(۲۵)=۹۰۰-۹۰۰=۰\xrightarrow{\Delta=۰}$ معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

در قسمت ریشه‌ی مضاعف برابر با $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۳۰}{۱۸}=\frac{۵}{۳}$ است.

مثال اگر معادله‌ی $x^۲-۱۰x+m=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، مقدار m و مقدار ریشه‌ی مضاعف را به دست آورید.

پاسخ برای این‌که معادله‌ی درجه‌دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد باید $\Delta=۰$ باشد:

$$\Delta=۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=۰ \xrightarrow{a=۱\ ,\ b=-۱۰\ ,\ c=m} (-۱۰)^۲-۴(۱)(m)=۰ \Rightarrow ۱۰۰-۴m=۰ \Rightarrow ۴m=۱۰۰ \Rightarrow m=\frac{۱۰۰}{۴}=۲۵$$

ریشه‌ی مضاعف برابر با $x=-\frac{b}{۲a}$ است، پس: $x_{\text{مضاعف}}=\frac{-(-۱۰)}{۲(۱)}=\frac{۱۰}{۲}=۵$

تمام جملات زیر یک معنی دارند و در این حالت‌ها، دلتای معادله‌ی درجه‌دوم برابر صفر است:

۱) معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

۲) معادله فقط یک جواب دارد.

۳) معادله دارای دو جواب یکسان است.

۴) تفاضل ریشه‌ها صفر است.

مثال به ازای چه محدوده‌ای از m، معادله‌ی $x^۲+۲x=m$ ریشه‌ی حقیقی ندارد؟

پاسخ اول معادله را استاندارد می‌کنیم: $x^۲+۲x-m=۰$

$a=۱\ ,\ b=۲\ ,\ c=-m$

حالا دلتا را حساب می‌کنیم: $\Delta=b^۲-۴ac=۲^۲-۴(۱)(-m)=۴+۴m$

برای آن‌که معادله، ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باید $\Delta<۰$ باشد، پس:

$$\Delta<۰ \Rightarrow ۴+۴m<۰ \Rightarrow ۴m<-۴ \Rightarrow m<\frac{-۴}{۴} \Rightarrow m<-۱$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۸- کدام‌یک از معادله‌های زیر دارای دو جواب است؟

۱) $x^۲+۲x=-۳$ ۲) $x^۲+x=۱$ ۳) $x^۲-x=-۲$ ۴) $x(۲x-۱)=-۳$

۶۹- به ازای چه مقداری از m، معادله‌ی $x^۲-mx+m-۱=۰$ دارای ریشه‌های برابر است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۷۰- به ازای کدام مقدار m، معادله‌ی $(۲x+۱)^۲-(x+m)=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{-۷}{۴}$ ۳) $\frac{-۷}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۷۱- معادله‌ی درجه‌دوم $m^۲x^۲-mx+m-۱=۰$ به ازای کدام مقدار m، فقط دارای یک جواب است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{-۵}{۴}$

۷۲- معادله‌ی درجه‌دوم $x(۲x-۵)=a$ به ازای یک مقدار a ریشه‌ی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۷۳- اگر معادله‌ی $(m+۱)x^۲-۴x+۱=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، مقدار این ریشه‌ی مضاعف چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

۷۴- اگر در معادله‌ی درجه‌دوم $ax^۲-۱۲x+۹=۰$، تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟ (خارج ۸۶)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۷۵- سه‌جمله‌ای درجه‌دوم $۴x^۲+bx+۹$ مربع کامل است. حاصل‌جمع ریشه‌های آن کدام است؟ (سنجش ۹۱)

۱) ±۳ ۲) ±۴ ۳) ±۶ ۴) ±۱۲

۷۶- کدام‌یک از معادلات زیر، به ازای هر مقدار k دارای جواب‌های حقیقی است؟ (کتاب درسی)

۱) $x^۲-x+k=۰$ ۲) $x^۲+kx-۱=۰$ ۳) $kx^۲-x-۱=۰$ ۴) هر سه مورد

۷۷- معادله‌ی $(x-۲)^۲=k$ به ازای چه مجموعه مقادیری از k دارای جواب حقیقی است؟

۱) $k\geq۰$ ۲) $k\leq۰$ ۳) $k=۰$ ۴) $k\neq۰$

۷۸- به ازای چه مجموعه مقادیری از k معادله‌ی $kx^۲-(۲k+۱)x+k+۳=۰$ دارای جواب حقیقی است؟

۱) $k\geq\frac{۱}{۸}$ ۲) $k\leq\frac{۱}{۸}$ ۳) $k\geq-\frac{۱}{۸}$ ۴) $k\leq-\frac{۱}{۸}$

۷۹- اگر معادله‌ی درجه‌دوم $۲ax^۲-۴ax+۲a+۱=۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، حدود a کدام است؟ (سنجش ۹۴)

۱) $a>۰$ ۲) $a>۱$ ۳) $a<۰$ ۴) $a<-۱$

۸۰- به ازای کدام مقدار a معادله‌ی درجه‌دوم $۳x^۲+ax-۳=۰$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟ (خارج ۹۱)

۱) هر مقدار a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=\pm۶$ ۴) فقط $a>۶$

۸) مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

می‌دانیم ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر با $x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند که در آن‌ها دلتا برابر با $\Delta=b^۲-۴ac$ است. حالا می‌خواهیم رابطه‌ای بین $x_۱+x_۲$ و $x_۱x_۲$ با ضرایب معادله یعنی a، b و c پیدا کنیم.

حاصل جمع ریشه‌ها: $x_۱+x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{۲a}=-\frac{۲b}{۲a}=-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب ریشه‌ها: $x_۱x_۲=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a})=\frac{\overbrace{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{۴a^۲}=\frac{(-b)^۲-(\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}$

$=\frac{\cancel{b^۲}-\cancel{b^۲}+۴ac}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$

حاصل‌جمع ریشه‌ها را با حرف S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را با حرف P نشان می‌دهیم، پس:

$\boxed{\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}}$ $\boxed{\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها}: S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}}$

مثال در معادله‌ی $۲x^۲-۴x+۱=۰$، حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها چه‌قدر است؟

پاسخ ضرایب معادله عبارت‌اند از: $a=۲$، $b=-۴$ و $c=۱$. مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را با جای‌گذاری در روابط به دست می‌آوریم:

حاصل جمع ریشه‌ها: $S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۴)}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$

حاصل ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$

مثال اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲+mx+۱۲=۰$ برابر با ۷ باشد، مقدار m و هر دو ریشه را به دست آورید.

پاسخ ضرایب معادله را می‌نویسیم: $a=۲$، $b=m$ و $c=۱۲$. مجموع ریشه‌ها برابر ۷ است، پس:

$$S=-\frac{b}{a}\Rightarrow ۷=\frac{-m}{۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}-m=۱۴\Rightarrow m=-۱۴$$

حالا با جای‌گذاری $m=-۱۴$، معادله را حل می‌کنیم:

$$۲x^۲-۱۴x+۱۲=۰\xrightarrow{\text{طرفین را به ۲ تقسیم می‌کنیم}}x^۲\underbrace{-۷}_{\text{جمع}}x\underbrace{+۶}_{\text{ضرب}}=۰\xrightarrow{\text{تجزیه با کمک اتحاد جمله مشترک}}(x-۱)(x-۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۶\end{cases}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر چه‌قدر است؟

(الف) $\alpha^۲+\beta^۲$ (ب) $۲\alpha^۲+۴\beta$

پاسخ S و P این معادله را در دو مثال قبل به دست آورده بودیم: $S=\alpha+\beta=۲$ $P=\alpha\beta=\frac{۱}{۲}$

(الف) $\alpha^۲+\beta^۲$ دو جمله از اتحاد مربع هستند، پس آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\alpha^۲+\beta^۲=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}{}^۲-۲\underbrace{\alpha\beta}_{P}=S^۲-۲P=۲^۲-۲(\frac{۱}{۲})=۴-۱=۳$$

(ب) جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس می‌توانیم جای x، α را قرار دهیم: $۲\alpha^۲-۴\alpha+۱=۰$

از این معادله $۲\alpha^۲$ را تنها می‌کنیم: $۲\alpha^۲=۴\alpha-۱$

پس جای $۲\alpha^۲$، عبارت $۴\alpha-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{۲\alpha^۲}_{۴\alpha-۱}+۴\beta=۴\alpha-۱+۴\beta=\underbrace{۴\alpha+۴\beta}_{\text{از ۴ فاکتور می‌گیریم}}-۱=۴\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S=۲}-۱=۴(۲)-۱=۸-۱=۷$$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است: قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها $=|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۸۱- در معادله‌ی درجه‌دوم $3x^2-7x-2=0$ نسبت حاصل‌ضرب ریشه‌ها به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) $-\frac{2}{7}$

۸۲- اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+(3k-1)x+k+1=0$ برابر با ۳ باشد، k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۸۳- در معادله‌ی $2x(x-1)=8$، مجموع معکوس ریشه‌ها کدام است؟

۱) -4 ۲) ۴ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۴- در معادله‌ی $3x^2-8x-3=0$ اختلاف ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{8}{10}$ ۴) $\frac{10}{8}$

۸۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-6x+2=0$ باشند، مقدار $x_1^2+x_2^2$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۶- در کدام معادله، ریشه‌های معادله معکوس یکدیگرند؟

۱) $2x^2-7x-2=0$ ۲) $3x^2+11x+3=0$ ۳) $7x^2-6x-1=0$ ۴) $x^2-8x+16=0$

۸۷- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $7x^2-ax+35=0$ برابر با -4 باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $-\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۸۸- اگر حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2kx+2k+2=0$ با هم برابر باشند، ریشه‌ی کوچک‌تر معادله کدام است؟

۱) $3+\sqrt{12}$ ۲) $3-\sqrt{12}$ ۳) $3-\sqrt{3}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

۸۹- در معادله‌ی درجه‌دوم $6x^2+(k+1)x+k=0$، اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه‌ی مثبت آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$ (سراسری ۹۴)

۹۰- در معادله‌ی درجه‌دوم $2x^2+kx+1-k=0$، اگر حاصل‌ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۱- به ازای یک مقدار m، ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+3mx+2m+6=0$، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه، کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) $-1/5$ ۲) $1/5$ ۳) ۲ ۴) ۳

۹) کاربرد معادله‌ی درجه دوم در حل مسائل

در برخی از مسائل با اطلاعاتی که سؤال داده، می‌توانیم یک معادله بنویسیم. بعضی وقت‌ها این معادله یک معادله‌ی درجه‌دوم می‌شود. معادله‌ی درجه‌دوم را با هر روشی که دوست داریم حل می‌کنیم، فقط در آخر باید جوابمان را یه آنالیز عقلی بکنیم! مثلاً اگر مجهول اولیه‌ی معادله سن باشد و بعد از تشکیل و حل معادله‌ی درجه‌دوم به دو جواب $x_1=38$ و $x_2=-21$ رسیده باشیم، جواب $x_2=-21$ رد می‌شود، زیرا سن نمی‌تواند منفی باشد!

مثال مربع عددی طبیعی با دو برابر آن عدد به علاوه‌ی ۳، برابر است. این عدد را به دست آورید.

