بسم الله

ریاضیات پایه

ویژه دانش‌آموزان و داوطلبان کنکور
رشته ریاضی

مؤلف

حسین شفیع‌زاده

دانلود از اپلیکیشن پادرس

پیشگفتار ناشر

افتخار ارائه‌ی خدمات به دانش‌آموزان ممتاز، تیزهوش و المپیادی چند سالی است که نصیب اینجانب و دوستان عزیزم در انتشارات خوشخوان گردیده است. از این بابت خدای متعال را شاکر و سپاسگزارم و از درگاه او استمداد می‌طلبم و امیدوارم ما را از این نعمت دوست‌داشتنی محروم نکند و در این راه دعای خیر شما عزیزان و پاکان می‌تواند ما را به ادامه‌ی کار دلگرم و امیدوار کند.

تالیف کتب برای دانش‌آموزان ممتاز پیش‌دانشگاهی (چهارم دبیرستان) توسط مولفین ممتاز که خود در سنوات گذشته جزء منتخبین المپیادها و نفرات ممتاز کنکور بوده‌اند در این انتشارات از سال ۱۳۸٤ آغاز گشته و تا به امروز ادامه دارد. یکی از این کتاب‌ها کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال و علوم پایه‌ی مرتبط با آن» بود که توسط دوست بسیار عزیزم آقای حسین شفیع‌زاده (نفر ششم کنکور در سال ۱۳٦۷ و نیز نفر شانزدهم المپیاد ریاضی در همان سال) تدوین و تالیف شد و تا به حال ۳۰ بار تجدید چاپ شده است. با تغییر کتاب درسی در یکی دو سال اخیر بر آن شدیم کتب فوق را (که در دو جلد تدوین شده بود) دگرگون کرده و ضمن بالا بردن کیفیت علمی آن، ارائه‌ی پرسش‌های جدید، . . . کیفیت حروفچینی، چاپ، . . . را نیز تا حد ممکن افزایش داده و به‌صورت کتابی رنگی و درخور دانش‌آموزان ممتاز به بازار ارائه دهیم. امیدواریم در این امر در حد مطلوب موفق بوده و بتوانیم دانش‌آموزان ممتاز را در دست‌یابی به منابع مناسب اغنا کنیم.

این کتب در سه جلد که یکی از آن‌ها ریاضیات پایه است تدوین شده‌اند. اگر زحمات شبانه‌روزی مولف گرامی نبود این نیت و امر خدمت‌رسانی به سرانجام نمی‌رسید. جا دارد تقدیر و تشکر صادقانه و خالصانه‌ی خود را از این بزرگوار داشته باشم و همچنین زحمات بی‌دریغ گروه فنی هیمه در امر حروفچینی، رسامی و صفحه‌آرایی چشم‌گیر و درخور تحسین است. از خانم ترقی‌جاه در طراحی جلد و وسواس ایشان در به ثمر رساندن و چشم‌نواز کردن طرح، تشکر می‌شود، دقت نظر دوست گرامی‌ام آقای علی یوسفی در بازبینی و ویرایش کتاب نیز ستودنی است.

از شما معلمان و دانش‌آموزان گرامی هم تقاضا می‌شود عیوب و نقایص کتاب و نیز انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق ایمیل به اطلاع ما برسانید تا در چاپ‌های بعدی کتاب مورد لحاظ قرار گیرند و در مورد این نقایص و نیز نارضایتی‌های احتمالی طلب عفو می‌کنم و امیدوارم با ارائه‌ی کتبی مناسب توانسته باشیم گوشه‌ای از دین خود به خوبان این مرز و بوم را ادا کرده باشیم.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

والسلام علی من اتبع الهدی

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مقدمه مؤلف

به نام هستی بخش

با نگاهی به سوالات کنکور متوجه خواهید شد که دروس پایه چه اهمیت و جایگاه بالایی در بین سوالات دارند.

جدول زیر تعداد سوالات پایه (مرتبط با دیفرانسیل و غیرمشترک با سال چهارم) را نشان می‌دهد.

عنوان سال	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴
تابع	۳	۳	۱	۳	۳	۱
محاسبات جبری	۲	۲	۲	۳	۳	۲
مثلثات	۲	۲	۲	۳	۳	٤
دنباله حسابی و هندسی	۱	۱	۰	۰	۱	۲
لگاریم	۰	۱	۱	۰	۰	۱
آمار	۲	۲	۲	۲	۲	۲

از طرفی توجه دارید که:

۱. دانش‌آموزان در سال‌های اول، دوم و سوم، اهمیت لازم را به درس نمی‌دهند و ساعت مطالعه‌ی آنها بسیار پایین است به‌طوری که بدون شناخت نقاط ضعف خود و با کوله‌باری از مشکلات علمی وارد سال چهارم می‌شوند.

۲. دبیران محترم آنقدر که به درس سال چهارم اهمیت می‌دهند (که با توجه به کمبود وقت حق هم دارند) نمی‌توانند روی دروس پایه تمرکز داشته باشند.

۳. کاربرد مطالب پایه در حل تستهای سال چهارم بسیار زیاد است (بخصوص مثلثات، حل معادله و نامعادله) به‌طوری که به اذعان بسیاری از دانش‌آموزان، هر جا در حل تستهای سال چهارم نیاز به پایه پیدا می‌کنند شدیداً دچار مشکل می‌شوند.

٤. حجیم بودن جزوات و مطالبی که دانش‌آموزان سال دوم و سوم جمع‌آوری کرده‌اند قابل مطالعه و استفاده در سال چهارم نیست.

همه‌ی این دلایل نشان می‌دهد که دانش‌آموزان سال چهارم به یک کتاب ریاضیات پایه به سبک کنکور (نه به سبک دوم و سوم دبیرستان) نیاز دارند.

کتابی که پیش روی شماست با این هدف تالیف شده است.

امیدوارم با مطالعه‌ی این کتاب بتوانید مشکلات پایه‌ای خود را برطرف کنید.

از مدیریت انتشارات خوشخوان، دوست خوبم آقای رسول حاجی‌زاده و همچنین آقای علی یوسفی کمال تشکر را دارم.

پاییز ۹۳

حسین شفیع‌زاده

دانلود از اپلیکیشن پادرس

فهرست مطالب

فصل ۱ محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات ۱

۱.۱	معادله‌ی درجه‌ی اول	۱
۲.۱	معادله‌ی درجه دوم	۱
۳.۱	نمودار تابع درجه دوم	۷
۴.۱	یافتن ماکزیمم و می‌نیمم درجه ۲	۹
۵.۱	تمرین	۱۱
۶.۱	معادلات قابل تبدیل به درجه ۲	۱۶
۷.۱	معادلات گویا	۱۷
۸.۱	معادلات گنگ	۱۸
۹.۱	حل معادلات به روش هندسی	۱۸
۱۰.۱	تعیین علامت	۱۹
۱۱.۱	نامعادلات	۲۱
۱۲.۱	تمرین	۲۴
۱۳.۱	خواص قدر مطلق	۲۷
۱۴.۱	رسم توابع قدر مطلقی	۲۸
۱۵.۱	تمرین	۳۲
۱۶.۱	خواص جزء صحیح	۳۴
۱۷.۱	رسم جزء صحیح	۳۵
۱۸.۱	تمرین	۳۸
۱۹.۱	تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری	۴۱
۲۰.۱	بسط دوجمله‌ای	۴۳
۲۱.۱	خواص بسط نیوتن	۴۴
۲۲.۱	مثلث خیام ـ پاسکال	۴۵
۲۳.۱	تمرین	۴۷
۲۴.۱	پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل ۱	۵۰
۲۵.۱	جواب تمرین‌ها	۵۱

فصل ۲ تابع ۷۳

۱.۲	مفهوم تابع، ضابطه‌ی تابع	۷۳
۲.۲	دامنه‌ی تابع	۷۶
۳.۲	برد تابع	۷۹
۴.۲	تمرین	۸۵
۵.۲	رسم تابع	۹۱
۶.۲	اعمال بین توابع	۹۳
۷.۲	ترکیب توابع	۹۴
۸.۲	تمرین	۹۷
۹.۲	توابع زوج و فرد	۱۰۱
۱۰.۲	تابع یک‌به‌یک	۱۰۴
۱۱.۲	تابع معکوس	۱۰۷
۱۲.۲	تمرین	۱۱۱
۱۳.۲	تابع متناوب	۱۱۷
۱۴.۲	تمرین	۱۲۰
۱۵.۲	پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل ۲	۱۲۳
۱۶.۲	جواب تمرین‌ها	۱۲۴

فصل ۳ مثلثات ۱۴۵

۱.۳	دایره مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی	۱۴۵
۲.۳	تابع مثلثاتی	۱۵۰
۳.۳	زوایای ترکیبی	۱۴۹

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۵.۳ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث ۱۵۱
۶.۳ تمرین ۱۵۳
۷.۳ نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ ۱۵۶
۸.۳ نسبت‌های مثلثاتی 2α و 3α ۱۵۸
۹.۳ تبدیل ضرب به جمع و برعکس ۱۶۰
۱۰.۳ تمرین ۱۶۲
۱۱.۳ معادلات مثلثاتی ۱۶۸
۱۲.۳ معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ ۱۶۹
۱۳.۳ تمرین ۱۷۲
۱۴.۳ وارون توابع مثلثاتی ۱۷۶
۱۵.۳ روابط معکوس مثلثاتی ۱۸۱
۱۶.۳ تمرین ۱۸۵
۱۷.۳ پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل ۳ ۱۸۸
۱۸.۳ جواب تمرین‌ها ۱۸۹

فصل ۴ دنباله‌های حسابی و هندسی ۲۰۷

۱.۴ دنباله‌ی حسابی ۲۰۷
۲.۴ دنباله‌ی هندسی ۲۱۰
۳.۴ دنباله‌ی تقریبات اعشاری ۲۱۴
۴.۴ تمرین ۲۱۶
۵.۴ پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل ۴ ۲۲۲
۶.۴ جواب تمرین‌ها ۲۲۳

فصل ۵ توابع نمایی و لگاریتمی ۲۳۱

۱.۵ تابع نمایی ۲۳۱
۲.۵ تابع لگاریتمی ۲۳۳
۳.۵ تمرین ۲۳۷
۴.۵ پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل ۵ ۲۴۱
۵.۴ جواب تمرین‌ها ۲۴۲

فصل ۶ آمار ۲۴۷

۱.۶ اندازه‌گیری، مدل‌سازی، جامعه، نمونه و متغیرهای تصادفی ۲۴۹
۲.۶ دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی ۲۵۱
۳.۶ نمودارها ۲۵۳
۴.۶ نمودارها ۲۵۴
۵.۶ شاخص‌های مرکزی ۲۵۷
۶.۶ شاخص‌های پراکندگی ۲۵۸
۷.۶ تمرین ۲۶۲
۸.۶ پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل ۶ ۲۷۰
۹.۶ جواب تمرین‌ها ۲۷۱

فصل ۷ آزمون‌ها ۲۷۷

دانلود از اپلیکیشن پادرس

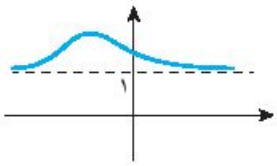
۱ محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

جلسه اول: معادلات درجه اول و دوم

۱.۱ معادله‌ی درجه‌ی اول

معادله‌ی $ax+b=0$ با فرض $a\neq 0$ درجه اول است که جواب آن به صورت $x=-\frac{b}{a}$ است. دقت کنید خط $y=ax+b$ در نقطه‌ی $x=-\frac{b}{a}$ محور xها را قطع می‌کند. اگر $a=0$ و $b\neq 0$ آن‌گاه معادله‌ی $ax+b=0$ جواب ندارد.

