درس دوم : احتمال غیر هم شانس

هر زیر مجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده گوییم.
به طور مثال اگر a عضوی از فضای نمونه‌ای باشد، $\{a\}$ یک پیشامد ساده‌ی آن فضای نمونه‌ای است که احتمال وقوع آن را با $P(\{a\})$ یا به اختصار با $P(a)$ نمایش می دهیم.

تاسی را در نظر بگیرید که روی هر وجه آن یکی از اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است. اگر این تاس را پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای عدد رو آمده $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ است که پیشامدهای ساده آن $\{1\}$ و $\{2\}$ و ... و $\{6\}$ می باشند و احتمال وقوع همگی آنها یکسان و برابر $\frac{1}{6}$ است : $P(1)=P(2)=\dots=P(6)=\frac{1}{6}$
این نوع احتمال را به عنوان احتمال هم شانس معرفی کرده ایم.

این بار تاسی را در نظر بگیرید که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی مانده عدد ۳ مشاهده می شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای عدد رو آمده $S=\{1,2,3\}$ است.
که پیشامدهای ساده آن $\{1\}$ و $\{2\}$ و $\{3\}$ می باشند.
از ۶ وجه، ۳ وجه تاس عدد ۱ است بنابراین: $P(1)=\frac{3}{6}$
از ۶ وجه، ۲ وجه تاس عدد ۲ است پس: $P(2)=\frac{2}{6}$
از ۶ وجه، ۱ وجه تاس عدد ۳ است در نتیجه: $P(3)=\frac{1}{6}$
همان طور که متوجه شدید در این آزمایش احتمال پیشامدهای ساده یکسان نبود، این نوع احتمال معروف به احتمال غیر هم شانس است.

تعریف : هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیر هم شانس گوییم.

قوانین حاکم بر احتمال غیرهم شانس :

در فضای نمونه‌ای متناهی $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ با احتمال غیر هم شانس، اگر $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه‌ی k عضوی S باشه، آنگاه:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(S)=1$
3. $P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$

نتیجه‌ی مهم: جمع احتمال پیشامدهای ساده برابر یک است به عبارت دیگر:

$$P(s_1)+P(s_2)+\dots+P(s_n)=1$$

مثال: با فرض $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ و $P(s_1)=2P(s_2)$ و $P(s_3)=P(s_4)=\frac{1}{4}$ مطلوبست $P(s_1)$ و $P(s_2)$.

گیریم $P(s_2)=x$ و در نتیجه طبق فرض سؤال $P(s_1)=2x$ خواهد شد. بنابراین:

$$\xrightarrow{P(s_1)+P(s_2)+P(s_3)+P(s_4)=1} 2x+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow 3x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{6}$$

در نتیجه $P(s_2)=\frac{1}{6}$ و $P(s_1)=\frac{1}{3}$ خواهد بود.

مثال: در پرتاب یک نوع سکه خاص احتمال پشت آمدن ۳ برابر احتمال رو آمدن است احتمال هرکدام از حالات سکه را حساب کنید.

$S=\{\text{پشت و رو}\}$ و $P(\text{پشت})=3P(\text{رو})$

گیریم $P(\text{رو})=x$ ، در نتیجه $P(\text{پشت})=3x$ خواهد بود و داریم:

$$\xrightarrow{P(\text{پشت})+P(\text{رو})=1} 3x+x=1 \Rightarrow 4x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

بنابراین $P(\text{رو})=\frac{1}{4}$ و $P(\text{پشت})=\frac{3}{4}$ است.

مثال: در یک مسابقه‌ی چهار جانبه فوتبال، تیم‌های a، b، c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a، b و c با هم برابر باشند ولی احتمال قهرمانی تیم d دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هر یک از تیم‌ها را بیابید.

گیریم $P(a)=P(b)=P(c)=x$ و در نتیجه $P(d)=2x$ است.

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=1 \longrightarrow x+x+x+2x=1 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

بنابراین: $P(a)=P(b)=P(c)=\frac{1}{5}$ و $P(d)=\frac{2}{5}$ می‌باشد.

www.Paadars.com

مثال: یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده‌ی اعداد ۲ یا ۳ را حساب کنید.