پاسخ این عدد را x می‌گیریم! مربع آن x^2 و دو برابر آن به علاوه‌ی ۳ برابر با $2x+3$ است. طبق گفته‌ی سؤال x^2 و $2x+3$ با هم برابرند:

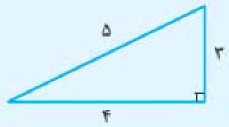
$$x^2=2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$

با روش کلی معادله را حل می‌کنیم: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-3)=4-(-12)=4+12=16$ $\quad a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-3$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{2\pm4}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3 \ \checkmark & \text{(عددی طبیعی است، پس قبول است)}\\ x_2=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \ \times & \text{(چون عددی طبیعی نیست، رد می‌شود!)}\end{cases}$$

اگر در صورت سؤال، جای کلمه‌ی «طبیعی»، کلمه‌ی «صحیح» آمده بود، هر دو جواب قابل‌قبول بودند.

مثال با توجه به شکل روبه‌رو، مقدار x چه‌قدر است؟



پاسخ چون مثلث قائم‌الزاویه است، پس رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن می‌نویسیم:

$$(2x+3)^2=(x+2)^2+(x+3)^2 \Rightarrow 4x^2+9+2(2x)(3)=x^2+4+2(x)(2)+x^2+9+2(x)(3)$$

$$\Rightarrow 4x^2+9+12x=x^2+4+4x+x^2+9+6x \xrightarrow{\text{همه‌ی جملات را به سمت چپ می‌بریم}} \underline{4x^2}+\cancel{9}+\underline{\underline{12x}}-\underline{x^2}-4-\underline{\underline{4x}}-\underline{x^2}-\cancel{9}-\underline{\underline{6x}}=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-4=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2} x^2+x-2=0 \xrightarrow{\text{با روش تجزیه}} (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 & \times \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 & \checkmark \end{cases}$$

$x=-2$ قابل‌قبول نیست، زیرا با جای‌گذاری $x=-2$ در اضلاع مثلث، وتر عددی منفی می‌شود!

$$\text{وتر} = 2x+3 \xrightarrow{x=-2} \underbrace{2(-2)}_{-4}+3=-1$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۹۲- اگر طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر با $2k$، $2k+1$ و $2k+2$ باشند، اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۳- حاصل‌ضرب یک عدد مثبت در خودش، از سه برابر آن عدد ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۴- مربع دو برابر عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۹۵- عبارت گویای $\frac{2x^2+5}{x^2-3x-4}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف <u>نشده</u> است؟

۱) $\{1,4\}$ ۲) $\{-1,4\}$ ۳) $\{1,-4\}$ ۴) $\{-1,-4\}$

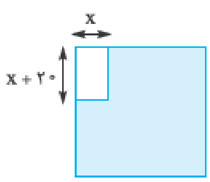
۹۶- در معادله‌ی $\frac{1}{5}=5^{9x^2-6x}$، مقدار x کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۷-محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۵۴ متر و ۱۸۰ متر مربع است. اختلاف طول و عرض آن چه‌قدر است؟

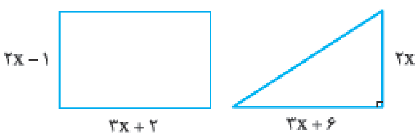
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۸- در شکل زیر، ضلع مربع برابر با ۸۰ واحد است و مستطیلی با ابعاد x و $x+20$ در آن قرار دارد. اگر مساحت قسمت رنگی ۴۹۰۰ واحد مربع باشد، x کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۵۰

۹۹- در شکل زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم‌شده با هم برابر است. محیط مستطیل چه‌قدر است؟



۱) ۲۲
۲) ۲۴
۳) ۲۶
۴) ۲۸

۱۰۰- اگر سه جمله‌ای درجه‌دوم $(k-۱)x^{۲}+۲kx+۴$ مربع کامل باشد، مقدار $\sqrt{k}$ کدام است؟ (سنجش ۹۰)

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۱۶

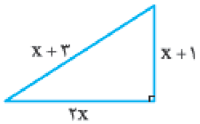
۱۰۱- فاصله‌ی هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل‌شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟ (سنجش ۹۳)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰۲- اختلاف مربع عدد $\frac{۳}{۷}$ از خود $\frac{۳}{۷}$، برابر اختلاف مربع چه عددی از خود آن عدد است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۱۰۳- محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۱۰۴- مربع نصف عددی از ۱۲ برابر آن عدد، ۸۱ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟ (سنجش ۸۹)

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۱۸- گزینه‌ی جملات را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$9x^2-3x=0$$

حالا در سمت چپ از $3x$ فاکتور می‌گیریم: $3x(3x-1)=0$

با استفاده از خاصیت عامل صفر، داریم:

$$\begin{cases} 3x=0 \Rightarrow x=0 \\ 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۹- گزینه‌ی در سمت چپ تساوی از عبارت $x+3$ می‌توانیم فاکتور بگیریم: $x(x+3)-4(x+3)=0 \Rightarrow (x+3)(x-4)=0$

و بعد از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

۲۰- گزینه‌ی عبارت سمت راست تساوی (یعنی $x-1$) در عامل‌های تشکیل‌دهنده‌ی سمت چپ تساوی قرار دارد، پس اگر آن را به سمت چپ تساوی بیاوریم و از آن فاکتور بگیریم، می‌توانیم معادله را به روش تجزیه حل کنیم:

$$(x-1)(x+1)=(x-1) \Rightarrow (x-1)(x+1)-(x-1)=0$$

$$\xrightarrow{\text{از } (x-1) \text{ فاکتور می‌گیریم}} (x-1)((x+1)-1)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+\cancel{1}-\cancel{1})=0 \Rightarrow (x-1)(x)=0$$

x و $x-1$ دو عبارت درجه‌یک موردنظر هستند که x در گزینه‌ها هست.

۲۱- گزینه‌ی تجزیه‌شده‌ی عبارت ax^2+bx+c را جایش قرار می‌دهیم: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow (2x-1)(x+5)=0$

حالا از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم: $\frac{1}{2}+(-5)=\frac{1-10}{2}=-\frac{9}{2}$

۲۲- گزینه‌ی گفتیم α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ هستند، پس معادله‌ی درجه‌دومی که ریشه‌هایش $\frac{1}{2}$ و -2 باشد، به صورت زیر است:

$$(x-(-2))(x-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \underbrace{(x+2)(x-\frac{1}{2})}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}=0$$

$$\Rightarrow x^2+(2-\frac{1}{2})x+(2\times\frac{-1}{2})=0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-1=0$$

می‌توانیم طرفین تساوی را در عدد دلخواهی مثل ۲ ضرب کنیم:

$$x^2+\frac{3}{2}x-1=0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} 2x^2+3x-2=0$$

۲۳- گزینه‌ی تمام جملات را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$x^2-12x+36=0$$

سمت چپ تساوی، بازشده‌ی یک اتحاد مربع است: $(x-6)^2=0$

پس $x-6=0$ و در نتیجه $x=6$.

۲۴- گزینه‌ی

اگر $x=\alpha$ ریشه‌ی مضاعف یک معادله‌ی درجه‌دوم باشد، آن معادله به صورت $(x-\alpha)^2=0$ بوده است.

پس در این‌جا معادله به صورت $(x-\frac{1}{2})^2=0$ است:

$$\underbrace{(x-\frac{1}{2})^2}_{\text{اتحاد مربع}}=0 \Rightarrow x^2-2(x)(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0$$

طرفین معادله‌ی به دست‌آمده را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-4x+1=0$$

۲۵- گزینه‌ی عبارت سمت چپ را باید به شکل اتحاد مربع درآوریم. $4x^2-12x$ یک عدد کم دارد تا اتحاد مربع شود.

$$\underbrace{4x^2}_{\text{جمله‌ی } a^2} - \underbrace{12x}_{\text{جمله‌ی } 2ab} + \underbrace{\bigcirc}_{\text{جمله‌ی } b^2}$$

جمله‌ی a^2 برابر $4x^2$ شده است، پس a برابر $2x$ است. جمله‌ی $2ab$ برابر با $12x$ شده است، پس ab برابر با $6x$ است و از آن‌جایی که $a=2x$ است، پس b باید ۳ باشد. در نتیجه b^2 برابر با $9=3^2$ است.

پس در معادله‌ی $4x^2-12x-k=0$، $-k$ برابر ۹ است و در نتیجه $k=-9$.

۲۶- گزینه‌ی

$$(a+2b)^2+a^2=6a-9 \Rightarrow (a+2b)^2+\underbrace{a^2-6a+9}_{\text{بازشده‌ی اتحاد مربع}}=0$$

$$\Rightarrow (a+2b)^2+(a-3)^2=0$$

مجموع دو عبارت نامنفی (چون توانشان زوج است) برابر با صفر شده است، پس هر کدام برابر با صفر هستند: $\underbrace{(a+2b)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(a-3)^2}_{\text{نامنفی}}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3 \\ a+2b=0 \Rightarrow 2b=-a \xrightarrow{a=3} 2b=-3 \Rightarrow b=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

خواسته‌ی سؤال : $ab=3(\frac{-3}{2})=\frac{-9}{2}$

۲۷- گزینه‌ی

$$a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+3=2a+2b+2c$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+\underset{1+1+1}{\underset{\downarrow}{3}}=0$$

$$a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+1+1+1=0$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)=0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

عبارتی که توان آن زوج است حتماً نامنفی است (یعنی یا مثبت است یا صفر). در این‌جا مجموع سه عبارت نامنفی، صفر شده است، پس هر سه عبارت باید مساوی صفر باشند و داریم:

$$(a-1)^2=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$
$$(b-1)^2=0 \Rightarrow b-1=0 \Rightarrow b=1$$
$$(c-1)^2=0 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1$$

۲۸- گزینه‌ی ۱

$$12x^2-24=0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 12} x^2-2=0$$

x^2-2 را با کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$x^2-2=0 \Rightarrow x^2-(\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$$

حالا از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2} \\ x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ گفتیم α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ هستند، پس معادله‌ای که ریشه‌های آن $-\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{5}$ باشند، به این صورت است:

$$(x-(-\frac{2}{5}))(x-\frac{2}{5})=0 \Rightarrow (x+\frac{2}{5})(x-\frac{2}{5})=0$$
$$\Rightarrow x^2-(\frac{2}{5})^2=0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{25}=0$$

حالا طرفین را در ۲۵ ضرب می‌کنیم:

$$25(x^2-\frac{4}{25})=25\times 0 \Rightarrow 25x^2-4=0$$

۳۰- گزینه‌ی ۲ تمام جملات را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$(3x+1)^2-(x-5)^2=0$$

سمت چپ را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$((3x+1)-(x-5))((3x+1)+(x-5))=0$$

اگر داخل پرانتزها را ساده کنیم، داریم:

$$(3x+1-x+5)(3x+1+x-5)=0 \Rightarrow (2x+6)(4x-4)=0$$

حالا با استفاده از خاصیت عامل صفر داریم:

$$\begin{cases} 2x+6=0 \Rightarrow x=-\frac{6}{2}=-3 \\ 4x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{4}=1 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با: $-3+1=-2$

۳۱- گزینه‌ی ۳ اول معادله‌ی $x^2-25=0$ را با کمک اتحاد مزدوج حل می‌کنیم:

$$x^2-25=0 \Rightarrow (x-5)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-5 \end{cases}$$