تست ۱. نمودار $y=\frac{x^2+ax+3}{x^2+x+2}$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) -1

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

نمودار تابع خط $y=1$ را قطع نکرده است پس معادله‌ی $\frac{x^2+ax+3}{x^2+x+2}=1$ جواب ندارد.

$$\frac{x^2+ax+3}{x^2+x+2}=1 \Rightarrow x^2+ax+3=x^2+x+2$$
$$(a-1)x=-1$$

به ازای $a=1$ معادله‌ی آخر جواب ندارد.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲.۱ معادله‌ی درجه دوم

معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ با فرض $a\neq ۰$ درجه دوم است. با فرض $\Delta=b^۲-۴ac$ سه حالت برای تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم وجود دارد:

۱) $\Delta>۰ \rightarrow$ دو ریشه دارد $\rightarrow x_۱,x_۲=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲) $\Delta=۰ \rightarrow$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد $\rightarrow x_۱=x_۲=-\dfrac{b}{۲a}$

۳) $\Delta<۰ \rightarrow$ ریشه ندارد

تست ۲. هر دو معادله‌ی $x^۲+ax+۱=۰$ و $x^۲+bx+۱=۰$ فاقد جواب‌اند. حاصل ab کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) -۱۰

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

در هر دو معادله Δ منفی است پس:

$$\begin{cases}\Delta_۱=a^۲-۴\rightarrow a^۲-۴<۰\rightarrow a^۲<۴\\ \Delta_۲=b^۲-۴\rightarrow b^۲-۴<۰\rightarrow b^۲<۴\end{cases}\rightarrow a^۲b^۲<۱۶\rightarrow |ab|<۴$$

تست ۳. معادله‌ی $k(x+۱)(x+۴)=۹x$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. حدود k کدام است؟

۱) $۱<k<۹$ ۲) $k<۱$ یا $k>۹$ ۳) $-۳<k<۳$ ۴) $k<-۳$ یا $k>۳$

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

$$k(x+۱)(x+۴)=۹x\rightarrow k(x^۲+۵x+۴)=۹x$$
$$\rightarrow kx^۲+(۵k-۹)x+۴k=۰$$
$$\Delta=(۵k-۹)^۲-۱۶k^۲=۹k^۲-۹۰k+۸۱=۹(k^۲-۱۰k+۹)$$

باید $\Delta>۰$ باشد در نتیجه:

$$\Delta=۹(k-۱)(k-۹)>۰\rightarrow k<۱ \text{ یا } k>۹$$

نکته ۱ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های $ax^۲+bx+c=۰$ باشند آن‌گاه:

$$ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

و اگر $x_۱$ ریشه‌ی مضاعف $ax^۲+bx+c=۰$ باشد آن‌گاه:

$$ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)^۲$$

دقت کنید که در حالت کلی‌تر اگر $x_۱$ یک ریشه‌ی چندجمله‌ای $p(x)$ باشد آن‌گاه $p(x)=(x-x_۱)q(x)$.

مثال ۱ معادله‌ی $۰=b$ [illegible] کنید.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

حل. ریشه‌ی $x=1$ را در معادله صدق می‌دهیم:

$$x^3-4x^2+ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 1-4+a+b=0 \rightarrow b=3-a$$
$$x^3-4x^2+ax+b=x^3-4x^2+ax+3-a=(x-1)(x^2-3x-3+a)$$

برای آن‌که معادله دو ریشه داشته باشد یا باید $x=1$ مجدداً ریشه‌ی پرانتز دوم باشد و یا پرانتز دوم ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$x^2-3x-3+a=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1-3-3+a=0 \rightarrow a=5 \\ \Delta=0 \rightarrow 9+12-4a=0 \rightarrow a=\frac{21}{4} \end{cases}$$

نکته ۲ در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+b+c=0$ آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. هم‌چنین اگر $a+c=b$ آنگاه یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

در حالت کلی‌تر اگر مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای برابر صفر باشد یکی از ریشه‌های آن ۱ است. به طور مثال $x=1$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^3+3x^2+5x-9=0$ می‌باشد.

نکته ۳ اگر a و c هم‌علامت نباشند حتماً معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه‌ی متمایز دارد.

روابط بین ریشه‌ها و ضرایب

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

نکته ٤

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$
$$p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

تست ٤. به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x+2m-1=0$ رابطه‌ی $\alpha+2\beta=5$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=5 \\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} \beta=3 \rightarrow \alpha=-1$$
$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \rightarrow -3=2m-1 \rightarrow m=-1$$

مثال ۲ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، k برابر دیگری است. حاصل $\frac{ac}{b^2}$ را بیابید.

حل.

$$\alpha=k\beta$$
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \rightarrow k\beta+\beta=-\frac{b}{a} \rightarrow \beta=\frac{-b}{(k+1)a}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

β را در معادله‌ی صدق می‌دهیم.

$$ax^2+bx+c=0 \to a\left(\frac{-b}{a(k+1)}\right)^2+b\left(\frac{-b}{a(k+1)}\right)+c=0$$
$$\to \frac{b^2}{a(k+1)^2}-\frac{b^2}{a(k+1)}+c=0 \to \frac{b^2-b^2(k+1)}{a(k+1)^2}=-c$$
$$\to b^2(1-k-1)=-ac(k+1)^2 \to kb^2=ac(k+1)^2 \to \frac{ac}{b^2}=\frac{k}{(k+1)^2}$$

تست ۵. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2+mx+24=0$ سه برابر مربع ریشه‌ی دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -11 ۴) -15

پاسخ: ✓ ۲ ۳ ۴

$$\alpha=3\beta^2 \xrightarrow{\text{ضرب در } \beta} \alpha\beta=3\beta^3 \to 24=3\beta^3 \to \beta=2$$

$\beta=2$ را در معادله صدق می‌دهیم.

$$x^2+mx+24=0 \xrightarrow{\beta=2} 4+2m+24=0 \to m=-14$$

تست ۶. ریشه‌های معادله‌ی $25x^2+mx+12=0$ برابر سینوس و کسینوس یک زاویه است. مقدار m کدام است؟

۱) ± 7 ۲) ± 14 ۳) ± 35 ۴) ± 28

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ آنگاه

$$\begin{cases} x_1x_2=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25} \\ x_1+x_2=\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{m}{25} \end{cases}$$

دو طرف تساوی دوم را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\left(\frac{m}{25}\right)^2 \to 1+2\left(\frac{12}{25}\right)=\left(\frac{m}{25}\right)^2$$
$$\to \frac{49}{25}=\left(\frac{m}{25}\right)^2 \to \pm\frac{7}{5}=\frac{m}{25} \to m=\pm 35$$

✓ **نکته ۵** اگر α و β ریشه‌ای معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند به طوری که $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=s^2-2p$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=s^3-3ps$$
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال ۳ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+۳x-۲=۰$ باشند حاصل عبارت‌های $\alpha^۲+\beta^۲$، $\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}$، $\alpha^۳-\frac{۸}{\alpha^۳}$ را بیابید.

حل. دقت کنید $s=-۳$ و $p=-۲$ پس:

$$۱)\ \alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p=۹+۴=۱۳$$

$$۲)\ \frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{s^۲-۲p}{P^۲}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$۳)\ \alpha^۳-\frac{۸}{\alpha^۳}=\alpha^۳+(\frac{-۲}{\alpha})^۳=\alpha^۳+\beta^۳=s^۳-۳ps=-۲۷-۱۸=-۴۵$$

تست ۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند حاصل $(\alpha^۳-۳\alpha^۲+۲)(۲-\beta)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓

α ریشه‌ی معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha^۲-۳\alpha+۱=۰\rightarrow\alpha^۲-۳\alpha=-۱\rightarrow\alpha^۳-۳\alpha^۲=-\alpha$$

$$(\alpha^۳-۳\alpha^۲+۲)(۲-\beta)=(-\alpha+۲)(۲-\beta)=۴-۲(\alpha+\beta)+\alpha\beta=۴-۲s+p=۴-۲(۳)+۱=-۱$$

ویژه‌ی علاقه‌مندان: بین ریشه‌های معادله‌ی $a_nx^x+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰=۰$ و ضرایب آن روابط زیر (معروف به روابط ویت) برقرار است:

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-۱}}{a_n}$$

$$x_۱x_۲+x_۱x_۳+\cdots+x_{n-۱}x_n=\frac{a_{n-۲}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_۱x_۲\cdots x_n=(-۱)^n\frac{a_۰}{a_n}$$

در حالت خاص در تابع $ax^۳+bx^۲+cx+d=۰$ بین ریشه‌ها روابط زیر برقرار است:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

در ضمن در معادله‌ی $x^۳+px+q=۰$ با فرض $\Delta=۴p^۳+۲۷q^۲$ داریم:

$\Delta=۰\rightarrow$ یک ریشه‌ی ساده $x=\sqrt[۳]{-۴q}$ و یک ریشه‌ی مضاعف $x=\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$

$\Delta>۰\rightarrow$ یک ریشه‌ی ساده

دانلود از اپلیکیشن پادرس

در حالت $\Delta > 0$ ریشه‌ی ساده از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$x = \left(\frac{-q + \sqrt{\frac{1}{27}\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\frac{1}{27}\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

نوشتن معادله‌ی درجه دوم

فرض کنید α و β دو عدد حقیقی باشند که $s = \alpha + \beta$ و $p = \alpha\beta$ در این صورت معادله‌ی درجه دومی که α و β ریشه‌های آن باشند عبارت است از:

$$x^2 - sx + p = 0$$

مثال ۴ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ باشد.