فرض کنید $P(1)=P(3)=P(5)=x$، در نتیجه $P(2)=P(4)=P(6)=3x$، بنابراین:

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1 \longrightarrow x+3x+x+3x+x+3x=1 \Rightarrow 12x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

لذا می‌توان گفت: $P(\{2,3\})=P(2)+P(3)=3x+x=4x=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

مثال: در یک تجربه‌ی تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

دنباله‌ی حسابی $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ در نظر بگیرید. اگر $P(x)=a$ فرض شود، آن‌گاه $P(y)=a+\frac{1}{4}$ و $P(z)=a+\frac{2}{4}$ بوده و خواهیم داشت:

$$P(x)+P(y)+P(z)=1 \longrightarrow a+a+\frac{1}{4}+a+\frac{2}{4}=1 \Rightarrow 3a=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{12}$$

در نتیجه: $P(x)=\frac{1}{12}$ و $P(y)=\frac{1}{3}$ و $P(z)=\frac{7}{12}$

@sinxcosx ملاسعیدی
09168324500

تمرین (۱) در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\})=\frac{2}{3}$ و $P(\{x,z\})=\frac{1}{2}$، احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

$$P(x)+P(y)=\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad P(x)+P(z)=\frac{1}{2} \xrightarrow{+} P(x)+\underbrace{P(y)+P(x)+P(z)}_{1}=\frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{P(x)+P(y)=2/3} \frac{1}{6}+P(y)=\frac{2}{3} \Rightarrow P(y)=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{P(x)+P(z)=1/2} \frac{1}{6}+P(z)=\frac{1}{2} \Rightarrow P(z)=\frac{1}{3}$$

تمرین (۲) سه اسب a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنید احتمال برد a دو برابر احتمال برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال برد c باشد. احتمال این که a یا b برنده شوند چقدر است؟

$$P(a)=2P(b) \quad \text{و} \quad P(b)=2P(c)$$

گیریم $P(c)=x$ در نتیجه $P(b)=2x$ و $P(a)=4x$ است.

$$\xrightarrow{P(a)+P(b)+P(c)=1} 4x+2x+x=1 \Rightarrow 7x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{7}$$

$$P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=4x+2x=6x=\frac{6}{7}$$

تمرین (۳) دو مرد و سه زن در مسابقه شطرنج با کامپیوتر شرکت دارند و احتمال برنده شدن هر مرد دو برابر احتمال برنده شدن هر زن است.
احتمال این که در این مسابقه یک زن برنده شود چقدر است؟

مردها را m_1 و m_2 و زن‌ها را z_1 و z_2 و z_3 نام‌گذاری می‌کنیم.

با فرض $P(z_1)=P(z_2)=P(z_3)=x$ داریم $P(m_1)=P(m_2)=2x$.

$$\xrightarrow{P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)+P(m_1)+P(m_2)=1} x+x+x+2x+2x=1$$

$$\Rightarrow 7x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow P(\{z_1,z_2,z_3\})=P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)=x+x+x=3x=\frac{3}{7}$$

تمرین (۴) تاسی چنان ساخته شده که احتمال روشدن هر وجه متناسب با عدد روی آن وجه باشد، احتمال رو شدن یک عدد اول چقدر است؟

با توجه به فرض سؤال، اگر $P(1)=x$ آنگاه $P(2)=2x$ ، $P(3)=3x$ و ... و $P(6)=6x$ خواهد بود.

$$\xrightarrow{P(1)+P(2)+\dots+P(6)=1} x+2x+3x+4x+5x+6x=1 \Rightarrow 21x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{21}$$

$$P(\{2,3,5\})=P(2)+P(3)+P(5)=2x+3x+5x=10x=\frac{10}{21}$$

تمرین (۵) اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A)=\frac{2}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را بدست آورید.

$$P(S)=P(B)+P(e) \longrightarrow 1=\frac{3}{5}+P(e) \Rightarrow P(e)=\frac{2}{5}$$

$$P(C)=P(A)+P(e)=\frac{2}{7}+\frac{2}{5}=\frac{24}{35}$$

$$P(C')=1-P(C)=1-\frac{24}{35}=\frac{11}{35}$$

تمرین (۶) فضای نمونه‌ای آزمایشی $S=\{1,2,3,4,5\}$ است. اگر احتمال پیشامدهای ساده $P(i)=\frac{\binom{5}{i}}{n}$ باشد، احتمال اینکه عدد کمتر از ۳ باشد چقدر است؟