حالا یک واحد به هر کدام از ریشه‌ها اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 5+1=6 \\ -5+1=-4 \end{cases}$$

پس باید معادله‌ای را بنویسیم که ریشه‌هایش ۶+ و ۴- باشند:

$$(x-6)(x-(-4))=0 \Rightarrow \underbrace{(x-6)(x+4)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}=0$$
$$\Rightarrow x^2+(-6+4)x+(-6\times 4)=0 \Rightarrow x^2-2x-24=0$$

۳۲- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی داده‌شده را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2\underbrace{-3}_{\text{جمع}}x\underbrace{-10}_{\text{ضرب}}=0 \xrightarrow[\text{هستند}]{\text{دو عدد ۲ و ۵-}} (x-5)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

۳۳- گزینه‌ی ۲ تمام جملات را به سمت چپ می‌بریم:

$$25x^2-10x-24=0$$

از جمله‌ی $25x^2$ می‌فهمیم که جمله‌ی مشترک $5x$ است:

$$25x^2-10x-24=0 \Rightarrow (5x\quad)(5x\quad)=0$$

حاصل‌ضرب جمله‌ی مشترک ($5x$) در مجموع غیرمشترک‌ها برابر $-10x$ شده است، پس مجموع غیرمشترک‌ها برابر است با:

$$\frac{-10x}{5x}=-2$$

حاصل‌ضرب جمله‌های غیرمشترک هم ۲۴- است، پس باید دو عدد پیدا کنیم که مجموعشان ۲- و حاصل‌ضربشان ۲۴- است. این دو عدد ۶- و ۴+ هستند، پس معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(5x-6)(5x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{5} \\ 5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-4}{5}\text{جواب کوچک‌تر} \end{cases}$$

۳۴- گزینه‌ی ۳ عدد موردنظر را x می‌گیریم. سه واحد بیشتر از قرینه‌اش یعنی $-x+3$.

حاصل‌ضرب این دو عدد برابر ۲۸- است، پس:

$$x(-x+3)=-28 \Rightarrow -x^2+3x=-28 \Rightarrow x^2-3x-28=0$$

باید دو عدد پیدا کنیم که جمعشان ۳- و حاصل‌ضربشان ۲۸- است؛ این دو عدد ۷- و ۴+ هستند، پس:

$$x^2-3x-28=0 \Rightarrow (x-7)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-7=0 \Rightarrow x=7 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط $x=-4$ وجود دارد.

۳۵- گزینه‌ی ۱ معادله را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$x^4-13x^2+36=0 \Rightarrow (x^2)^2-13x^2+36=0$$

جمله‌ی مشترک را x^2 می‌گیریم. باید دو عدد پیدا کنیم که مجموعشان ۱۳- و حاصل‌ضربشان ۳۶+ باشد. این دو عدد ۴- و ۹- هستند، پس:

$$(x^2)^2-13x^2+36=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2-9)=0$$

هر کدام از پرانتزها با کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌شوند:

$$(x^2-4)(x^2-9)=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

دو جواب بزرگ‌تر $x=2$ و $x=3$ هستند که مجموعشان ۵ است.

۳۶- گزینه‌ی ۳ تمام مراحل را طبق درس‌نامه انجام می‌دهیم (البته تا جایی که لازمه!)

(۱) $2x^2+3x-5=0 \Rightarrow 2x^2+3x=5$

(۲) $2x^2+3x=5 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2} x^2+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}$

(۳) x نصف ضریب $=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}=\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{توان } 2} (\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$

پس باید $\frac{9}{16}$ را به دو طرف تساوی اضافه کنیم. دیگر لازم نیست ادامه بدهیم چون سؤال همین را از ما خواسته است.

۳۷- گزینه‌ی ۲ تمام مراحل را طبق درس‌نامه انجام می‌دهیم:

(۱) $2x^2-6x-1=0 \Rightarrow 2x^2-6x=1$

(۲) $2x^2-6x=1 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2} x^2-3x=\frac{1}{2}$

(۳) x نصف ضریب $=\frac{-3}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} (-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$

حالا $\frac{9}{4}$ را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{1}{2}+\frac{9}{4} \Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{11}{4}$$

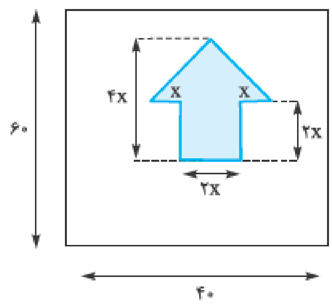
(۴) $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{11}{4}$

(۵) $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$

پس از عدد $\frac{11}{4}$ جذر گرفته می‌شود.

(۶) $\begin{cases} x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{11}+3}{2} \\ x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{11}+3}{2} \end{cases}$

۳۸- گزینه‌ی ۴



ضلع مربع را x می‌گیریم. برای مثلث رنگی، رابطه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$x^2+x^2=(4\sqrt{3})^2$$

$$2x^2=16\times 3 \Rightarrow 2x^2=48 \Rightarrow x^2=24$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه زوج}} x=\pm\sqrt{24} \xrightarrow{\text{ضلع مربع مثبت است}} x=\sqrt{24}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$$

پس ضلع مربع $2\sqrt{6}$ است و در نتیجه محیط آن برابر است با:

$$P=4x=4(2\sqrt{6})=8\sqrt{6}$$

محیط مربع به ضلع x برابر با $4x$ است.

۳۹- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی دوم را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(x-b)^2=25 \Rightarrow x^2-2bx+b^2=25 \Rightarrow x^2-2bx=25-b^2$$

معادله‌ی اول هم که به شکل $x^2-2bx=16$ است، پس: $25-b^2=16$ و در نتیجه $b^2=9$.

۴۰- گزینه‌ی ۴

(۱) $2-x^2=0 \Rightarrow x^2=2 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{2}$

(۲) $x^2-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x^2=\sqrt{2}$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{\sqrt{2}}=\pm\sqrt[4]{2}$$

(۳) $1-2x^2=0 \Rightarrow 1=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(۴) $x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$

$\xrightarrow{x^2 \text{ نمی‌تونه عددی منفی بشه}}$ معادله جواب حقیقی ندارد!

۴۱- گزینه‌ی ۲

$$(5x-4)^2-8=1 \Rightarrow (5x-4)^2=9$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} 5x-4=\pm\sqrt{9} \Rightarrow 5x-4=\pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-4=3 \Rightarrow 5x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{5} \\ 5x-4=-3 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5} \end{cases}$$

تفاضل ریشه‌ها $=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=1/2$

۴۲- گزینه‌ی ۴

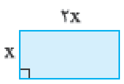
$$(3x-1)^2=(4-x)^2 \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} 3x-1=\pm(4-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-1=4-x \Rightarrow 4x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{4} \\ 3x-1=-4+x \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \end{cases}$$ ریشه‌ی کوچک‌تر

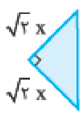
۴۳- گزینه‌ی ۱ مساحت کل مربع برابر است با:

$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^2=6^2=36$$

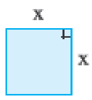
مساحت هر شکل بریده‌شده را جدا حساب می‌کنیم:



$$S_{\text{مستطیل}}=\text{طول}\times\text{عرض}=2x\cdot x=2x^2$$



$$S_{\text{مثلث}}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{2}=\frac{\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}x}{2}=\frac{2x^2}{2}=x^2$$



$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^۲ = x^۲$

مجموع مساحت این سه قسمت بریده‌شده برابر است با:

$$۲x^۲ + x^۲ + x^۲ = ۴x^۲$$

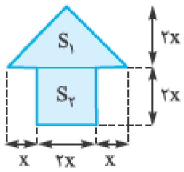
پس از مساحت کل (یعنی ۳۶) باید $۴x^۲$ را کم کنیم (می‌شود $۳۶-۴x^۲$)، این مقدار برابر ۲۴ است، پس:

$$۳۶-۴x^۲=۲۴ \Rightarrow -۴x^۲=-۱۲ \Rightarrow x^۲=۳$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{۳} \xrightarrow{\text{ضلع}>۰} x=\sqrt{۳}$$

کوچک‌ترین ضلع شکل بریده شده همان x است، پس جواب $\sqrt{۳}$ است.

۴۴- گزینه‌ی ۲ اول مساحت فلش آبی را به دست می‌آوریم. فلش از یک مثلث و یک مستطیل تشکیل شده است.



$$S_۱ = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{(\cancel{۲}x)(۴x)}{\cancel{۲}} = ۴x^۲$$

$$S_۲ = \text{طول} \times \text{عرض} = (۲x)(۲x) = ۴x^۲$$

پس مساحت کل فلش برابر است با:

$$S_{\text{فلش}} = S_۱ + S_۲ = ۴x^۲ + ۴x^۲ = ۸x^۲$$

حالا باید مساحت فلش آبی (یعنی $۸x^۲$) را از مساحت کل مستطیل (یعنی ۴۰×۶۰) کم کنیم که می‌شود: $۲۴۰۰-۸x^۲$

پس مساحت برچسب سفید برابر با $۲۴۰۰-۸x^۲$ است. هزینه‌ی برچسب آبی برابر با $۳۰\times ۸x^۲=۲۴۰x^۲$ و هزینه‌ی برچسب سفید برابر با $۱۰\times(۲۴۰۰-۸x^۲)=۲۴۰۰۰-۸۰x^۲$ است.

مجموع این دو هزینه روی هم ۶۰۰۰۰ تومان می‌شود، پس:

$$(۲۴۰x^۲)+(۲۴۰۰۰-۸۰x^۲)=۶۰۰۰۰$$
$$\Rightarrow ۲۴۰x^۲+۲۴۰۰۰-۸۰x^۲=۶۰۰۰۰$$
$$\Rightarrow ۱۶۰x^۲=۳۶۰۰۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۳۶۰۰۰}{۱۶۰}=۲۲۵ \Rightarrow x=۱۵$$

۴۵- گزینه‌ی ۱ با روش کلی، معادله‌ی $۲x^۲-۵x-۳=۰$ را حل می‌کنیم:

$a=۲\ ,\ b=-۵\ ,\ c=-۳$

اول Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴(۲)(-۳)=۲۵-(-۲۴)=۲۵+۲۴=۴۹$$

حالا در فرمول نهایی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)\pm\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{۵\pm ۷}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۵+۷}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳ \\ x_۲=\frac{۵-۷}{۴}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲} : \text{جواب کوچک‌تر} \end{cases}$$

۴۶- گزینه‌ی ۲ اول قیافه‌ی معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$x(x-۲)=۲ \Rightarrow x^۲-۲x=۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰$$

حالا می‌رویم سراغ Δ و محاسبه‌ی جواب‌ها:

$a=۱\ ,\ b=-۲\ ,\ c=-۲$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(-۲)=۴+۸=۱۲$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۲)\pm\sqrt{۱۲}}{۲(۱)}=\frac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}$$

رادیکال ۱۲ را می‌توانیم بهتر بنویسیم:

$$\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times ۳}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\cancel{۲}(۱\pm\sqrt{۳})}{\cancel{۲}}=۱\pm\sqrt{۳}$$

پس $x_۱=۱+\sqrt{۳}$ و $x_۲=۱-\sqrt{۳}$ جواب‌های معادله هستند.