حل. از فرمول‌های $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ و $2\sin x \cos x = \sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} s = \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2}\sin(45^\circ + 15^\circ) \\ \quad = \sqrt{2}\sin 60^\circ = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ p = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \rightarrow x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

تست ۸. معادله‌ی درجه دومی که هر یک از ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ سه واحد بیش‌تر است، کدام است؟

۱) $x^2 - 41x + 41 = 0$ ۲) $x^2 - 14x + 31 = 0$ ۳) $x^2 - 14x + 41 = 0$ ۴) $x^2 - 41x + 31 = 0$

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

روش اول: فرض کنید α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند در این صورت $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = 2$. می‌خواهیم معادله‌ی درجه دومی بنویسیم که ریشه‌های آن $2\alpha + 3$ و $2\beta + 3$ باشند.

$$\begin{cases} s = (2\alpha + 3) + (2\beta + 3) = 2(\alpha + \beta) + 6 = 2(4) + 6 = 14 \\ p = (2\alpha + 3)(2\beta + 3) = 4\alpha\beta + 6(\alpha + \beta) + 9 = 4(2) + 6(4) + 9 = 41 \end{cases}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \rightarrow x^2 - 14x + 41 = 0$$

روش دوم: اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد آن‌گاه $\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$ به دنبال معادله‌ای هستیم که $x = 2\alpha + 3$ ریشه‌ی آن باشد.

$$x = 2\alpha + 3 \rightarrow \alpha = \frac{x - 3}{2} \xrightarrow{\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0} (\frac{x-3}{2})^2 - 4(\frac{x-3}{2}) + 2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{4} - 2x + 6 + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 14x + 41 = 0$$

نکته ۶ اگر بخواهیم ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

۱. عکس شوند جای a و c را عوض می‌کنیم: $(cx^2 + bx + a = 0)$

۲. قرینه شوند $(ax^2 - bx +$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال ۵ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۷x - ۲ = ۰$ باشند معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{-۱}{\alpha + ۲}$ و $\frac{-۱}{\beta + ۲}$ باشد.

حل. ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌های آن $\alpha + ۲$ و $\beta + ۲$ باشد.

$$x = \alpha + ۲ \to \alpha = x - ۲ \xrightarrow{\alpha^۲ + ۷\alpha - ۲ = ۰} (x-۲)^۲ + ۷(x-۲) - ۲ = ۰$$
$$\to x^۲ + ۳x - ۱۲ = ۰$$

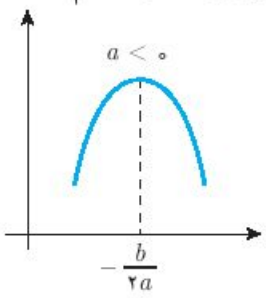
حال ریشه‌های این معادله را عکس و قرینه می‌کنیم. برای این کار جای a و c را عوض می‌کنیم و b را قرینه می‌کنیم:

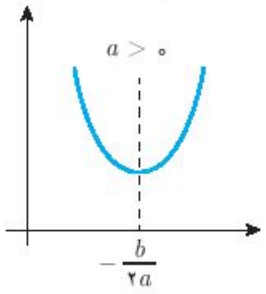
$$x^۲ + ۳x - ۱۲ = ۰ \to -۱۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

نکته ۷ اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ و $Q(x) = a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \cdots + a_{n-۱}x + a_n$ آنگاه ریشه‌های این دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگرند. $Q(x)$ را چندجمله‌ای وارونه $P(x)$ می‌نامیم. (جای ضرایب از اول تا آخر به ترتیب عضو شده است.)
دقت شود که باید $a_۰ \neq ۰$ باشد.

۳.۱ نمودار تابع درجه دوم

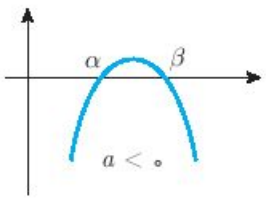
نمودار تابع $y = f(x) = ax^۲ + bx + c$ یک سهمی است که مختصات رأس آن به صورت $x = -\frac{b}{۲a}$ و $y = -\frac{\Delta}{۴a}$ می‌باشد. خط $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است. (اگر خط $y = m$ سهمی را در نقاط A و B قطع کند آنگاه طول نقطه رأس برابر است با: $\frac{x_A + x_B}{۲}$)

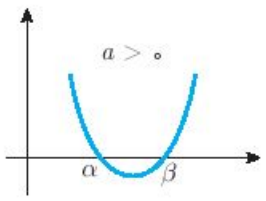




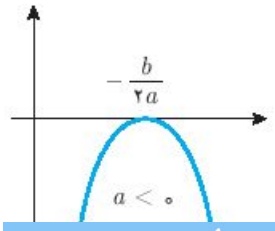
نمودار سهمی نسبت به محور xها سه حالت دارد:

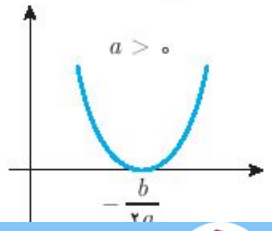
حالت اول: اگر $\Delta > ۰$ آنگاه نمودار سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و معادله‌ی سهمی به صورت $ax^۲ + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ می‌باشد.





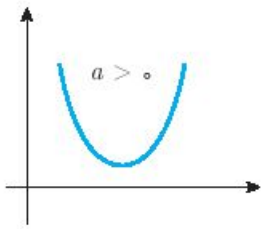
حالت دوم: اگر $\Delta = ۰$ آنگاه نمودار سهمی بر محور xها مماس است و معادله‌ی سهمی به صورت $ax^۲ + bx + c = a(x-\alpha)^۲$ می‌باشد. $(\alpha = -\frac{b}{۲a})$

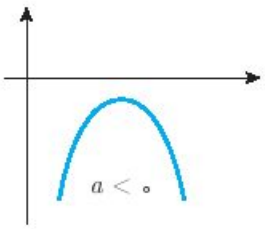




دانلود از اپلیکیشن پادرس

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ آنگاه نمودار سهمی محور xها را قطع نمی‌کند.



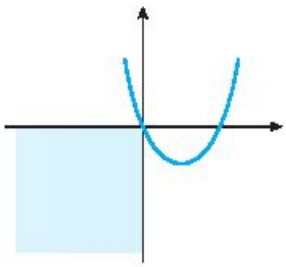


تست ۹. منحنی درجه دوم $y = ax^2 + (a-2)x$ از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $a < 2$ ۲) $0 < a < 2$ ۳) $a > 2$ ۴) $a < 0$

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۳ ۴

اولاً باید a مثبت باشد ثانیاً چون یکی از ریشه‌ها $x = 0$ است ریشه‌ی دیگر باید مثبت باشد.



$$y = x(ax + a - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \ , \ x = \frac{2-a}{a}$$

$$\frac{2-a}{a} > 0 \xrightarrow{a>0} 2 - a > 0 \rightarrow a < 2$$

نکته ۸ بعضی از خواص نمودار $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ عبارت است از:

۱. اگر $a > 0$ حتماً از ناحیه‌ی اول و دوم و اگر $a < 0$ حتماً از ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور می‌کند.

۲. اگر $f(0) = c > 0$ آنگاه از ناحیه‌ی اول و دوم و اگر $c < 0$ آنگاه از ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور می‌کند.

۳. اگر $ac < 0$ (دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد) آنگاه از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

۴. اگر $\Delta < 0$ آنگاه نمودار یا فقط از ناحیه‌ی اول و دوم عبور می‌کند ($a > 0$) و یا فقط از ناحیه‌ی سوم و چهارم ($a < 0$).

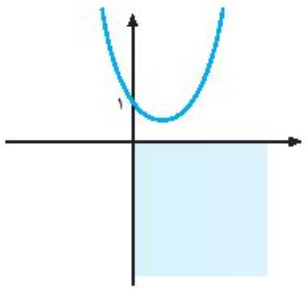
تست ۱۰. نمودار تابع $f(x) = (a+3)x^2 + ax + 1$ از ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات عبور نمی‌کند. مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $a \geq -2$ ۲) $-2 \leq a < 0$ ۳) $-3 < a < -2$ ۴) $-3 < a < 0$

پاسخ: ✓ ۲ ۳ ۴

اولاً باید ضریب x^2 مثبت باشد ثانیاً دو حالت داریم:

۱. معادله‌ی $f(x) = 0$ ریشه ندارد و یا ریشه‌ی مضاعف دارد.

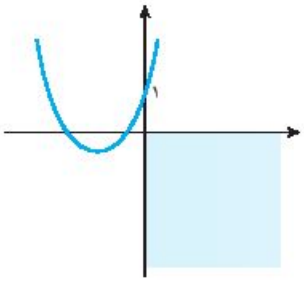


$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \rightarrow a^2 - 4(a+3) \leq 0 \rightarrow a^2 - 4a - 12 \leq 0 \rightarrow -2 \leq a \leq 6 \\ a + 3 > 0 \rightarrow a > -3 \end{cases}$$

در این حالت $6 \leq a \leq -2$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲. معادله‌ی $f(x)=0$ دو ریشه‌ی منفی داشته باشد



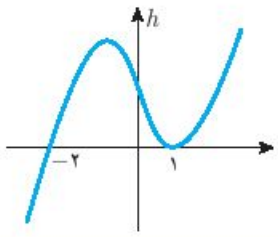
$$\begin{cases}\Delta>0 \rightarrow a^2-4a-12>0 & \rightarrow a<-2 \text{ یا } a>6\\ s<0 \rightarrow -\dfrac{a}{a+3}<0 & \rightarrow -a<0 \text{ یا } a>0\\ p>0 \\ a+3>0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{a+3}>0 \quad \rightarrow a>-3$$

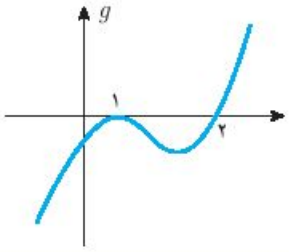
در این حالت $a>6$ جواب است.

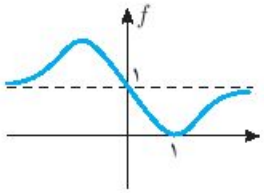
جواب کلی تست اجتماع دو حالت $a\le -2$ و $a>6$ است که برابر $a\le -2$ می‌باشد.

نکته ۹ اگر α ریشه‌ی مضاعف $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد آن‌گاه نمودار توابع $y=f(x)$، $y=f(x)g(x)$ و $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=\alpha$ بر محور xها مماس است ($g(\alpha)\neq 0$ و g در همسایگی α پیوسته) و ضابطه‌ی $f(x)$ به صورت $a(x-\alpha)^2$ می‌باشد.

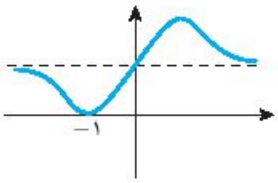
به طور مثال منحنی‌های $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ و $g(x)=(x-1)^2(x-2)$ و $h(x)=(x-1)^2(x+2)$ در نقطه‌ی $x=1$ بر محور xها مماس‌اند.







تست ۱۱. نمودار تابع $y=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x+3}$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) −۱

۳) ۳

۴) −۳

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

چون منحنی در نقطه‌ی $x=-1$ بر محور xها مماس است پس صورت کسر یعنی x^2+ax+b به صورت $(x+1)^2$ می‌باشد

پس $a=-2$ و $b=1$ و لذا $a+b=-1$.

۴.۱ یافتن ماکزیمم و می‌نیمم درجه ۲

عبارت $y=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید. به ازای $x=-\dfrac{b}{2a}$ مقدار $y=-\dfrac{\Delta}{4a}$ به‌دست می‌آید که در حالت $a>0$ این مقدار همان می‌نیمم y و در حالت $a<0$ این مقدار همان ماکزیمم y است.