$P(1)=\frac{\binom{5}{1}}{n}$, $P(2)=\frac{\binom{5}{2}}{n}$, ... , $P(5)=\frac{\binom{5}{5}}{n} \xrightarrow{+} \frac{\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\dots+\binom{5}{5}}{n}=1$

از طرفی می‌دانیم $\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\dots+\binom{k}{k}=2^k$ است، بنابراین:

$\frac{2^5}{n}=1 \Rightarrow n=32$

احتمال اینکه عدد کمتر از ۳ باشد: $P(\{1,2\})=P(1)+P(2)=\frac{\binom{5}{1}}{n}+\frac{\binom{5}{2}}{n}=\frac{5+10}{n}=\frac{15}{32}$

توجه: در محاسبه‌ی $\binom{5}{5}+\dots+\binom{5}{1}$ می‌توان تک‌تک حاصل هر یک را یافته و جمع نمود

تمرین (۷) یک تاس طوری طراحی شده که احتمال رخ دادن عدد x در آن $\frac{|7-2x|}{a}$ است.
با چه احتمالی این تاس ۵ می‌آید؟

طبق فرض سؤال داریم:

$P(1)=\frac{5}{a}$, $P(2)=\frac{3}{a}$, $P(3)=\frac{1}{a}$, $P(4)=\frac{1}{a}$, $P(5)=\frac{3}{a}$, $P(6)=\frac{5}{a}$

حال مجموع این احتمالات باید برابر ۱ شود:

$\frac{5}{a}+\frac{3}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{3}{a}+\frac{5}{a}=1 \Rightarrow \frac{18}{a}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{18}$

$P(5)=\frac{3}{a}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$

تمرین (۸) چهار دایره هم مرکز به شعاع های ۱، ۲، ۳، ۴ را در نظر بگیرید. اگر احتمال برخورد دارت به هر منطقه متناسب با مساحت آن منطقه باشد، احتمال برخورد دارت به منطقه‌ی ۳ را حساب کنید.

مساحت منطقه اول = مساحت دایره به شعاع ۱ $= 1^2\pi = \pi \longrightarrow P(1) = \pi x$

〃 〃 دوم = (مساحت دایره به شعاع ۲) − (مساحت دایره به شعاع ۱) $= 4\pi - \pi = 3\pi \longrightarrow P(2) = 3\pi x$

〃 〃 سوم = (۳ 〃 〃 〃 〃) − (۲ 〃 〃 〃 〃) $= 9\pi - 4\pi = 5\pi \longrightarrow P(3) = 5\pi x$

〃 〃 چهارم = (۴ 〃 〃 〃 〃) − (۳ 〃 〃 〃 〃) $= 16\pi - 9\pi = 7\pi \longrightarrow P(4) = 7\pi x$

مجموع احتمالات باید برابر ۱ شود:

$$\pi x + 3\pi x + 5\pi x + 7\pi x = 1 \Longrightarrow 16\pi x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{16\pi}$$

بنابراین: $P(3) = 5\pi x = 5\pi \times \frac{1}{16\pi} = \frac{5}{16}$

تمرین (۹) یک محصول غذایی حداکثر بعد از ۵ روز خراب می‌شود.
اگر احتمال خرابی در روز k اُم برابر $x(2k+1)$ محاسبه شده باشد، احتمال آن که این محصول در ۳ روز اول سالم بماند چقدر است؟

طبق فرض مسئله احتمال خرابی در روزهای اول تا پنجم برابر است با:

$P(1) = 3x$ و $P(2) = 5x$ و $P(3) = 7x$ و $P(4) = 9x$ ، $P(5) = 11x$

که مجموع آنها باید برابر ۱ شود:

$$3x + 5x + 7x + 9x + 11x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{35}$$

احتمال خرابی در یکی از روزهای اول تا سوم: $P(\{1,2,3\}) = 3x + 5x + 7x = 15x = \frac{15}{35}$

$\Longrightarrow$ احتمال اینکه محصول در ۳ روز اول سالم بماند $= 1 - \frac{15}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$