۴۷- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی $۶x^۲+۵x-۱=۰$ را به روش کلی حل می‌کنیم:

$a=۶\ ,\ b=۵\ ,\ c=-۱$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۵^۲-۴(۶)(-۱)=۲۵+۲۴=۴۹$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۵\pm\sqrt{۴۹}}{۲(۶)}=\frac{-۵\pm ۷}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-۵+۷}{۱۲}=\frac{۱}{۶} \\ x_۲=\frac{-۵-۷}{۱۲}=-۱ \end{cases}$$

پس:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(\frac{۱}{۶})^۲+(-۱)^۲=\frac{۱}{۳۶}+۱=\frac{۱+۳۶}{۳۶}=\frac{۳۷}{۳۶}$$

۴۸- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی $x^۲-۲kx+۱۵=۰$ را با روش کلی حل می‌کنیم:

$a=۱\ ,\ b=-۲k\ ,\ c=۱۵$

اول Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲k)^۲-۴(۱)(۱۵)=۴k^۲-۶۰$$

حالا در فرمول نهایی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۲k)\pm\sqrt{۴k^۲-۶۰}}{۲(۱)}=\frac{۲k\pm\sqrt{۴k^۲-۶۰}}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۲k+\sqrt{۴k^۲-۶۰}}{۲} \\ x_۲=\frac{۲k-\sqrt{۴k^۲-۶۰}}{۲} \end{cases}$$

در نتیجه، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$x_۱+x_۲=\frac{۲k+\sqrt{۴k^۲-۶۰}}{۲}+\frac{۲k-\sqrt{۴k^۲-۶۰}}{۲}$$

$$=\frac{۲k+\cancel{\sqrt{۴k^۲-۶۰}}+۲k-\cancel{\sqrt{۴k^۲-۶۰}}}{۲}=\frac{۲k+۲k}{۲}=\frac{۴k}{۲}=۲k$$

البته این سؤال را کمی جلوتر، با روش ساده‌تر می‌توانیم حل کنیم.

۴۹- گزینه‌ی ۴ جواب‌های معادله‌ی درجه‌دوم در آن صدق می‌کنند، پس $x=۲$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$mx^۲-۳x+۴=۰ \xrightarrow{x=۲\ \text{جای‌گذاری}} m(۲)^۲-۳(۲)+۴=۰$$

$$\Rightarrow 4m-6+4=0 \Rightarrow 4m-2=0 \Rightarrow 4m=2 \Rightarrow m=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

حالا $m=\frac{1}{2}$ را در معادله جای‌گذاری و معادله را حل می‌کنیم تا جواب دیگر هم به دست آید: $mx^2-3x+4=0$

$$\xrightarrow{m=\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2-3x+4=0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} x^2-6x+8=0$$

معادله‌ی $x^2-6x+8=0$ را با روش کلی حل می‌کنیم:

$a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=8$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(8)=36-32=4$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2(1)}=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4\\ x_2=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

پس جواب دیگر معادله (غیر از ۲) برابر با ۴ است.

۵۰- **گزینه‌ی ۳** در معادله‌ی $17x^2-20x+3=0$، داریم:

$a=17\ ,\ b=-20\ ,\ c=3$

بین این ضرایب رابطه‌ی $a+b+c=0$ برقرار است پس ریشه‌های آن ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند:

$x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{17}$

که ریشه‌ی کوچک‌تر $\frac{3}{17}$ است.

۵۱- **گزینه‌ی ۳** معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$x(11x+10)=1 \Rightarrow 11x^2+10x=1 \Rightarrow 11x^2+10x-1=0$$

پس $a=11$، $b=10$ و $c=-1$ است و بین آن‌ها رابطه‌ی $a-b+c=0$ برقرار است، پس ریشه‌های آن ۱- و $-\frac{c}{a}$ هستند:

$x_1=-1\ ,\ x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-1}{11}=\frac{1}{11}$

پس ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله $\frac{1}{11}$ است و نصف آن برابر است با:

$\frac{1}{11}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{22}$

۵۲- **گزینه‌ی ۲** اگر خوب به معادله‌ی $3x^2+kx-7=0$ دقت کنیم، می‌بینیم که نسبت $-\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{7}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله شده است، پس نتیجه می‌گیریم که ریشه‌ی دیگر معادله حتماً ۱- است و نیازی به محاسبه‌ی k نیست.

۵۳- **گزینه‌ی ۴** معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\underbrace{(m+3)}_{a}x^2\underbrace{-(2m+1)}_{b}x\underbrace{+m-2}_{c}=0$$

که در آن $a=m+3$، $b=-2m-1$ و $c=m-2$ هستند. با کمی تیزبازی می‌فهمیم که $a+b+c=0$ است:

$$a+b+c=(m+3)+(-2m-1)+m-2=0$$

پس جواب‌های معادله ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند: $x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{m+3}$

که در گزینه‌ها فقط (۱) آمده است.

۵۴- **گزینه‌ی ۴** اول $2x-1$ را t می‌گیریم، معادله این شکلی می‌شود: $4t^2-5t+1=0$

حالا معادله‌ی بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(4)(1)=25-16=9$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(4)}=\frac{5\pm3}{8}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\frac{5+3}{8}=\frac{8}{8}=1\\ t_2=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

حالا جای t عبارت $2x-1$ را قرار می‌دهیم و x را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}t=1 \Rightarrow 2x-1=1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1\\ t=\frac{1}{4}\Rightarrow 2x-1=\frac{1}{4}\Rightarrow 2x=\frac{1}{4}+1\Rightarrow 2x=\frac{5}{4}\Rightarrow x=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}}=\frac{5}{8}\end{cases}$$

مجموع جواب‌های معادله: $1+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$

۵۵- **گزینه‌ی ۱** اول $x-1$ را t می‌گیریم. معادله این شکلی می‌شود: $t^2+2\sqrt{3}t=6 \Rightarrow t^2+2\sqrt{3}t-6=0$

حالا معادله‌ی بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=\underbrace{(2\sqrt{3})^2}_{4\times3}-4(1)(-6)=12-(-24)=12+24=36$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{-2\sqrt{3}\pm6}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{درصورت ۲ از}}=\frac{\cancel{2}(-\sqrt{3}\pm3)}{\cancel{2}}=-\sqrt{3}\pm3\Rightarrow\begin{cases}t_1=-\sqrt{3}+3\\ t_2=-\sqrt{3}-3\end{cases}$$

حالا جای t عبارت $x-1$ را قرار می‌دهیم و x را به دست می‌آوریم:

$$t=-\sqrt{3}+3 \Rightarrow x-1=-\sqrt{3}+3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}+4=4-\sqrt{3}$$

$$t=-\sqrt{3}-3 \Rightarrow x-1=-\sqrt{3}-3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}-2$$

بین دو عدد $4-\sqrt{3}$ و $-2-\sqrt{3}$ که جواب‌های معادله هستند، عدد $4-\sqrt{3}$ جواب بزرگ‌تر است.

۵۶- **گزینه‌ی ۱** معادله‌ی $x^4+10x^2+9=0$ را می‌توانیم به شکل $(x^2)^2+10(x^2)+9=0$ بنویسیم. اگر x^2 را t بگیریم، معادله به معادله‌ی درجه‌دو تبدیل می‌شود:

$$(x^2)^2+10(x^2)+9=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+10t+9=0$$

حالا معادله‌ی $t^2+10t+9=0$ را حل می‌کنیم:

$$\underbrace{t^2+10t+9}_{\text{تجزیه با جمله مشترک}}=0\Rightarrow(t+1)(t+9)=0\Rightarrow\begin{cases}t+1=0 \Rightarrow t=-1\\ t+9=0 \Rightarrow t=-9\end{cases}$$

حالا باید جای t، عبارت x^2 را قرار دهیم:

$t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \xrightarrow{x^2\ \text{نمی‌تونه منفی باشه}}$ جواب حقیقی ندارد.

$t=-9 \Rightarrow x^2=-9 \xrightarrow{x^2\ \text{نمی‌تونه منفی باشه}}$ جواب حقیقی ندارد.

پس معادله صفر جواب حقیقی دارد!

۵۷- گزینه‌ی ۲ اول x^2+x را t می‌گیریم. معادله به شکل $t^2-18t+72=0$ درمی‌آید. Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-18)^2-4(1)(72)=324-288=36$$

حالا ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{18\pm\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{18\pm6}{2}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\frac{18+6}{2}=12\\ t_2=\frac{18-6}{2}=6\end{cases}$$

حالا با جای‌گذاری $t=x^2+x$، مقادیر x را به دست می‌آوریم:

$$t=12\Rightarrow x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترک}}(x+4)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\ x=3\end{cases}$$

$$t=6\Rightarrow x^2+x=6\Rightarrow x^2+x-6=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترک}}(x+3)(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=2\end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله برابر است با: $(-4)+3+(-3)+2=-2$

۵۸- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی $x^2\underbrace{-2x}_{\text{جمع}}\underbrace{-48}_{\text{ضرب}}=0$ را به کمک تجزیه به راحتی حل می‌کنیم. سمت چپ تساوی، بازشده‌ی یک اتحاد جمله مشترک است. باید دنبال دو عدد باشیم که جمعشان -2 و ضربشان -48 است. این دو عدد -8 و $+6$ است، پس:

$$x^2-2x-48=0\Rightarrow(x-8)(x+6)=0\Rightarrow\begin{cases}x-8=0\Rightarrow x=8\\ x+6=0\Rightarrow x=-6\end{cases}$$

جواب کوچک‌تر این معادله $x=-6$ است که فقط در محدوده‌ی (۴) قرار دارد.

۵۹- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی $x^2-x-1=0$ را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-1$$

اول Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(-1)=1-(-4)=1+4=5$$

حالا در فرمول نهایی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{5}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

جواب‌های معادله برابر با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ هستند، که هر دو عددی گنگ می‌باشند.

۶۰- گزینه‌ی ۲

$$(x+2)^2=5\xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}}x+2=\pm\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2=\sqrt{5}\Rightarrow x_1=\sqrt{5}-2\\ x+2=-\sqrt{5}\Rightarrow x_2=-\sqrt{5}-2\end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1+x_2=(\sqrt{5}-2)+(-\sqrt{5}-2)=\cancel{\sqrt{5}}-2-\cancel{\sqrt{5}}-2=-4$$

۶۱- گزینه‌ی ۳ اول معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$13x^2-5x=2(x+3)\Rightarrow 13x^2-5x=2x+6$$

$$\Rightarrow 13x^2-7x-6=0$$

اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم مجموع ضرایب معادله صفر است $(a+b+c=0)$، پس ریشه‌های معادله ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند:

$$x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{-6}{13}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله، $x_2=\frac{-6}{13}$ است.