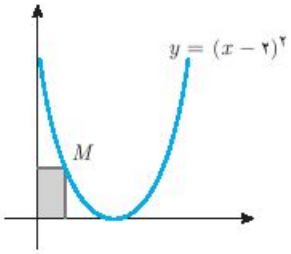
دقت کنید که به کمک مربع

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال ۶ کدام نقطه از سهمی $y = x^2$ کم‌ترین فاصله را از خط $y - 2x + 6 = 0$ دارد؟

حل. نقطه‌ی $M(a, a^2)$ را روی سهمی در نظر بگیرید. فاصله‌ی این نقطه از خط برابر $d = \frac{a^2 - 2a + 6}{\sqrt{5}}$ است. حداقل مقدار $a^2 - 2a + 6 = (a-1)^2 + 5$ برابر ۵ است و آن وقتی است که $a = 1$ باشد. پس نقطه‌ی $M(1, 1)$ جواب مسئله است.

تست ۱۲. کم‌ترین محیط مستطیل شکل مقابل چقدر است؟



۱) ۷
۲) $\frac{7}{2}$
۳) $\frac{7}{4}$
۴) ۱۴

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

نقطه‌ی $M(x, y)$ را در نظر بگیرید.

$$P = 2x + 2y = 2x + 2(x-2)^2 = 2x^2 - 6x + 8$$
$$= 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{2}$$

پس حداقل P برابر $\frac{7}{2}$ است.

نکته ۱۰ اگر حاصل‌جمع دو عدد مثبت x و y مقدار ثابت k باشد حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که برابر باشند.
و اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت x و y مقدار ثابت k باشد حاصل‌جمع آن‌ها وقتی می‌نیمم است که برابر باشند.

به طور مثال از بین مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۲، مربع به ضلع ۳ بیش‌ترین مساحت و از بین مستطیل‌های با مساحت ۴۹، مربع به ضلع ۷ کم‌ترین محیط را دارد.

تست ۱۳. با فرض $x > -1$ حداقل عبارت $y = x + \frac{9}{x+1}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

روش اول: حاصل‌ضرب $x + 1$ و $\frac{9}{x+1}$ برابر ۹ است. بنابراین حاصل‌جمع $x + 1 + \frac{9}{x+1}$ وقتی می‌نیمم است که هرکدام ۳ باشند.

$$\min(x + 1 + \frac{9}{x+1}) = 3 + 3 = 6 \rightarrow \min(y) = 5$$

روش دوم:

$$y = x + \frac{9}{x+1} = x + 1 + \frac{9}{x+1} - 1 = \left(\underbrace{\sqrt{x} + 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}}_{\min = 0} \right)^2 + 5$$

$$\rightarrow \min(y) = 5$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۵.۱ تمرین

۱. کوچک‌ترین عدد صحیح n که به ازای آن معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x(nx-4)-x^2+16=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x'}{x''}}+\sqrt{\frac{x''}{x'}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۳. هرگاه یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2+\sqrt{2}mx+4=0$ مکعب ریشه‌ی دیگر باشد، m کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۴. α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x-1=0$ هستند و داریم $(\alpha^3+2\alpha^2+m)(\beta^3+2\beta^2+m)=2$ در این صورت مقدار m کدام است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۱− و ۳ ۳) ۱ و ۳− ۴) ۱− و ۳−

۵. معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x-1=0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2+14x-1=0$ ۲) $x^2-14x-1=0$ ۳) $x^2-14x+1=0$ ۴) $x^2-14x-8=0$

۶. معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-3x+1=0$ مفروض است. کدام معادله‌ی زیر ریشه‌هایش سه برابر ریشه‌های معادله‌ی فوق می‌باشد؟

۱) $3x^2-9x+1=0$ ۲) $x^2-9x+9=0$ ۳) $x^2-18x+9=0$ ۴) $x^2-27x+9=0$

۷. اگر بین ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $x'-x''-x'x''=0$ برقرار باشد، یک ریشه‌ی معادله کدام است؟ $(x'>x''\ ,\ a>0)$

۱) $\frac{c+b}{2a}$ ۲) $\frac{c-b}{2a}$ ۳) $\frac{c+b}{a}$ ۴) $\frac{c-b}{a}$

۸. برای آنکه ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-2mx-1=0$ سینوس و کسینوس یک کمان باشند، مقدار m برابر است با:

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

۹. اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ به ترتیب $\log_4 A$ و $\log_4 B$ باشند، AB برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۰. اگر $f(x^3+2)=x^6+3x^3$ آنگاه مجموع ریشه‌های معادله‌ی $f(2x+1)=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۱۱. اگر به ازای جمیع مقادیر x نامساوی $(m-1)x^2-2x-(m+1)<0$ برقرار باشد، محدوده‌ی m کدام است؟

۱) $m<1$ ۲) $m>\sqrt{2}$ ۳) $1<m<\sqrt{2}$ ۴) $m<-\sqrt{2}$

۱۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+4=0$ باشند، محدوده‌ی a کدام باشد تا رابطه‌ی $-1<\alpha<2<\beta$ بین ریشه‌های معادله برقرار باشد؟

۱) $a<-4$ ۲) $a<5$ ۳) $a>5$ ۴) $-4<a<5$

۱۳. اگر معادله‌ی $x^3+mx+54=0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد ریشه‌ی ساده‌ی آن کدام است؟

۱) -9 ۲) -6 ۳) ۶ ۴) ۹

۱۴. به ازای کدام مقدار m، یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-16x+5m+3=0$ سه برابر ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۲

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۵. اگر بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $x_1^3+x_1^3x_2^3+x_2^3=0$ برقرار باشد، کدام تساوی برقرار است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $b^3+c^3=abc$ ۲) $b^3+c^3=3abc$ ۳) $b^3-c^3=abc$ ۴) $b^3-c^3=3abc$

۱۶. مقدار m چه باشد تا عدد ۲ بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx-2=0$ باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۷. اگر بین ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-6x+a+2=0$ یعنی α و β رابطه‌ی $2\alpha-\beta=4$ برقرار باشد، a کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -4 ۴) ۴

۱۸. اگر معادله‌ی $x^2+bx+c=0$ یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد معادله‌ی $x^2+bx+c+2=0$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد. ۲) یک ریشه‌ی مضاعف ۳) دو ریشه‌ی مثبت ۴) دو ریشه‌ی منفی

۱۹. اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x-4=0$ باشد حاصل $A=\frac{a^2b^3+b^2a^3}{a^2+2a}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) ۴ ۳) -8 ۴) $\frac{1}{8}$

۲۰. ریشه‌ی مشترک معادلات $(m+1)x+3=0$ و $x^2+mx+2=0$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۱ ۴) -1

۲۱. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2+3x-2=0$ باشد، حاصل $\frac{x''}{x''^2-2}+\frac{x'}{x'^2-2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲۲. به ازای کدام مقدار m حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^2+(3m-1)x-5m-3=0$ چهار برابر مجموع ریشه‌های آن است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

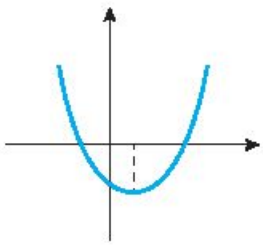
۲۳. به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+3x-k=0$ دو واحد از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+1=0$ کم‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(m+1)x+m-1=0$ مساوی ۵ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵. با توجه به شکل مقابل کدام گزینه صحیح است؟ ($y=ax^2+bx+c$)



۱) $\frac{c}{a}<0\ ,\ -\frac{b}{a}>0\ ,\ \Delta<0$

۲) $\frac{c}{a}>0\ ,\ -\frac{b}{a}>0\ ,\ \Delta<0$

۳) $\frac{c}{a}<0\ ,\ -\frac{b}{a}>0\ ,\ \Delta>0$

۴) $\frac{c}{a}>0\ ,\ -\frac{b}{a}<0\ ,\ \Delta>0$

۲۶. معادله‌ی $2x^2-3x-7=0$ مفروض است. کدام معادله‌ی زیر ریشه‌هایش عکس و قرینه‌ی ریشه‌های آن معادله است؟

۱) $7x^2-3x-2=0$ ۲) $7x^2+3x-2=0$ ۳) $7x^2+3x+2=0$ ۴) $7x^2-3x+2=0$

۲۷. اگر سهمی $y=(1-a^2)x^2+3x-2$ دارای شاخه‌ای رو به پایین باشد، حدود a کدام است؟

۱) $|a|<1$ ۲) $|a|\geq 1$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲۸. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۲kx + ۴k - ۵ = ۰$ باشند، آن‌گاه به ازای کدام مقدار k حاصل $x'^۲ + x''^۲$ می‌نیمم (کم‌ترین مقدار) است؟

۱) $k = ۰$ ۲) $k = ۱$ ۳) $k = \frac{۱}{۲}$ ۴) $k = ۲$

۲۹. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۵x - ۸m + ۱۶ = ۰$ باشند، به ازای کدام مقادیر m، نقطه‌ی $M(x_۱, x_۲)$ در ناحیه‌ی دوم یا چهارم قرار می‌گیرد؟

۱) $m = ۲$ ۲) $m \neq ۲$ ۳) $m < ۲$ ۴) $m > ۲$

۳۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ + mx - m + ۲ = ۰$ باشند و سه عدد β و ۳ و α دنباله هندسی تشکیل دهند m کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۸ ۳) -۴ ۴) -۲

۳۱. به ازای چند عدد صحیح $۳x^۲ + mx + m^۲ - ۵ = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت می‌باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۲. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۳x^۲ + (۵m - ۴)x + m = ۰$ و m، x' و x'' سه جمله‌ی متوالی دنباله عددی باشند، m کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۴}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $-\frac{۲}{۱۱}$

۳۳. به ازای چند مقدار صحیح a نمودار تابع $y = x^۲ + ax + a + ۳$ از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند؟

۱) ۳ مقدار ۲) ۴ مقدار ۳) ۹ مقدار ۴) ۱۰ مقدار

۳۴. اگر $\tan\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲ + ۵x + ۱ = ۰$ باشد حاصل $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۵}$

۳۵. به ازای چه مقادیری از m نمودار $y = mx^۲ - ۳x + ۲$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند؟

۱) $m \leq \frac{۹}{۸}$ ۲) $m \geq \frac{۹}{۸}$ ۳) $m > ۰$ ۴) $m < ۰$

۳۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۶x - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\beta^۲ + ۳\alpha$ چقدر است؟

۱) ۹٫۵ ۲) ۸٫۵ ۳) ۷٫۵ ۴) ۶٫۵

۳۷. به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۲x + ۲m - ۳ = ۰$ دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی $\ldots, -۴۹, -۵۳, -۵۷$ می‌باشند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) -۳

۳۸. بین ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - mx + ۱ = ۰$ رابطه‌ی $\frac{\alpha^۲ + ۱}{\alpha^۲} + \frac{\beta^۲ + ۱}{\beta} = ۱۰$ برقرار است. مقدار m کدام است؟

۱) ۳ یا -۴ ۲) ۴ یا -۴ ۳) -۳ یا ۴ ۴) -۳ یا -۴

۳۹. اگر α و β ریشه‌های $x^۲ - ۳x - ۶ = ۰$ باشند حاصل $\sqrt{\alpha^۲(\beta + ۲)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۴۰. ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر یک واحد از مجذور ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$ بیش‌تر است؟

۱) $x^۲ - ۱۵x - ۱۸ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۱۵x + ۱۸ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۱۵x + ۱۸ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۱۵x - ۱۸ = ۰$