۶۲- گزینه‌ی ۴ در هر دو سمت تساوی عامل $(3x-5)$ وجود دارد، پس اگر آن‌ها را به یک طرف تساوی ببریم، می‌توانیم از این عامل مشترک فاکتور بگیریم:

$$x(3x-5)=(2x+4)(3x-5)$$

$$\Rightarrow(2x+4)(3x-5)-x(3x-5)=0$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{(3x-5)\ \text{از}}(3x-5)[(2x+4)-x]=0$$

$$\Rightarrow(3x-5)(2x+4-x)=0\Rightarrow(3x-5)(x+4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x-5=0\Rightarrow x_1=\frac{5}{3}\\ x+4=0\Rightarrow x_2=-4\end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $x_1\times x_2=\frac{5}{3}\times(-4)=\frac{-20}{3}$

۶۳- گزینه‌ی ۱ چون $x=1$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$5x^2-3x+k=0\xrightarrow{x=1\ \text{جای‌گذاری}}5(1)^2-3(1)+k=0$$

$$\Rightarrow 5-3+k=0\Rightarrow 2+k=0\Rightarrow k=-2$$

حالا $k=-2$ را در معادله جای‌گذاری و معادله را حل می‌کنیم:

$$5x^2-3x+k=0\xrightarrow{k=-2}5x^2-3x-2=0$$

معادله را با روش کلی حل می‌کنیم: $a=5\ ,\ b=-3\ ,\ c=-2$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(5)(-2)=9-(-40)=9+40=49$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2(5)}=\frac{3\pm7}{10}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3+7}{10}=\frac{10}{10}=1\\ x_2=\frac{3-7}{10}=\frac{-4}{10}=-0/4\end{cases}$$

پس جواب دیگر معادله $-0/4$ است.

۶۴- گزینه‌ی ۴ چون $x=\frac{1}{2}$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3x^2+mx=m-1\xrightarrow{x=\frac{1}{2}\ \text{جای‌گذاری}}3(\frac{1}{2})^2+m(\frac{1}{2})=m-1$$

$$\Rightarrow 3(\frac{1}{4})+\frac{m}{2}=m-1\Rightarrow\frac{3}{4}+\frac{m}{2}=m-1$$

$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۴}} 4\left(\frac{3}{4}+\frac{m}{2}\right)=4(m-1) \Rightarrow 3+2m=4m-4$

$\Rightarrow 2m-4m=-4-3 \Rightarrow -2m=-7 \Rightarrow m=\frac{7}{2}$

حالا $m=\frac{7}{2}$ را در معادله جای‌گذاری و معادله را حل می‌کنیم:

$3x^2+mx=m-1 \xrightarrow{m=\frac{7}{2}} 3x^2+\frac{7}{2}x=\frac{7}{2}-1$

$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} 6x^2+7x=7-2 \Rightarrow 6x^2+7x-5=0$

معادله را با روش کلی حل می‌کنیم: $a=6\ ,\ b=7\ ,\ c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=7^2-4(6)(-5)=49-(-120)=49+120=169$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2(6)}=\frac{-7\pm 13}{12}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-7+13}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{-7-13}{12}=\frac{-20}{12}=\frac{-5}{3} \end{cases}$$

پس جواب دیگر معادله $\frac{-5}{3}$ است.

۶۵- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی داده‌شده را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$5x(x-1)=2(x+6) \Rightarrow 5x^2-5x=2x+12$

$\Rightarrow 5x^2-5x-2x-12=0 \Rightarrow 5x^2-7x-12=0$

ضرایب این معادله به صورت $a=5$، $b=-7$ و $c=-12$ هستند. اگر دقت کنیم این ضرایب در رابطه‌ی $a-b+c=0$ صدق می‌کنند، پس ریشه‌های این معادله -1 و $-\frac{c}{a}$ هستند:

$x_1=-1\ ,\ x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-12}{5}=\frac{12}{5}$

عدد اعشاری متناظر با کسر $\frac{12}{5}$ را به دست می‌آوریم:

$\frac{12}{5}=\frac{12\times 2}{5\times 2}=\frac{24}{10}=2/4$

۶۶- گزینه‌ی ۲ ضرایب معادله‌ی $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ را می‌نویسیم:

$a=1\ ,\ b=-(\sqrt{2}+1)=-\sqrt{2}-1\ ,\ c=\sqrt{2}$

مجموع این ضرایب صفر است یعنی $a+b+c=0$، پس جواب‌های این معادله ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند.

$x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$

پس جواب بزرگ‌تر معادله، $x_2=\sqrt{2}$ است.

۶۷- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی $2x^4-7x^2-9=0$ را به صورت $2(x^2)^2-7x^2-9=0$ می‌نویسیم. با انتخاب $x^2=t$ معادله به صورت روبه‌رو درمی‌آید: $2t^2-7t-9=0$

اگر دقت کنیم بین ضرایب این معادله، رابطه‌ی $a-b+c=0$ برقرار است، پس ریشه‌های آن -1 و $-\frac{c}{a}$ هستند:

$t_1=-1\ ,\ t_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-9}{2}=\frac{9}{2}$

حالا باید جای t، x^2 را قرار دهیم و x را به دست آوریم:

$t_1=-1 \Rightarrow x^2=-1 \xrightarrow{x^2\ \text{نمی‌تواند منفی شود}}$ جواب ندارد.

$t_2=\frac{9}{2} \Rightarrow x^2=\frac{9}{2} \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه‌ی زوج}} x=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

پس معادله دارای دو جواب $\frac{3}{\sqrt{2}}$ و $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ است.

۶۸- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی درجه‌ی دومی دارای دو جواب متمایز است که شرط $\Delta>0$ را داشته باشد. برای همه‌ی گزینه‌ها Δ را حساب می‌کنیم، هر کدام مثبت شد، جواب است:

(۱) $x^2+2x=-3 \Rightarrow x^2+2x+3=0$

$\xrightarrow{a=1,\ b=2,\ c=3} \Delta=b^2-4ac$

$=2^2-4(1)(3)=4-12=-8 \rightarrow$ مثبت‌نشد

(۲) $x^2+x=1 \Rightarrow x^2+x-1=0$

$\xrightarrow{a=1,\ b=1,\ c=-1} \Delta=b^2-4ac=1^2-4(1)(-1)$

$=1-(-4)=5 \rightarrow$ مثبت‌شد.

نیازی به بررسی دو گزینه‌ی دیگر نیست ولی وجدانم نمی‌ذاره!

(۳) $x^2-x=-2 \Rightarrow x^2-x+2=0$

$\xrightarrow{a=1,\ b=-1,\ c=2} \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(2)=1-8=-7$

(۴) $x(2x-1)=-3 \Rightarrow x(2x)-1(x)=-3 \Rightarrow 2x^2-x=-3$

$\Rightarrow 2x^2-x+3=0 \xrightarrow{a=2,\ b=-1,\ c=3} \Delta=b^2-4ac$

$=(-1)^2-4(2)(3)=1-24=-23$

۶۹- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی درجه‌ی دوم داده‌شده دارای ریشه‌های برابر است، یعنی دو ریشه‌ی یکسان یا همان یک ریشه‌ی مضاعف دارد! پس $\Delta=0$ است:

$x^2-mx+m-1=0 \Rightarrow \underbrace{1}_{a}x^2\underbrace{-m}_{b}x+\underbrace{(m-1)}_{c}=0$

$\Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0 \Rightarrow (-m)^2-4(1)(m-1)=0$

$\Rightarrow m^2-4(m-1)=0 \Rightarrow \underbrace{m^2-4m+4}_{\text{اتحاد مربع}}=0 \Rightarrow (m-2)^2=0$

$\Rightarrow m-2=0 \Rightarrow m=2$

۷۰- گزینه‌ی ۴ اول معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$\underbrace{(2x+1)^2}_{\text{اتحاد مربع}}-(x+m)=0 \Rightarrow (2x)^2+2(2x)(1)+1^2-x-m=0$

$\Rightarrow 4x^2+\underline{4x}+1-\underline{x}-m=0 \Rightarrow \underbrace{4}_{a}x^2+\underbrace{3}_{b}x+\underbrace{(1-m)}_{c}=0$

شرط ریشه‌ی مضاعف‌داشتن: $\Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0$

$\Rightarrow 3^2-4(4)(1-m)=0 \Rightarrow 9-16(1-m)=0$

$\Rightarrow 9-16+16m=0 \Rightarrow -7+16m=0 \Rightarrow 16m=7 \Rightarrow m=\frac{7}{16}$

۷۱- گزینه‌ی ۳ زمانی معادله‌ی درجه‌دوم فقط دارای یک جواب است که ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی باید $\Delta = 0$ باشد:

$$m^2x^2 - mx + m - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{m^2}_{a}x^2 \underbrace{-m}_{b}x + \underbrace{(m-1)}_{c} = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(m^2)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4(m^3 - m^2) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m^3 + 4m^2 = 0$$

$$\Rightarrow -4m^3 + 5m^2 = 0 \xrightarrow{\text{از } m^2 \text{ فاکتور می‌گیریم}} m^2(-4m+5) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{پس یکی از آن‌ها باید صفر باشد}]{\text{حاصل‌ضرب دو عبارت صفر است}} \begin{cases} m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \\ -4m + 5 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

دقت کنید اگر $m = 0$ باشد، ضریب x^2 برابر با صفر می‌شود و معادله از فرم درجه‌دو بودن درمی‌آید، پس فقط $m = \frac{5}{4}$ قابل‌قبول است.

معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ و $b, c \in \mathbb{R}$ یک معادله‌ی درجه‌دوم است.

۷۲- گزینه‌ی ۳ اول معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، حتماً $\Delta = 0$ و ریشه‌ی مضاعف برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است (a ضریب x^2 و b ضریب x است)، پس در این‌جا، ریشه‌ی مضاعف برابر است با:

$$x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

می‌شد دلتا را مساوی صفر قرار دهیم و a را به دست آوریم و سپس با جای‌گذاری a در معادله، مقدار ریشه‌ی مضاعف را به دست آوریم. فقط کارهای اضافی، زیاد انجام می‌دادیم! وقت طلاست!

۷۳- گزینه‌ی ۳ اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، این ریشه برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است. این‌جا نمی‌توانیم مثل سؤال قبل کلک بزنیم و زود به جواب برسیم! حتماً باید m به دست آید! پس اول Δ را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا m به دست بیاید:

$$\underbrace{(m+1)}_{a}x^2 \underbrace{-4}_{b}x \underbrace{+1}_{c} = 0$$

شرط ریشه‌ی مضاعف‌داشتن:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(m+1)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 16 - 4(m+1) = 0 \Rightarrow 16 - 4m - 4 = 0 \Rightarrow -4m + 12 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{12}{4} = 3$$

حالا که $m = 3$ شد، ریشه‌ی مضاعف را به دست می‌آوریم:

$$x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(m+1)}$$

$$\xrightarrow{m=3} x_{\text{مضاعف}} = \frac{4}{2(3+1)} = \frac{4}{2(4)} = \frac{1}{2}$$

۷۴- گزینه‌ی ۳ اگر تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یعنی دو ریشه با هم برابرند. پس معادله‌ی $ax^2 - 12x + 9 = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و دلتای آن باید صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-12)^2 - 4(a)(9) = 0$$

$$\Rightarrow 144 - 36a = 0 \Rightarrow 36a = 144 \Rightarrow a = \frac{144}{36} = 4$$

پس معادله به صورت $4x^2 - 12x + 9 = 0$ است.

می‌دانیم اگر $\Delta = 0$ باشد، ریشه‌ی مضاعف معادله به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ است، پس در این‌جا داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۷۵- گزینه‌ی ۱ اگر یک عبارت درجه‌دوم، مربع کامل باشد، دلتای آن صفر است! با توجه به نکته‌ی بالا، باید دلتای عبارت $4x^2 + bx + 9$ صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(4)(9) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = \pm\sqrt{144} \Rightarrow b = \pm 12$$

اگر $b = 12$ باشد، عبارت به صورت $4x^2 + 12x + 9$ در می‌آید. ریشه‌های $4x^2 + 12x + 9$، یعنی جواب‌های معادله‌ی زیر:

$$\underbrace{4x^2 + 12x + 9}_{\text{اتحاد مربع}} = 0 \Rightarrow (2x+3)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

حواستان باشد که این معادله دارای دو جواب $x_1 = \frac{-3}{2}$ و $x_2 = \frac{-3}{2}$ است، پس حاصل‌جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{-3}{2} + \frac{-3}{2} = -3$$

اگر $b = -12$ باشد، هر دو ریشه‌ی معادله برابر با $\frac{3}{2}$ می‌شود، پس حاصل‌جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

۷۶- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی درجه‌دومی دارای جواب حقیقی است که در شرط $\Delta \geq 0$ صدق کند. در تمام گزینه‌ها، دلتا را حساب می‌کنیم:

۱) $a = 1, b = -1, c = k \qquad \Delta = (-1)^2 - 4(1)(k) = 1 - 4k$

۲) $a = 1, b = k, c = -1 \qquad \Delta = k^2 - 4(1)(-1) = k^2 + 4$

۳) $a = k, b = -1, c = -1 \qquad \Delta = (-1)^2 - 4(k)(-1) = 1 + 4k$

در بین عبارت‌های $1 - 4k$ ، $k^2 + 4$ و $1 + 4k$، عبارت $k^2 + 4$ همواره مثبت است، پس تنها ۲ در بین گزینه‌ها، به ازای هر مقدار k دارای جواب حقیقی است (مقدار $1 - 4k$ به ازای $k > \frac{1}{4}$ و مقدار $1 + 4k$ به ازای $k < -\frac{1}{4}$، منفی می‌شود و نمی‌توانند همواره مثبت باشند).

عبارت‌هایی که به شکل $ax^{b} + c$ (b: عدد زوج؛ a و c: عدد مثبت) هستند، همواره مثبت‌اند، مثل $2x^2 + 1$، $x^4 + 3$ و ... .

۷۷- گزینه‌ی در معادله‌ی درجه‌دوم به فرم $(x-a)^2=k$ داریم:

(۱) اگر $k>0$ باشد، معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز است (از خاصیت ریشه‌ی زوج استفاده می‌کنیم).

(۲) اگر $k=0$ باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف است $(x=a)$.

(۳) اگر $k<0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد (چون سمت چپ تساوی که همواره نامنفی است، نمی‌تواند با k که عددی منفی است برابر شود).

پس اگر $k>0$ یا $k=0$ باشد، معادله ریشه حقیقی دارد، پس در کل به ازای $k\ge 0$ معادله دارای ریشه‌ی حقیقی است.

۷۸- گزینه‌ی اول دلتا را حساب می‌کنیم:

$$a=k\ ,\ b=-(2k+1)=-2k-1\ ,\ c=k+3$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2k-1)^2-4\underbrace{(k)(k+3)}_{(k^2+3k)}$$

$$=4k^2+4k+1-4k^2-12k=-8k+1$$

برای آن‌که معادله دارای جواب حقیقی باشد، باید $\Delta\ge 0$ باشد، پس:

$$\Delta\ge 0\Rightarrow -8k+1\ge 0\Rightarrow -8k\ge -1\Rightarrow k\le\frac{-1}{-8}\Rightarrow k\le\frac{1}{8}$$

دقت کنید از $-8k\ge -1$ به $k\le\frac{1}{8}$ رسیدیم و جهت نامساوی عوض شد. در نامساوی‌ها هر وقت طرفین را در عدد منفی، ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

۷۹- گزینه‌ی برای آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta<0$ باشد. در معادله‌ی $\underbrace{2a}_{a}x^2\underbrace{-4a}_{b}x+\underbrace{2a+1}_{c}=0$، دلتا را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-4a)^2-\underbrace{4(2a)}_{8a}(2a+1)=16a^2-8a(2a+1)$$

$$=16a^2-16a^2-8a=-8a$$

حالا شرط $\Delta<0$ را اعمال می‌کنیم:

$$\Delta<0\Rightarrow -8a<0\Rightarrow 8a>0\Rightarrow a>0$$

۸۰- گزینه‌ی کلاً وقتی در مورد تعداد جواب بحث می‌شود باید برویم سراغ Δ. پس اول Δ را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{3}_{a}x^2+\underbrace{a}_{b}x\underbrace{-3}_{c}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=a^2-4(3)(-3)=a^2+36$$

برای این‌که معادله‌ی درجه‌دوم دو جواب حقیقی و متمایز داشته باشد باید شرط $\Delta>0$ را داشته باشد. از آن‌جایی که عبارت a^2+36 عبارتی همواره مثبت است، پس شرط $\Delta>0$ همواره برقرار است. یعنی به ازای هر مقدار a، دلتای معادله مثبت است.

۸۱- گزینه‌ی ضرایب معادله را می‌نویسیم:

$$a=3\ ,\ b=-7\ ,\ c=-2$$

مجموع ریشه‌ها برابر است با: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{(-7)}{3}=\frac{7}{3}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با: $P=\frac{c}{a}=-\frac{2}{3}$

نسبت P به S را به دست می‌آوریم: $\frac{P}{S}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}}=-\frac{2\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times 7}=-\frac{2}{7}$

۸۲- گزینه‌ی در معادله‌ی $2x^2+(3k-1)x+(k+1)=0$

ضرایب عبارت‌اند از: $a=2\ ,\ b=3k-1\ ,\ c=k+1$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با ۳ است، پس:

$$P=\frac{c}{a}\Rightarrow 3=\frac{k+1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}k+1=6\Rightarrow k=5$$

۸۳- گزینه‌ی معادله را استاندارد می‌کنیم و ضرایب را می‌نویسیم:

$$2x(x-1)=8\Rightarrow 2x^2-2x=8\Rightarrow 2x^2-2x-8=0$$

ضرایب عبارت‌اند از: $a=2\ ,\ b=-2\ ,\ c=-8$

اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 بنامیم، سؤال مجموع معکوس ریشه‌ها یعنی $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ را می‌خواهد که با مخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{S}{P}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-\frac{(-2)}{2}}{\frac{-8}{2}}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$$

۸۴- گزینه‌ی همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌دوم برابر با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است:

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-8)^2-4(3)(-3)}}{|3|}$$

$$=\frac{\sqrt{64+36}}{3}=\frac{\sqrt{100}}{3}=\frac{10}{3}$$

۸۵- گزینه‌ی برای محاسبه‌ی $x_1^2+x_2^2$ از اتحاد مربع کمک می‌گیریم:

$$x_1^2+x_2^2=(\underbrace{x_1+x_2}_{S})^2-2\underbrace{x_1x_2}_{P}=S^2-2P$$

پس لازم است S و P را حساب کنیم:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-6)}{3}=2\qquad P=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

حالا $S=2$ و $P=\frac{2}{3}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=2^2-2(\frac{2}{3})=4-\frac{4}{3}=\frac{12-4}{3}=\frac{8}{3}$$

۸۶- گزینه‌ی اگر دو عدد معکوس هم باشند (مثل $\frac{2}{5},\frac{5}{2}$)، حاصل‌ضربشان حتماً ۱ است، پس باید دنبال معادله‌ای باشیم که حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر یک باشد $(P=1)$:

$$P=1\Rightarrow\frac{c}{a}=1\Rightarrow c=a$$

پس می‌توانیم نکته‌ی زیر را داشته باشیم:

اگر در معادله‌ی درجه‌دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، دو مقدار a و c برابر باشند $(a=c)$، آن‌گاه ریشه‌های معادله، معکوس یکدیگرند.

این ویژگی فقط در معادله‌ی (۲) وجود دارد.

۸۷- گزینه‌ی ۱ این سؤال یک راه‌حل کلی دارد که اول با جای‌گذاری $x=-۴$، مقدار a را به دست می‌آوریم. بعد با جای‌گذاری a، معادله را با هر روشی که دوست داریم حل می‌کنیم تا ریشه‌هایش به دست آید. یکی از این ریشه‌ها قطعاً -۴ است و ریشه‌ی دیگر همان جواب موردنظر سؤال است. اما این‌جا می‌توانیم با کمی زرنگی، سؤال را راحت‌تر حل کنیم. اول S و P را تشکیل می‌دهیم:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-a)}{۷}=\frac{a}{۷}\ ,\ P=\frac{c}{a}=\frac{۳۵}{۷}=۵$$

پس P را داریم. از آن‌جایی که یکی از ریشه‌ها -۴ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۵ است، می‌توانیم ریشه‌ی دیگر را هم به دست آوریم:

$$P=۵ \Rightarrow x_۱x_۲=۵ \Rightarrow (-۴)(x_۲)=۵ \Rightarrow x_۲=\frac{۵}{-۴}=-\frac{۵}{۴}$$

۸۸- گزینه‌ی ۳ ضرایب معادله‌ی $x^{۲}-۳kx+۲k+۲=۰$ را می‌نویسیم: $a=۱\ ,\ b=-۳k\ ,\ c=۲k+۲$

حاصل‌ضرب (P) و حاصل‌جمع (S) ریشه‌ها با هم برابر است، پس:

$$P=S \Rightarrow \frac{c}{\cancel{a}}=\frac{-b}{\cancel{a}} \Rightarrow c=-b$$

$$\Rightarrow ۲k+۲=-(-۳k) \Rightarrow ۲k+۲=۳k \Rightarrow k=۲$$

معادله را با $k=۲$ بازنویسی می‌کنیم:

$$x^{۲}-۳kx+۲k+۲=۰$$

$$\xrightarrow{k=۲} x^{۲}-\underbrace{۳(۲)}_{۶}x+\underbrace{۲(۲)+۲}_{۶}=۰ \Rightarrow x^{۲}-۶x+۶=۰$$

معادله را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۶)^{۲}-۴(۱)(۶)=۳۶-۲۴=۱۲$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۶)\pm\sqrt{۱۲}}{۲(۱)}=\frac{۶\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲(۳\pm\sqrt{۳})}{۲}=۳\pm\sqrt{۳}$$

پس ریشه‌ی کوچک‌تر معادله $۳-\sqrt{۳}$ است.

۸۹- گزینه‌ی ۲ ضرایب معادله را می‌نویسیم: $a=۶$، $b=k+۱$ و $c=k$، مجموع ریشه‌ها $\frac{۱}{۶}$ است، پس:

$$\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها}: S=\frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۶}}=\frac{-(k+۱)}{\cancel{۶}}$$

$$\Rightarrow ۱=-k-۱ \Rightarrow k=-۲$$

معادله را با $k=-۲$ بازنویسی می‌کنیم:

$$۶x^{۲}+(k+۱)x+k=۰$$

$$\xrightarrow{k=-۲} ۶x^{۲}+(-۲+۱)x-۲=۰ \Rightarrow ۶x^{۲}-x-۲=۰$$

معادله‌ی بالا را با روش کلی حل می‌کنیم: $a=۶\ ,\ b=-۱\ ,\ c=-۲$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۱)^{۲}-۴(۶)(-۲)=۱+۴۸=۴۹$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱\pm\sqrt{۴۹}}{۲(۶)}=\frac{۱\pm۷}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۱+۷}{۱۲}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳} \\ x_۲=\frac{۱-۷}{۱۲}=\frac{-۶}{۱۲}=\frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

پس ریشه‌ی مثبت معادله $x_۱=\frac{۲}{۳}$ است.