۴۱. یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$ در بازه‌ی $(\frac{a}{۲}, \frac{a+۱}{۲})$ قرار دارد. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

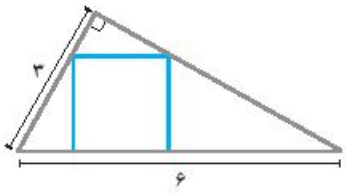
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۲. بین دو ریشه‌ی حقیقی کدام معادله‌ی زیر می‌توانیم واسطه‌ی هندسی درج کنیم؟

۱) $x^۲ + ۵x - ۷ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۵x + ۷ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۷x + ۳ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۷x - ۳ = ۰$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۴۳. ماکزیمم مساحت مستطیل محاط درون مثلث قائم‌الزاویه (مطابق شکل) چقدر است؟



۱) ۹
۲) ۴٫۵
۳) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۴۴. کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۰, a)$ از نقاط منحنی $y = x^۲$ برابر $|a|$ است. محدوده‌ی a کدام است؟

۱) $a \leq \frac{۱}{۲}$ ۲) $a \leq ۰$ ۳) $a \leq \frac{۱}{۴}$ ۴) $a \in \mathbb{R}$

۴۵. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-۳)x^۲ + ax - ۱$، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a \leq ۲$ ۲) $۰ < a \leq ۲$ ۳) $۲ < a < ۳$ ۴) $۰ < a < ۳$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۲»

۴۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\{\frac{۱}{\alpha} + ۱\ ,\ \frac{۱}{\beta} + ۱\}$ است؟

۱) $۴x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ ۲) $۴x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ۳) $۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ ۴) $۴x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۲»

۴۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(۵x + ۳) = ۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰$ به صورت $\{\frac{۱}{\alpha^۲}\ ,\ \frac{۱}{\beta^۲}\}$ است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰»

۴۸. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (m-۱)x^۲ + \sqrt{۳}x + m$، همواره در زیر محور xها است؟

۱) $m < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} < m < ۱$ ۳) $۱ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $m > \frac{۳}{۲}$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۵»

۴۹. اگر منحنی به معادله‌ی $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m > ۳$ ۲) $۳ < m < ۴$ ۳) $۳ < m < ۵$ ۴) $۴ < m < ۵$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷»

۵۰. در معادله‌ی $۳x^۲ - ۱۷x + m = ۰$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۷»

۵۱. به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ax^۲ + ۴x$، بر هم مماسند؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۱»

۵۲. مثلث قائم‌الزاویه به رأس‌های مبدأ و $(۸, ۰)$ و $(۰, ۶)$ مفروض است. یک مستطیل در داخل این مثلث محاط شده به قسمی که یک رأس منطبق بر مبدأ و دو ضلع آن منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم مستطیل بر روی وتر مثلث است. مساحت بزرگ‌ترین مستطیل ممکن چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۴

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۱»

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۵۳. به ازای چند مقدار m نمودار تابع $y=(\frac{x}{m}-۳)(mx-۱)$ مماس بر محور xهاست؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) صفر

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸»

۵۴. در معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۲x-۴=۰$ اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸»

۵۵. منحنی به معادله‌ی $y=(۲x+۱)(x+۸)$ با خطوط $y=mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟

۱) $۹<m<۲۵$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۵<m<۱۳$

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸»

۵۶. در معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$، حاصل $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۶}$

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹»

۵۷. به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله‌ی $y=ax^۲-(a+۲)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq -۲$ ۲) $a>-۲$ ۳) $a>۰$ ۴) $-۲\leq a<۰$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۹»

۵۸. به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=۲x-۴$ بر منحنی به معادله‌ی $y=(m+۳)x^۲+mx$ مماس است؟

۱) ۱۸ و ۲− ۲) ۲۲ و ۲− ۳) ۲۲ و ۲ ۴) ۱۱ و ۴

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۰»

دانلود از اپلیکیشن پادرس

جلسه دوم: معادلات، نامعادلات و تعیین علامت

۶.۱ معادلات قابل تبدیل به درجه ۲

به کمک تغییر متغیر مناسب می‌توان بعضی از معادلات را به معادله‌ی درجه دوم تبدیل و سپس حل نمود.

مثال ۷ معادله‌ی $\frac{x^۴}{(x^۲-۸)^۲}-\frac{x^۲}{x^۲-۸}-۲=۰$ را حل کنید.

حل.

$$t=\frac{x^۲}{x^۲-۸}\rightarrow t^۲-t-۲=۰\rightarrow t=-۱\ ,\ ۲$$

$$t=-۱\rightarrow \frac{x^۲}{x^۲-۸}=-۱\rightarrow x^۲=-x^۲+۸\rightarrow x^۲=۴\rightarrow x=\pm ۲$$

$$t=۲\rightarrow \frac{x^۲}{x^۲-۸}=۲\rightarrow x^۲=۲x^۲-۱۶\rightarrow x^۲-۱۶\rightarrow x=\pm ۴$$

تست ۱۴. به ازای چه مقادیری از a معادله‌ی $x^۲-۲x+\frac{۱}{(x-۱)^۲}=a$ جواب ندارد؟

۱) $a<۱$ ۲) $-۳<a<۱$ ۳) $a<-۱$ ۴) $a>-۱$

پاسخ: ✓ ۲ ۳ ۴

$$(x-۱)^۲=t\rightarrow x^۲-۲x=t-۱$$

$$\text{معادله}:\ t-۱+\frac{۱}{t}=a\rightarrow t+\frac{۱}{t}=a+۱$$

$$\rightarrow t^۲-(a+۱)t+۱=۰$$

یا باید Δ منفی باشد و یا معادله دارای ریشه‌ی منفی باشد. (چون $t\geq ۰$ است.)

$$\Delta=(a+۱)^۲-۴<۰\rightarrow (a+۱)^۲<۴\rightarrow -۲<a+۱<۲\rightarrow -۳<a<۱$$

$$x_۱+x_۲<۰\rightarrow a+۱<۰\rightarrow a<-۱$$

پس کلاً جواب به صورت $a<۱$ است.

معادله‌ی دومجذوری

معادله‌ی $ax^۴+bx^۲+c=۰$ را دومجذوری می‌نامیم $(a\neq ۰)$ با فرض $x^۲=t$ و حل معادله‌ی $at^۲+bt+c=۰$ مقادیر t و سپس x به‌دست می‌آید.

مثال ۸ به ازای چه مقادیری از a معادله‌ی $x^۴+ax^۲+۹=۰$ چهار جواب دارد.

حل.

$$x^۲=t\rightarrow t^۲+at+۹=۰$$

معادله‌ی حاصل باید برای t دو جواب متمایز مثبت داشته باشد.

$$\begin{cases}\Delta>۰\rightarrow a^۲-۳۶>۰\rightarrow a^۲>۳۶\xrightarrow{a<-}a<-۶\\ t_۱+t_۲=-a>۰\rightarrow a<۰\end{cases}$$

تست ۱۵. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۴+px^۲+q=۰$ برابر $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ است. حاصل $p+q$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۰

دانلود از اپلیکیشن پادرس

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

$$x=\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲=(\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲})^۲=۳+۸+۴\sqrt{۶} \rightarrow x^۲-۱۱=۴\sqrt{۶}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x^۲-۱۱)^۲=(۴\sqrt{۶})^۲ \rightarrow x^۴-۲۲x^۲+۱۲۱=۹۶ \rightarrow x^۴-۲۲x^۲+۲۵=۰$$

پس $p+q=۳$ می‌باشد.

۷.۱ معادلات گویا

معادلاتی که در آن فقط از عبارت گویا (فاقد رادیکال) استفاده شود معادله‌ی گویا نامیده می‌شود.

برای حل معادلات شامل عبارت گویا، طرفین معادله را در ک.م.م مخرج کسرها ضرب می‌کنیم و سپس عبارت جبری به‌دست آمده را ساده کرده و معادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج‌ها را صفر کند.

مثال ۹ معادله‌ی $\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲}{x^۲+۲x}$ را حل کنید.

حل. دو طرف معادله را در $x(x+۱)(x+۲)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۲x(x+۱)(x+۲)}{x(x+۲)}=\frac{۲x(x+۱)(x+۲)}{x+۱}+\frac{x(x+۱)(x+۲)}{x}$$
$$\rightarrow ۲(x+۱)=۲x(x+۲)+(x+۱)(x+۲)$$
$$۲x+۲=۲x^۲+۴x+x^۲+۳x+۲ \rightarrow ۳x^۲+۵x=۰$$
$$\rightarrow x=۰\ ,\ x=-\frac{۵}{۳}$$

$x=۰$ قابل قبول نیست چون مخرج کسر را صفر می‌کند.

تست ۱۶. دو کارگر کاری را با هم در ۱۸ روز به پایان می‌رسانند. اگر هر کدام به تنهایی کار کنند. کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کند. کارگر دوم کار را به تنهایی در چند روز تمام می‌کند؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۳۰

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

کارگر اول در x روز و کارگر دوم در $x+۱۵$ روز کار را تمام می‌کند. پس در یک روز کارگر اول $\frac{۱}{x}$ و کارگر دوم $\frac{۱}{x+۱۵}$ کار را انجام می‌دهند. مجموع این دو برابر $\frac{۱}{۱۸}$ کار است.

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸} \rightarrow x(x+۱۵)(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵})=\frac{۱}{۱۸}x(x+۱۵)$$
$$\rightarrow x+۱۵+x=\frac{۱}{۱۸}(x^۲+۱۵x) \rightarrow ۳۶x+۲۷۰=x^۲+۱۵x$$
$$\rightarrow x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰ \rightarrow x=۳۰$$

کارگر دوم در ۴۵ روز کار را تمام می‌کند.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۸.۱ معادلات گنگ

معادلات شامل عبارات رادیکالی را گنگ می‌نامیم. برای حل این معادلات با توان‌رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن، معادله‌ای بدون عبارت گنگ به‌دست می‌آوریم و سپس آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در دامنه‌ی معادله صدق کنند. در ضمن دقت کنید وقتی دو طرف تساوی را به توان زوج می‌رسانید باید از هم‌علامت بودن دو طرف تساوی مطمئن باشید.

مثال ۱۰ معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$ را حل کنید.

حل. دامنه‌ی عبارت $x\geq 3$ می‌باشد. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x+1=(\sqrt{x-3}+\sqrt{x})^2=x-3+x+2\sqrt{x(x-3)}$$
$$\rightarrow 4=2\sqrt{x(x-3)}\rightarrow 2=\sqrt{x(x-3)}\rightarrow 4=x(x-3)$$
$$\rightarrow x^2-3x-4=0\rightarrow x=-1,4$$

$x=-1$ قابل قبول نیست.

تست ۱۷. اگر $x=\alpha$ جواب معادله‌ی $\sqrt{x+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-2}}=6$ باشد مقدار $[\sqrt{\alpha}]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2}=6$$
$$\rightarrow\sqrt{x-2}+2+|\sqrt{x-2}-2|=6\rightarrow 2\sqrt{x-2}=6\rightarrow x=11$$

پس $[\sqrt{11}]=3$ است.

دقت شود که اگر داخل قدرمطلق $|\sqrt{x-2}-2|$ منفی باشد آن‌گاه به یک تساوی نادرست خواهیم رسید $(6=4)$ پس در این حالت معادله جواب ندارد.

۹.۱ حل معادلات به روش هندسی

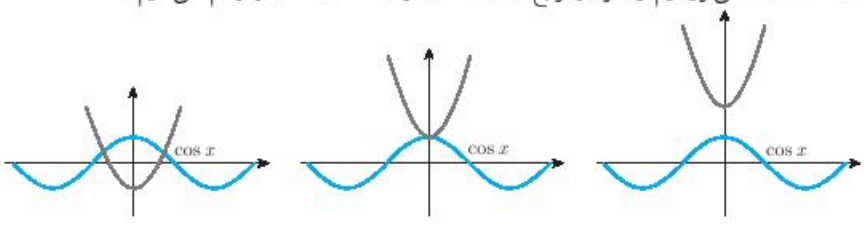
دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را در نظر بگیرید. ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ طول نقاط تلاقی نمودار دو تابع است و بر عکس.

برای یافتن تعداد ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ می‌توان نمودار توابع f و g را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنیم و تعداد نقاط برخورد آن‌ها را بیابیم. البته می‌توان معادله‌ی هم‌ارز با معادله‌ی $f=g$ را بیابیم مثلاً $h(x)=t(x)$ و سپس نمودار توابع h و t را تلاقی بدهیم.

به طور مثال برای یافتن تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^3+3x+5=0$ می‌توانیم نمودار توابع $y=x^3+3x$ و $y=-5$ را تقاطع دهیم. $(x^3+3x=-5)$ و یا می‌توانیم نمودار توابع $y=x^3$ و $y=-3x-5$ $(x^3=-3x-5)$ را تقاطع دهیم.

مثال ۱۱ در مورد تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2-\cos x=a$ بر حسب a بحث کنید.

حل. معادله را به صورت $\cos x=x^2-a$ می‌نویسیم و نمودار توابع $y=\cos x$ و $y=x^2-a$ را رسم می‌کنیم.



اگر $a>1$ معادله جواب ندارد — اگر $a=1$ معادله یک جواب دارد — اگر $a<1$ معادله دو جواب دارد

معادله به ازای $a<-1$ فاقد جواب، به ازای $a=-1$ یک جواب و به ازای $a>-1$ دو جواب دارد.

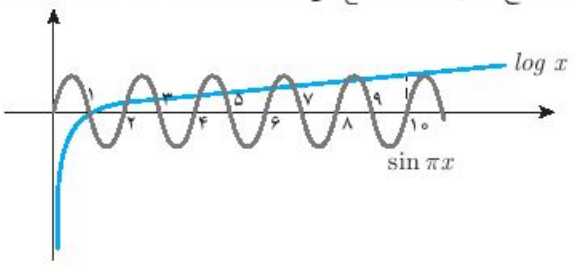
دانلود از اپلیکیشن پادرس

تست ۱۸. معادله‌ی $\log x = \sin(\pi x)$ چند جواب دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱

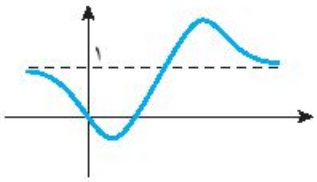
پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۳ ۴

نمودار $\sin(\pi x)$ در نقاط با طول صحیح محور xها را قطع می‌کند. در نقطه‌ی $x = ۱۰$ مقدار $y = \log x$ برابر ۱ است.



در ۹ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

تست ۱۹. نمودار تابع $y = \frac{x^۲ - ax}{x^۲ - ۲x + ۳}$ به صورت مقابل است. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟



۱) $a > -۲$

۲) $-۲ < a < ۰$

۳) $a < ۲$

۴) $۰ < a < ۲$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

نمودار تابع، محور xها را در نقطه‌ی $x = ۰$ و نقطه‌ای با طول مثبت قطع می‌کند.

$$y = ۰ \to x^۲ - ax = ۰ \to x = ۰ \ , \ x = a \to a > ۰$$

نمودار تابع، خط $y = ۱$ را در یک نقطه قطع کرده است.

$$\frac{x^۲ - ax}{x^۲ - ۲x + ۳} = ۱ \to x^۲ - ax = x^۲ - ۲x + ۳ \to x = \frac{-۳}{a - ۲} \to a \neq ۲$$

در $+\infty$ نمودار تابع بالای خط $y = ۱$ است.

$$\frac{x^۲ - ax}{x^۲ - ۲x + ۳} > ۱ \to x^۲ - ax > x^۲ - ۲x + ۳ \to (a - ۲)x < -۳ \to a < ۲$$

فقط گزینه‌ی ۴ هر سه شرط بالا را دارد.

نکته ۱۱ برای رسم توابع $\sin kx$، $k \sin x$، $\tan kx$، $k \tan x$، $\sin^{-۱} kx$، $k \sin^{-۱} x$، $\tan^{-۱} kx$ و $k \tan^{-۱} x$ دقت کنید که تمامی آن‌ها در مبدأ مختصات بر خط $y = kx$ مماس‌اند.

۱۰.۱ تعیین علامت

برای تعیین علامت عبارت $p = ax + b$ از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

x	$-\frac{b}{a}$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

تعیین علامت درجه ۲

جدول تعیین علامت $p = ax^۲ + bx + c$ سه حالت دارد:

حالت اول: اگر $\Delta < ۰$ آنگاه علامت p همواره موافق علامت a است.

حالت دوم: اگر $\Delta = ۰$ آنگاه علامت p همواره موافق علامت a است.

فقط به ازای $x = -\frac{b}{۲a}$ مقدار $p = ۰$ است.

حالت سوم: اگر $\Delta > ۰$ و α و β ریشه‌های معادله‌ی $p = ۰$ باشند آنگاه جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x		α		β	
p	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

تست ۲۰. به ازای چند مقدار صحیح m معادله‌ی $mx^۲ + ۸x + ۲m + ۴ = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی مثبت دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

پاسخ: ✓ ۲ ۳ ۴

سه شرط $\Delta > ۰$، $p > ۰$ و $s > ۰$ باید برقرار باشد.

$$۱)\ \Delta > ۰ \to ۶۴ - ۴m(۲m + ۴) > ۰ \to -۸(m^۲ + ۲m - ۸) > ۰$$

$$\to m^۲ + ۲m - ۸ < ۰ \to -۴ < m < ۲$$

$$۲)\ p > ۰ \to \frac{۲m + ۴}{m} > ۰ \to m(۲m + ۴) > ۰ \to m < -۲ \text{ یا } m > ۰$$

دقت کنید تعیین علامت $\frac{f}{g}$ و fg یکسان است.

$$۳)\ s > ۰ \to -\frac{۸}{m} > ۰ \to m < ۰$$

اشتراک سه شرط بالا به صورت $-۴ < m < -۲$ می‌باشد که شامل یک عدد صحیح $m = -۳$ است.

نکته ۱۲ شرط آنکه $ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت باشد آن است که $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ باشد و شرط آنکه همواره منفی باشد آن است که $\Delta < ۰$ و $a < ۰$ باشد.

نکته ۱۳ شرط آنکه همواره $ax^۲ + bx + c \geq ۰$ آن است که $\Delta \leq ۰$ و $a > ۰$ باشد. به طور مشابه اگر $\Delta \leq ۰$ و $a < ۰$ آنگاه همواره $ax^۲ + bx + c \leq ۰$ است.

تست ۲۱. به ازای چه مقادیری از m نمودار $y = x^۲ + (m - ۲)x + ۱۲$ همواره بالای خط $y = ۳$ است؟

۱) $-۴ < m < ۸$ ۲) $-۸ < m < ۴$ ۳) $-۸ < m < -۴$ ۴) $۴ < m < ۸$

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

$$x^۲ + (m + ۲)x + ۱۲ > ۳ \to x^۲ + (m + ۲)x + ۹ > ۰$$

باید Δ منفی باشد پس:

$$\Delta = (m + ۲)^۲ - ۳۶ < ۰ \to (m + ۲)^۲ < ۳۶$$

$$\to -۶ < m + ۲ < ۶ \to -۸ < m < ۴$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

نکته ۱۴ برای تعیین علامت عبارت $\frac{p}{q}$ ابتدا ریشه‌های $p=0$ و $q=0$ را به‌دست می‌آوریم و به صورت صعودی در جدول تعیین علامت وارد می‌کنیم. علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج را در هم ضرب می‌کنیم و علامت حاصل را در اولین خانه‌ی سمت راست قرار می‌دهیم و سپس به سمت چپ جدول حرکت می‌کنیم و به هر ریشه که رسیدیم علامت را عوض می‌کنیم مگر ریشه‌ی مضاعف باشد که در این حالت علامت را عوض نمی‌کنیم.

در نکته‌ی بالا دقت کنید که چندجمله‌ای‌های p و q تا حد امکان با هم ساده می‌شوند و ریشه‌های مخرج از دامنه خارج می‌شوند.

مثال ۱۲ عبارت $p=\frac{(x-1)^2(x+2)x^3}{(x-2)(x-3)}$ را تعیین علامت کنید.

حل. ریشه‌های صورت و مخرج عبارتند از -2، 0، 1، 2 و 3 که $x=1$ ریشه‌ی مضاعف است. علامت بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج مثبت است.

x		-2		0		1		2		3	
p	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

نکته ۱۵ تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی شبیه نکته‌ی قبل است. دقت کنید که عبارت $1\pm\cos x=0$ و $1\pm\sin x=0$ ریشه‌ی مضاعف دارند.

۱۱.۱ نامعادلات

برای نامعادلات از خواص زیر استفاده می‌کنیم.

۱) $a<b \longrightarrow a\pm c<b\pm c$

۲) $a<b,\ c>0 \rightarrow ac<bc$

۳) $a<b,\ c<0 \rightarrow ac>bc$

۴) $a<b,\ ab>0 \rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

۵) $x^2<a^2 \xrightarrow{a>0} -a<x<a$

۶) $x^2>a^2 \xrightarrow{a>0} x<-a$ یا $x>a$

۷) $a<b \xrightarrow{\text{فرد } n} a^n<b^n$

۸) $0<a<b \xrightarrow{\text{زوج } n} a^n<b^n$

نامعادلات گویا

برای حل نامعادلات گویا مانند $p(x)\geq g(x)$ آن را به صورت $p(x)-g(x)\geq 0$ می‌نویسیم و سپس عبارت $p(x)-g(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم. البته عبارت مثبت را می‌توان از دو طرف نامساوی حذف نمود.