۹۰- گزینه‌ی ۱ اول ضرایب معادله را می‌نویسیم: $a=۲$، $b=k$ و $c=۱-k$ و حاصل‌ضرب دو ریشه برابر ۵ است، پس:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{c}{a} \Rightarrow ۵=\frac{۱-k}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۰=۱-k \Rightarrow k=-۹$$

حالا معادله را با $k=-۹$ بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^{۲}+kx+۱-k=۰ \xrightarrow{k=-۹} ۲x^{۲}-۹x+۱-(-۹)=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۹x+۱۰=۰$$

معادله‌ی بالا را با روش کلی حل می‌کنیم: $a=۲\ ,\ b=-۹\ ,\ c=۱۰$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۹)^{۲}-۴(۲)(۱۰)=۸۱-۸۰=۱$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۹\pm\sqrt{۱}}{۲(۲)}=\frac{۹\pm۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۹+۱}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵ \\ x_۲=\frac{۹-۱}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲ \end{cases}$$

پس ریشه‌ی بزرگ‌تر $x_۱=۲/۵$ است.

۹۱- گزینه‌ی ۴ اگر دو عدد معکوس هم باشند (مثل $\frac{۵}{۲},\frac{۲}{۵}$) حتماً ضربشان یک است، پس در این‌جا هم که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم معکوس هم هستند، حاصل‌ضربشان برابر یک است. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم برابر با $\frac{c}{a}$ بود.

$$۲x^{۲}+۳mx+۲m+۶=۰ \Rightarrow a=۲\ ,\ b=۳m\ ,\ c=۲m+۶$$

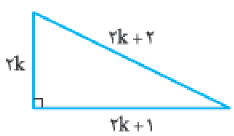
$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=۱ \Rightarrow \frac{c}{a}=۱ \Rightarrow \frac{۲m+۶}{۲}=۱ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲m+۶=۲$$

$$\Rightarrow ۲m=-۴ \Rightarrow m=-۲$$

حالا سؤال مجموع دو ریشه را می‌خواهد که برابر است با:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: S=\frac{-b}{a}=\frac{-۳m}{۲}=\frac{-۳(-۲)}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۹۲- گزینه‌ی ۴ بین سه عدد $۲k$، $۲k+۱$ و $۲k+۲$، عدد $۲k+۲$ از بقیه بزرگ‌تر است، پس وتر $۲k+۲$ است. رابطه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$(۲k+۲)^{۲}=(۲k+۱)^{۲}+(۲k)^{۲}$$

$$\Rightarrow (۲k)^{۲}+۲(۲k)(۲)+۲^{۲}=(۲k)^{۲}+۲(۲k)(۱)+۱^{۲}+(۲k)^{۲}$$

$$\Rightarrow \cancel{۴k^{۲}}+۸k+۴=\cancel{۴k^{۲}}+۴k+۱+۴k^{۲}$$

$$\Rightarrow \underline{۴k^{۲}}+\underline{\underline{۴k}}+۱-\underline{\underline{۸k}}-۴=۰ \Rightarrow ۴k^{۲}-۴k-۳=۰$$

برای حل معادله‌ی درجه‌دوم بالا اول دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۴)^{۲}-۴(۴)(-۳)=۱۶-(-۴۸)=۶۴$$

حالا با جای‌گذاری در فرمول کلی، مقدار مجهول (k) را به دست می‌آوریم:

$$k=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۴)\pm\sqrt{۶۴}}{۲(۴)}=\frac{۴\pm ۸}{۸}\Rightarrow\begin{cases}k_۱=\frac{۴+۸}{۸}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}\\ k_۲=\frac{۴-۸}{۸}=\frac{-۴}{۸}=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

$k=\frac{-۱}{۲}$ باعث می‌شود یکی از اضلاع مثلث (یعنی ۲k) عددی منفی شود، پس قابل‌قبول نیست و فقط $k=\frac{۳}{۲}$ قابل‌قبول است.

سؤال اندازه‌ی وتر را می‌خواهد: $\text{وتر}=۲k+۲=۲(\frac{۳}{۲})+۲=۳+۲=۵$

۹۳- گزینه‌ی ۳ عدد مثبت گفته‌شده در سؤال را x می‌گیریم. حاصل‌ضرب این عدد مثبت در خودش (یعنی x.x یا همان $x^۲$) از سه برابر آن (یعنی ۳x)، ۴۰ واحد بیشتر است، پس:

$$x^۲-۳x=۴۰\Rightarrow x^۲-۳x-۴۰=۰$$

سمت چپ تساوی بالا را به راحتی می‌توان با اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه کرد، پس معادله‌ی بالا را با روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$x^۲-۳x-۴۰=۰\xrightarrow[\text{این دو عدد عبارت‌اند از ۸- و ۵+}]{\text{۲تا عدد که جمعشون ۳- و ضربشون ۴۰- باشه}}(x-۸)(x+۵)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۸ ✓\\ x=-۵ ✗ \text{(سؤال گفته عدد مثبت!)}\end{cases}$$

۹۴- گزینه‌ی ۱ عدد موردنظر را x می‌گیریم. مربع دو برابر این عدد (یعنی $(۲x)^۲$ یا $۴x^۲$) از ۱۲ برابر آن (یعنی ۱۲x)، ۹ واحد کم‌تر است، پس:

$$۴x^۲=۱۲x-۹$$

معادله‌ی به دست آمده را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$۴x^۲=۱۲x-۹\Rightarrow ۴x^۲-۱۲x+۹=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱۲)^۲-۴(۴)(۹)=۱۴۴-۱۴۴=۰$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱۲)\pm\sqrt{۰}}{۲(۴)}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

معکوس $\frac{۳}{۲}$ برابر است با $\frac{۲}{۳}$.

۹۵- گزینه‌ی ۲ یک عبارت گویا به ازای ریشه‌های مخرج (اعدادی که مخرج کسر را صفر می‌کنند) تعریف نشده است، پس کافیه مخرج را مساوی صفر قرار دهیم و معادله را حل کنیم:

$$\text{مخرج کسر}=۰\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰$$

معادله‌ی به دست آمده را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۳)^۲-۴(۱)(-۴)=۹-(-۱۶)=۹+۱۶=۲۵$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۳)\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۱)}=\frac{۳\pm ۵}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۳+۵}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴\\ x_۲=\frac{۳-۵}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱\end{cases}$$

پس این عبارت گویا به ازای $\{۴,-۱\}$ تعریف نشده است.

۹۶- گزینه‌ی ۳ با یک معادله‌ی توانی روبه‌رو هستیم. اول پایه‌های دو طرف را یکسان می‌کنیم. فقط کافیه $\frac{۱}{۵}$ را به صورت $۵^{-۱}$ بنویسیم:

$$۵^{۹x^۲-۶x}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow ۵^{۹x^۲-۶x}=۵^{-۱}$$

$$\xrightarrow[\text{توان‌ها هم برابرند}]{\text{پایه‌ها برابرند، پس}}۹x^۲-۶x=-۱\Rightarrow ۹x^۲-۶x+۱=۰$$

به یک معادله‌ی درجه‌دوم رسیدیم که به روش تجزیه به راحتی حل می‌شود:

$$\underbrace{۹x^۲-۶x+۱}_{\text{اتحاد مربع}}=۰\Rightarrow(۳x-۱)^۲=۰\Rightarrow ۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

۹۷- گزینه‌ی ۲ طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم. محیط مستطیل برابر با ۵۴ است، پس:

$$۲\times(\text{عرض}+\text{طول})=۵۴\Rightarrow \cancel{۲}(x+y)=\overset{۲۷}{\cancel{۵۴}}\Rightarrow x+y=۲۷$$

مساحت مستطیل برابر با ۱۸۰ است، پس:

$$\text{طول}\times\text{عرض}=۱۸۰\Rightarrow xy=۱۸۰$$

از معادله‌ی $x+y=۲۷$ می‌توان y را برحسب x نوشت: $y=۲۷-x$ و آن را در معادله‌ی دوم جای‌گذاری کرد:

$$xy=۱۸۰\xrightarrow{y=۲۷-x}x(۲۷-x)=۱۸۰\Rightarrow ۲۷x-x^۲=۱۸۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲۷x+۱۸۰=۰$$

معادله‌ی درجه‌دوم بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۷)^۲-۴(۱)(۱۸۰)=۷۲۹-۷۲۰=۹$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۲۷)\pm\sqrt{۹}}{۲(۱)}=\frac{۲۷\pm ۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۲۷-۳}{۲}=\frac{۲۴}{۲}=۱۲\\ x_۲=\frac{۲۷+۳}{۲}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵\end{cases}$$

دو عدد برای طول به دست آمد. به ازای هر کدام مقدار عرض را از رابطه‌ی $y=۲۷-x$ به دست می‌آوریم:

اگر $x=۱۲$ باشد $\Rightarrow \text{عرض}=۲۷-۱۲=۱۵$

اگر $x=۱۵$ باشد $\Rightarrow \text{عرض}=۲۷-۱۵=۱۲$

پس اختلاف طول و عرض برابر است با: $۱۵-۱۲=۳$.

۹۸- گزینه‌ی ۲ مساحت مربع برابر است با مجموع مساحت مستطیل و قسمت رنگی:

$$\text{مساحت قسمت رنگی}+\text{مساحت مستطیل}=\text{مساحت مربع}$$

$$\Rightarrow ۸۰^۲=x(x+۲۰)+۴۹۰۰\Rightarrow ۶۴۰۰=x^۲+۲۰x+۴۹۰۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۲۰x+۴۹۰۰-۶۴۰۰=۰\Rightarrow x^۲+۲۰x-۱۵۰۰=۰$$

معادله‌ی بالا را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۲۰^۲-۴(۱)(-۱۵۰۰)=۴۰۰-(-۶۰۰۰)=۶۴۰۰$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-20\pm\sqrt{6400}}{2(1)}=\frac{-20\pm80}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-20+80}{2}=\frac{60}{2}=30\ \checkmark\\ x_2=\frac{-20-80}{2}=\frac{-100}{2}=-50\ \times\ \text{(ضلع نمی‌تواند منفی باشد)}\end{cases}$$

۹۹- گزینه‌ی ۱

$$\text{مساحت مستطیل}=\text{طول}\times\text{عرض}=(3x+2)(2x-1)$$

$$=(3x)(2x)-(3x)(1)+2(2x)-2(1)=6x^2-3x+4x-2$$

$$=6x^2+x-2$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{2}=\frac{\cancel{2}x(3x+6)}{\cancel{2}}=3x^2+6x$$

سؤال گفته مساحت مستطیل و مثلث برابر است، پس:

$$6x^2+x-2=3x^2+6x$$

$$\Rightarrow \underline{6x^2}+\underline{x}-2-\underline{3x^2}-\underline{6x}=0\Rightarrow 3x^2-5x-2=0$$