تست ۲۲. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{6}<\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}$ در اعداد حقیقی منفی به صورت (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}>\frac{1}{6} \rightarrow \frac{3}{x(x+3)}>\frac{1}{6} \rightarrow \frac{3}{x(x+3)}-\frac{1}{6}>0$$

$$\rightarrow \frac{18-x^2-3x}{6x(x+3)}>0 \rightarrow \frac{-(x-3)(x+6)}{6x(x+3)}>0$$

با فرض $x<0$ حاصل $\frac{x-3}{x}$ مثبت است پس از دو طرف نامعادله حذف می‌شود.

$$\Rightarrow p=\frac{-(x+6)}{x+3}>0$$

x		-6		-3	
p	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$

جواب بازه‌ی $(-6,-3)$ است پس $a=-6$ و $b=-3$ و در نتیجه $b-a=3$ است.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

نامعادلات گنگ

پس از تعیین دامنه‌ی تعریف به کمک خواص توان‌رسانی نامساوی‌ها، دو طرف را به توان می‌رسانیم. دقت کنید شرط به توان زوج رساندن دو طرف نامساوی $a < b$ آن است که a و b مثبت باشند.

تست ۲۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x^۲+۵}{\sqrt{x^۲+۴}} \geq \frac{۵}{۲}$ کدام است؟

۱) $|x| \leq ۲$ ۲) $x \geq -۲$ ۳) $x \geq ۰$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓

فرض کنید $t = x^۲ + ۴$ در این صورت نامعادله به صورت $\frac{t+۱}{\sqrt{t}} \geq \frac{۵}{۲}$ در می‌آید. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{(t+۱)^۲}{t} \geq \frac{۲۵}{۴} \rightarrow ۴(t^۲ + ۲t + ۱) \geq ۲۵t$$

$$\rightarrow ۴t^۲ - ۱۷t + ۴ \geq ۰ \rightarrow (۴t-۱)(t-۴) \geq ۰ \rightarrow t \leq \frac{۱}{۴} \text{ یا } t \geq ۴$$

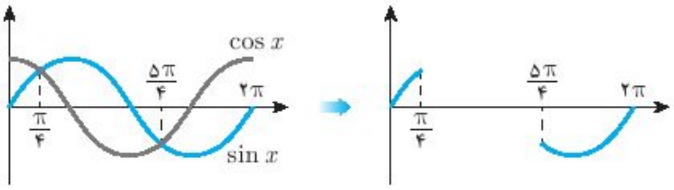
طبیعی است که $t \geq ۴$ همواره برقرار است.

حل نامعادله به روش نمودار

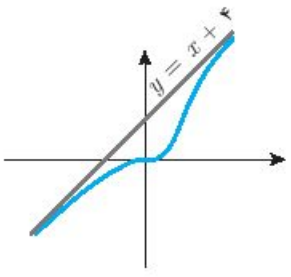
برای حل نامعادله‌ی $f(x) < g(x)$ ابتدا نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دستگاه محور مختصات رسم می‌کنیم. نقاطی مانند x که در آن نقاط، نمودار f زیر نمودار g قرار دارد همان مجموعه جواب نامعادله است.

مثال ۱۳ به کمک رسم نامعادله‌ی $\sin x < \cos x$ را در بازه‌ی $(۰, ۲\pi)$ حل کنید.

حل. نمودار توابع $\sin x$ و $\cos x$ را رسم می‌کنیم. در بازه‌های $(۰, \frac{\pi}{۴})$ و $(\frac{۵\pi}{۴}, ۲\pi)$ نمودار $\sin x$ زیر نمودار $\cos x$ است و جواب نامعادله عبارت است از $(۰, \frac{\pi}{۴}) \cup (\frac{۵\pi}{۴}, ۲\pi)$.



تست ۲۴. نمودار تابع $y = \frac{x^۳}{x^۲ - ۴x + a}$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۴
۴) ۹

پاسخ: ۱ ✓ ۳

دانلود از اپلیکیشن پادرس

نمودار تابع همواره زیر خط $y = x + ۴$ است. پس مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x^۳}{x^۲ - ۴x + a} < x + ۴$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$\frac{x^۳}{x^۲ - ۴x + a} < x + ۴ \rightarrow x^۳ < (x + ۴)(x^۲ - ۴x + a)$$
$$\rightarrow x^۳ < x^۳ - ۴x^۲ + ax + ۴x^۲ - ۱۶x + ۴a \rightarrow (۱۶ - a)x - ۴a < ۰$$

خط $y = (۱۶ - a)x - ۴a$ نمی‌تواند همواره منفی باشد مگر آن‌که $۱۶ - a = ۰$ باشد پس $a = ۱۶$.
دقت کنید چون دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است پس $x^۲ - ۴x + a$ همواره مثبت است و مجاز به طرفین وسطین هستیم.

نکته ۱۶ با توجه به نمودار x، $\sin x$ و $\tan x$ نامساوی‌های زیر برقرار است:

$x \in \mathbb{R}$	$\lvert \sin x \rvert \leq \lvert x \rvert$
$x \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$	$\lvert x \rvert \leq \lvert \tan x \rvert$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۲.۱ تمرین

۵۹. مجموعه جواب نامعادله‌ی $x - ۱ \leq ۲\sqrt{x}$ به صورت $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $۱ + \sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳ + ۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۶۰. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|\sin x| \geq \sqrt{\frac{۲}{\pi}|x|}$ کدام است؟ $(x \neq ۰)$

۱) $\frac{\pi}{۴} \leq |x| < \frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲} < x \leq -\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۰ < |x| \leq \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۰ < x \leq \frac{\pi}{۴}$

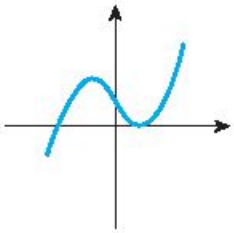
۶۱. معادله‌ی $x^۴ - ۳(m-۱)x^۲ + m - ۳ = ۰$ فقط دو ریشه‌ی حقیقی دارد. مقدار m کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

۶۲. مجموع جواب‌های معادله‌ی $۹^x - ۳^{x+a} + b = ۰$ برابر ۳ است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۶۳. به ازای چند مقدار a نمودار تابع $y = (x+۱)(x^۲ + ax + ۹)$ به صورت مقابل است؟



۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) بی‌شمار

۶۴. به ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $x^۴ + ax^۲ + ۹ = ۰$ تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

۱) -۹ ۲) -۸ ۳) -۶ ۴) -۴

۶۵. معادله‌ی $۲e^x = e^{۱-x} + ۳$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۶۶. معادله‌ی $\sqrt{۱+x^۲} = \sqrt{۱-x} - ۱$ چند جواب دارد؟

۱) جواب ندارد. ۲) دو جواب دارد. ۳) فقط یک جواب مثبت دارد. ۴) فقط یک جواب منفی دارد.

۶۷. معادله‌ی $|\sin x| = |\log x|$ چند ریشه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۸. معادله‌ی $\frac{۲}{۳} = \frac{۳x+۱}{۲x} + \frac{۲x}{۳x+۱}$ چگونه است؟

۱) دو ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) دو ریشه‌ی منفی دارد.
۳) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. ۴) ریشه ندارد.

۶۹. معادله‌ی $۳^{-x} = \frac{۹^{-x}+۱}{۲-x^۲}$ چند ریشه‌ی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۷۰. معادله‌ی $x + ۱ + \frac{\sin x}{x} = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۷۱. مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{a+۲x}{۳+۲x} - \frac{۲x}{۷+۴x} = ۱$ برابر $-\frac{۱۹}{۶}$ است. جواب کوچک‌تر کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۷}{۶}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۷۲. به ازای چه مقادیری از a نامساوی $۳\cos x + ۲a \geq ۰$ همواره برقرار است؟

۱) $a \leq \frac{۳}{۲}$ ۲) $a \geq \frac{۳}{۲}$ ۳) $a \geq -\frac{۳}{۲}$ ۴) $a \leq -\frac{۳}{۲}$

۷۳. برای هر $x \in (\frac{\pi}{۲}, \pi]$ رابطه‌ی $\frac{\cos^۲ x + ۱۱}{۳\cos x} \leq m$ برقرار است. حداقل مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) ۶

۷۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $-۱ < \frac{۲}{x^۲+x-۲} < -۲$ در $\mathbb{R}^+$ کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, ۱)$ ۲) $(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})$ ۳) $(۰, \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$ ۴) $(۰, \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})$

۷۵. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{x-۶۴} < ۳۲$ به صورت (a, b) می‌باشد. $b - a$ کدام است؟

۱) ۲۰۵ ۲) ۲۴۵ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۸۹

۷۶. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-۲| < ۳$ به صورت بازه‌ی (a, b) می‌باشد. برای k چند مقدار صحیح وجود دارد؟ $k^۲ - ۹ < ۰$

۱) ۲ مقدار ۲) ۵ مقدار ۳) ۷ مقدار ۴) بی‌شمار مقدار

۷۷. در بازه‌ی $(-۲, ۱)$ خط $y = x + ۲$ زیر نمودار تابع $y = \sqrt{a(۲+x)}$ قرار دارد. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۷۸. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x}{۲-x} + \frac{۲-x}{x} \geq ۲$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [۰, ۲]$ ۲) $(۰, ۲)$ ۳) $(۰, +\infty)$ ۴) $(۲, +\infty)$

۷۹. نمودار تابع $y = mx^۲ + \sqrt{۳}x + m + ۱$ همواره زیر محور xهاست. حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲} < m < ۰$ ۲) $۰ < m < ۱$ ۳) $m < -\frac{۳}{۲}$ ۴) $m > \frac{۱}{۲}$

۸۰. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳, y)$ از نقطه‌ی $B(۲, ۳)$، $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ برابر فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $C(۲, ۱)$ می‌باشد. مقدار y کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۸۱. معادله‌ی $x^۳ + mx + ۵۴ = ۰$ دقیقاً دو جواب دارد. مقدار m کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۲۷ ۳) -۲۴ ۴) -۱۸

۸۲. معادله‌ی $|a|x - ۲\sin x = ۰$ فقط یک ریشه دارد. حدود a کدام است؟

۱) $|a| > ۲$ ۲) $|a| \geq ۲$ ۳) $|a| > ۱$ ۴) $|a| \geq ۱$

۸۳. معادله‌ی $x\cos x - \sin x = ۰$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۸۴. معادله‌ی $x(x+۱)(x+۲)(x+۳) = ۸$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۸۵. معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{x-۱} = ۴$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) سه

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۸۶. به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $x^۴ - ۳x^۲ + m = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟ $(m \neq \frac{۹}{۴})$

۱) $m < ۰$ ۲) $m < ۱$ ۳) $m < ۲$ ۴) $m > ۲$

۸۷. یکی از ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ است؟

۱) $x^۴ - ۶x^۲ + ۱ = ۰$ ۲) $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱ = ۰$ ۳) $x^۴ + ۶x^۲ - ۳ = ۰$ ۴) $x^۴ + ۱۰x^۲ - ۷ = ۰$

۸۸. ریشه‌ی کدام معادله‌ی زیر $\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۴}$ است؟

۱) $x^۳ - ۸x - ۸ = ۰$ ۲) $x^۳ - ۸x - ۶ = ۰$ ۳) $x^۳ - ۶x - ۸ = ۰$ ۴) $x^۳ - ۶x - ۶ = ۰$

۸۹. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^۴ - ۲x^۲ - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲ + ۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱ + \sqrt{۲}$ ۴) ۴

۹۰. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^۴ - ۲۳x^۲ + ۱۷ = ۰$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۹ ۳) ۰ ۴) ۷