معادله‌ی درجه‌دوم به دست آمده را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(3)(-2)=25-(-24)=49$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2(3)}=\frac{5\pm7}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5+7}{6}=\frac{12}{6}=2\ \checkmark\\ x_2=\frac{5-7}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}\ \times\ \text{(باعث می‌شه ارتفاع مثلث منفی بشه)}\end{cases}$$

حالا با $x=2$، طول و عرض مستطیل را حساب می‌کنیم:

$$\text{طول}=3x+2=3(2)+2=6+2=8$$

$$\text{عرض}=2x-1=2(2)-1=4-1=3$$

$$\text{محیط مستطیل}=2\times(\text{طول}+\text{عرض})=2(8+3)=2(11)=22$$

۱۰۰- گزینه‌ی ۲ اگر یک عبارت درجه‌دوم مربع کامل باشد، حتماً دلتای آن صفر است. پس برای عبارت درجه‌دوم $\underbrace{(k-1)}_{a}x^2\overbrace{+2k}^{b}x\underbrace{+4}_{c}$ باید $\Delta=0$ باشد:

$$\Delta=0\Rightarrow b^2-4ac=0\Rightarrow(2k)^2-4(k-1)(4)=0$$

$$\Rightarrow 4k^2-16(k-1)=0\Rightarrow 4k^2-16k+16=0$$

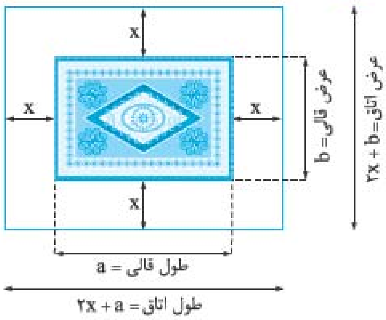
$$\xrightarrow{\text{طرفین را به ۴ تقسیم می‌کنیم}} k^2-4k+4=0$$

معادله‌ی درجه‌دوم به دست آمده به روش تجزیه به راحتی حل می‌شود:

$$\underbrace{k^2-4k+4}_{\text{اتحاد مربع}}=0\Rightarrow(k-2)^2=0\Rightarrow k-2=0\Rightarrow k=2$$

پس مقدار $\sqrt{k}$ برابر است با $\sqrt{2}$.

۱۰۱- گزینه‌ی ۱ اول یه شکل برای سؤال می‌کشیم!



فاصله‌ی هر طرف قالی از دیوار را x و طول و عرض قالی را به ترتیب a و b می‌گیریم.

$$\text{محیط قالی}=12\Rightarrow\overset{1}{\cancel{2}}(a+b)=\overset{6}{\cancel{12}}\Rightarrow a+b=6$$

$$\text{محیط اتاق}=20\Rightarrow\overset{1}{\cancel{2}}((2x+a)+(2x+b))=\overset{10}{\cancel{20}}$$

$$\Rightarrow\underline{2x}+a+\underline{2x}+b=10\Rightarrow 4x+\underbrace{a+b}_{6}=10$$

$$\Rightarrow 4x+6=10\Rightarrow 4x=4\Rightarrow x=1$$

$$\text{مساحت اتاق}=24\Rightarrow(2x+a)(2x+b)=24$$

$$\xrightarrow{x=1}(2+a)(2+b)=24\Rightarrow 4+\underbrace{2b+2a}_{2(b+a)}+ab=24$$

$$\Rightarrow 4+2\underbrace{(b+a)}_{6}+ab=24\Rightarrow 4+12+ab=24$$

$$\Rightarrow 16+ab=24\Rightarrow\underbrace{ab}_{\text{مساحت قالی}}=24-16=8$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۲ اختلاف مربع $\frac{3}{7}$ از خود $\frac{3}{7}$ برابر است با:

$$(\frac{3}{7})^2-\frac{3}{7}=\frac{9}{49}-\frac{3}{7}=\frac{9}{49}-\frac{3\times7}{7\times7}=\frac{9}{49}-\frac{21}{49}=\frac{9-21}{49}=\frac{-12}{49}$$

عدد موردنظر را x می‌گیریم. اختلاف مربع این عدد از خود آن عدد برابر است با: x^2-x. که باید با $\frac{-12}{49}$ برابر شود، پس: $x^2-x=\frac{-12}{49}$

با یک معادله‌ی درجه‌دوم روبه‌رو هستیم، اول آن را استاندارد می‌کنیم:

$$x^2-x=\frac{-12}{49}\Rightarrow x^2-x+\frac{12}{49}=0$$

معادله‌ی به دست آمده را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=\frac{12}{49}$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(\frac{12}{49})=1-\frac{48}{49}=\frac{49-48}{49}=\frac{1}{49}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{1}{49}}}{2(1)}=\frac{1\pm\frac{1}{7}}{2}$$

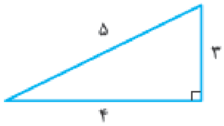
$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1-\frac{1}{7}}{2}=\frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{1}}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}\\ x_2=\frac{1+\frac{1}{7}}{2}=\frac{\frac{8}{7}}{\frac{2}{1}}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}\ \checkmark\end{cases}$$

۱۰۳- گزینه‌ی ۱ اول رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه‌ی داده‌شده می‌نویسیم تا x به دست آید:

$$(x+۳)^۲=(x+۱)^۲+(۲x)^۲ \Rightarrow \cancel{x^۲}+۲(x)(۳)+۳^۲$$
$$=\cancel{x^۲}+۲(x)(۱)+۱^۲+۴x^۲ \Rightarrow ۶x+۹=۲x+۱+۴x^۲$$
$$\Rightarrow ۴x^۲+۲x+۱-۶x-۹=۰$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۴x-۸=۰ \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین را به ۴ تقسیم}} x^۲-x-۲=۰$$

معادله‌ی بالا را به روش تجزیه‌کردن حل می‌کنیم:

$$\underbrace{x^۲-x-۲}_{\text{جمله‌ی مشترک}}=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$



$x=-۱$ قابل‌قبول نیست، چون به ازای آن ضلع ۲x، عددی منفی می‌شود. حالا با $x=۲$ اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم: محیط این مثلث برابر است با: $۳+۴+۵=۱۲$.

۱۰۴- گزینه‌ی ۲ عدد موردنظر را x می‌گیریم.

مربع نصف این عدد (یعنی $(\frac{x}{۲})^۲$ یا $\frac{x^۲}{۴}$) از ۱۲ برابر آن (یعنی ۱۲x)، ۸۱ واحد بیشتر است، پس: $\frac{x^۲}{۴}-۱۲x=۸۱$

معادله‌ی به دست آمده را اول استاندارد می‌کنیم، بعد به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\frac{x^۲}{۴}-۱۲x=۸۱ \xrightarrow{\text{ضرب در ۴}} x^۲-۴۸x=۳۲۴$$
$$\Rightarrow x^۲-۴۸x-۳۲۴=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۴۸)^۲-۴(۱)(-۳۲۴)$$
$$=۲۳۰۴-(-۱۲۹۶)=۲۳۰۴+۱۲۹۶=۳۶۰۰$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۴۸)\pm\sqrt{۳۶۰۰}}{۲(۱)}=\frac{۴۸\pm۶۰}{۲}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۴۸+۶۰}{۲}=\frac{۱۰۸}{۲}=۵۴ \\ x_۲=\frac{۴۸-۶۰}{۲}=\frac{-۱۲}{۲}=-۶ \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط عدد ۵۴ هست. (عدد ۶- هم درست است ولی در گزینه‌ها نیست!)

۱۰۵- گزینه‌ی ۴ بهترین کار طرفین وسطینه!

$$\frac{۲x-۴}{x+۱}=\frac{x+۱}{۲x-۴} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} (۲x-۴)^۲=(x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۶x+۱۶=x^۲+۲x+۱ \Rightarrow ۳x^۲-۱۸x+۱۵=۰$$

مجموع ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم برابر $\frac{-b}{a}$ است، پس:

$$s=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۱۸)}{۳}=۶$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۴ کافیه طرفین را در ۲x ضرب کنیم که هیچ مخرجی باقی نماند:

$$x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲x}} x(۲x)+\frac{۱}{\cancel{x}}(۲\cancel{x})=\frac{۵}{\cancel{۲}}(\cancel{۲}x)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲+۲=۵x \Rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=۰$$

اول دلتا: $\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴(۲)(۲)=۲۵-۱۶=۹$

حالا هم جواب‌ها:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۲(۲)}=\frac{۵\pm۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۵+۳}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲ \\ x_۲=\frac{۵-۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر است با: $\left|۲-\frac{۱}{۲}\right|=\left|\frac{۴-۱}{۲}\right|=\left|\frac{۳}{۲}\right|=\frac{۳}{۲}$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم برابر است با: $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

۱۰۷- گزینه‌ی ۳ مخرج‌ها تجزیه نمی‌شوند. تمام کسرها را در $x(x-۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{۱}{x}=۳ \xrightarrow[x(x-۲)]{\text{طرفین ضرب در}} \frac{x}{\cancel{x-۲}}x(\cancel{x-۲})+\frac{۱}{\cancel{x}}\cancel{x}(x-۲)$$
$$=۳x(x-۲) \Rightarrow x^۲+(x-۲)=۳x(x-۲)$$
$$\Rightarrow x^۲+x-۲=۳(x^۲-۲x) \Rightarrow x^۲+x-۲=۳x^۲-۶x$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۷x+۲=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم برابر با $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$\frac{c}{a}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۱۰۸- گزینه‌ی ۲ مخرج‌ها برابر است، پس مشکلی نیست!

$$\frac{x^۲}{x-۴}-\frac{۲x+۸}{x-۴}=۲x \Rightarrow \frac{x^۲-۲x-۸}{x-۴}=۲x$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۲x(x-۴)=x^۲-۲x-۸$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۸x=x^۲-۲x-۸ \Rightarrow x^۲-۶x+۸=۰$$
$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله‌ی مشترک}} (x-۲)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲ \checkmark \\ x_۲=۴ \times \end{cases}$$

$x=۴$ مخرج کسرهای معادله‌ی اولیه را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست و تنها جواب معادله $x=۲$ است. تفاضل معکوس جواب (یعنی $\frac{۱}{۲}$) از خود جواب (یعنی ۲) برابر است با: $۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۴-۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$

۱۰۹- گزینه‌ی ۲ چون $x=۱$ جواب معادله است، پس آن را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{x+۱}{x+a}=\frac{a}{x} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=۱} \frac{۱+۱}{۱+a}=\frac{a}{۱} \Rightarrow \frac{۲}{۱+a}=\frac{a}{۱}$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a(۱+a)=۲(۱) \Rightarrow a+a^۲=۲ \Rightarrow a^۲+a-۲=۰$$

معادله‌ی درجه‌دوم به دست آمده را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک تجزیه و حل می‌کنیم:

$$a\underbrace{+۱}_{\text{جمع}}a\underbrace{-۲}_{\text{ضرب}}=۰ \Rightarrow (a+۲)(a-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a+۲=۰ \Rightarrow a=-۲ \checkmark \\ a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \checkmark \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده مخرج هیچ‌کدام از کسرهای معادله‌ی $\frac{a}{۱}=\frac{۲}{۱+a}$ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل‌قبول‌اند.