۹۱. به ازای چه مقادیری از m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^۴ - ۳x^۲ + m = ۰$ برابر ۳ است؟

۱) $m \leq \frac{۹}{۴}$ ۲) $۰ < m \leq \frac{۹}{۴}$ ۳) $m = \frac{۹}{۴}$ ۴) $m \geq \frac{۹}{۴}$

۹۲. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x|(x - ۴) < ۲x - ۵$، به کدام صورت است؟

۱) $(۱, ۵)$ ۲) $(۱ - \sqrt{۶}, ۱ + \sqrt{۶})$ ۳) $(۱, ۵) \cup (۱ + \sqrt{۶}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, ۱ - \sqrt{۶}) \cup (۱, ۵)$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۲»

۹۳. کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۲»

۹۴. معادله‌ی $(x^۴ - x^۲)^۲ - ۷(x^۴ - x^۲) - ۸ = ۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱ ۴) ۲

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۱»

۹۵. معادله‌ی $(x - \sqrt{x})^۲ - \frac{۱۱}{۱۰}(x - \sqrt{x}) + \frac{۱}{۱۰} = ۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۷»

۹۶. معادله‌ی $x^۴ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چقدر است؟

۱) دو ریشه و سه ۲) دو ریشه و شش ۳) چهار ریشه و سه ۴) چهار ریشه و شش

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶»

۹۷. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۳ - ۴x^۲ - x + ۴ \ , \ x > -۱$ در بازه‌ی (a, b) زیر محور xها است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۸»

۹۸. اگر عبارت $(a - ۱)x^۲ + (a - ۱)x + ۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a : ۱ < a < ۵\}$ ۲) $\{a : ۰ < a < ۱\}$ ۳) ϕ ۴) $\mathbb{R}$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۱»

دانلود از اپلیکیشن پادرس

جلسه سوم: قدرمطلق

۱۳.۱ خواص قدرمطلق

تابع $f(x)=|x|$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \qquad \text{و یا} \qquad |x|=\sqrt{x^2}$$

از ویژگی‌های مهم قدرمطلق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) $|ab|=|a||b|$

۲) $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|} \quad (b\neq 0)$

۳) $|a+b|\leq |a|+|b|$ (نامساوی مثلثی)

۴) $|a-b|\geq ||a|-|b||$

۵) $|x|<a \longrightarrow x^2<a^2 \longrightarrow -a<x<a \quad (a>0)$

۶) $|x|>a \longrightarrow x^2>a^2 \longrightarrow x<-a$ یا $x>a \quad (a>0)$

۷) $|f(x)|\geq 0 \quad (x\in D_f)$

۸) $-|x|\leq x\leq |x|$

۹) $|-x|=|x|$

نکته ۱۷ اگر a و b هم‌علامت (یا صفر) باشند آن‌گاه $|a|+|b|=|a+b|$ و اگر مختلف‌العلامت باشند آن‌گاه $|a|+|b|>|a+b|$.

تست ۲۵. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\underbrace{|۲x-۱|}_{a+b}<|\underbrace{x-۳}_{b}|+|\underbrace{x+۲}_{a}|$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

پاسخ: ۲ ۳ ۴

طبق نکته‌ی بالا باید $a=x+۲$ و $b=x-۳$ مختلف‌العلامت باشند.

$$|x+۲|+|x-۳|>|۲x-۱| \rightarrow (x+۲)(x-۳)<0 \rightarrow -۲<x<۳$$

اعداد صحیح $-۱, ۰, ۱, ۲$ در نامعادله صدق می‌کنند.

نکته ۱۸ برای حل نامعادله‌ی $|f|<|g|$ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

برای حل نامعادله‌ی $|f|<g$ با فرض $g>0$ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم و جواب به‌دست آمده را با مجموعه جواب $g>0$ اشتراک می‌گیریم.

برای حل نامعادله‌ی $|g|<f$ با فرض $f>0$ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم و جواب به‌دست آمده را با مجموعه جواب $f<0$ اجتماع می‌گیریم. (البته حالت $f=0$ و $g=0$ را جدا بررسی می‌کنیم.)

تست ۲۶. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x+۶|<|۲x-۳|$ به صورت (a,b) است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

دانلود از اپلیکیشن پادرس

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(۲x-۳)^۲ < (x+۶)^۲ \rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ < x^۲ + ۱۲x + ۳۶$$

$$\rightarrow x^۲ - ۸x - ۹ < ۰ \rightarrow -۱ < x < ۹ \rightarrow b - a = ۱۰$$

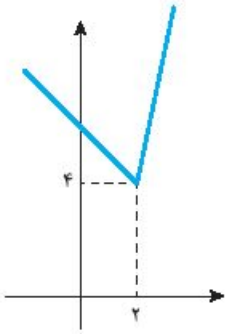
۱۴.۱ رسم توابع قدرمطلقی

برای رسم تابع شامل $|f(x)|$ ریشه‌های $f(x)=۰$ را به‌دست می‌آوریم، $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و در هر بازه‌ای که $f(x)$ مثبت (یا صفر) است به جای $|f(x)|$ خود $f(x)$ و در بقیه بازه‌ها به جای $|f(x)|$ عبارت $-f(x)$ را جایگزین می‌کنیم و سپس تابع چند ضابطه‌ای را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۴ تابع $y = ۲x + |۳x - ۶|$ را رسم کنید.

حل.

$$y = ۲x + |۳x-۶| = \begin{cases} ۲x + ۳x - ۶ = ۵x - ۶ & x \geq ۲ \\ ۲x - (۳x - ۶) = -x + ۶ & x < ۲ \end{cases}$$

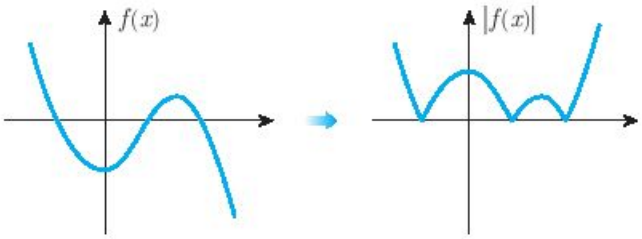


نکته ۱۹ تابع $y = ax + |bx + c|$ با فرض $|a| > |b|$ یک‌به‌یک و برد آن $\mathbb{R}$ است.

رسم تابع قدرمطلقی در حالت خاص

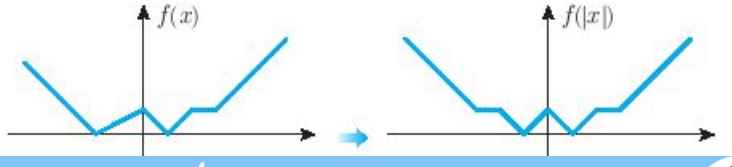
(الف) رسم $y = |f(x)|$

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمتی از نمودار f که زیر محور xها می‌باشد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



(ب) رسم $y = f(|x|)$

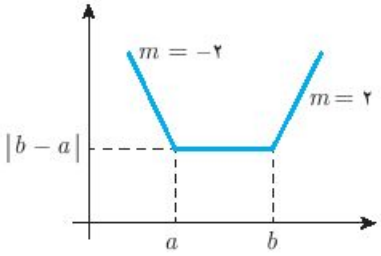
ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. سمت چپ محور yها را حذف می‌کنیم و سپس سمت راست محور yها را در سمت چپ محور yها کپی می‌کنیم (تابع $f(|x|)$ زوج است).



دانلود از اپلیکیشن پادرس

(ج) رسم $y = |x-a| + |x-b|$

نمودار این تابع (معروف به نمودارگلدانی) به صورت زیر است. خط $x = \frac{a+b}{۲}$ محور تقارن و کم‌ترین مقدار تابع برابر $|a-b|$ است.

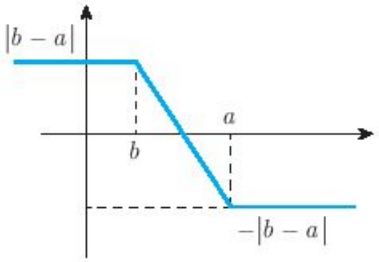


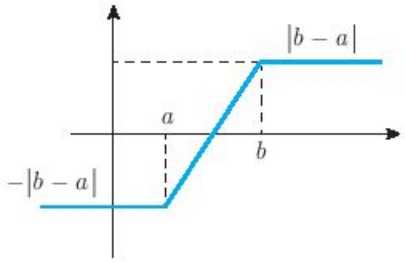
نکته ۲۰ معادله‌ی $|x-a| + |x-b| = k$ سه حالت دارد:

۱) $k < |b-a|$	ریشه ندارد	
۲) $k = |b-a|$	بی‌شمار ریشه دارد	$(a \le x \le b)$
۳) $k > |b-a|$	دو ریشه دارد	$(x = \frac{a+b}{۲} \pm \frac{k}{۲})$

(د) رسم $y = |x-a| - |x-b|$

نمودار این تابع به صورت زیر است. نقطه‌ی $(\frac{a+b}{۲}, ۰)$ مرکز تقارن است. حداقل و حداکثر تابع به ترتیب $-|a-b|$ و $|a-b|$ است.





دقت کنید در $+\infty$ هر دو قدرمطلق حذف می‌شوند و $y = (x-a) - (x-b) = b-a$ به‌دست می‌آید که اگر مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی است.

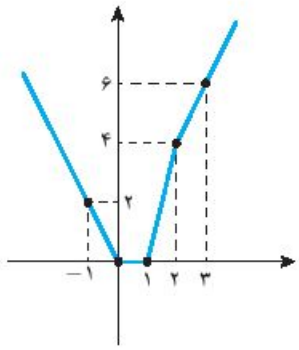
(ه) رسم $y = k_۱|x-a_۱| + k_۲|x-a_۲| + \cdots$

ابتدا نقاط با طول $x = a_۱$ و $x = a_۲$ و ...روی منحنی را روی صفحه‌ی مختصات مشخص می‌کنیم و سپس به‌کمک خط به هم وصل می‌کنیم. نقطه‌ای با طول بزرگ‌تر از تمام ریشه‌های قدرمطلق‌ها را به عنوان کمکی پیدا می‌کنیم و به آخرین نقطه‌ی شکستگی تابع وصل می‌کنیم. این کار را به نقطه‌ای با طول کوچک‌تر از تمام ریشه‌های قدرمطلق‌ها انجام می‌دهیم.

به طور مثال برای رسم $y = ۲|x-۱| + |x| - |x-۲|$ ابتدا ریشه‌های قدرمطلق‌ها را تعیین می‌کنیم و سپس نقطه‌ی $x = ۳$ و $x = -۱$ راکمکی در نظر می‌گیریم.

نقاط شکست
$$\begin{cases} x = ۰ \to y = ۰ \\ x = ۱ \to y = ۰ \\ x = ۲ \to y = ۴ \end{cases}$$

کمکی
$$\begin{cases} x = -۱ \to y = ۲ \\ x = ۳ \to y = ۶ \end{cases}$$



نکته ۲۱ در توابع ق... طق‌هاست.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال ۱۵ وضعیت می‌نیمم و یا ماکزیمم تابع $y = |x| + ۲|x+۱| - |x-۲|$ را مشخص کنید.

حل. وقتی $x \to \pm\infty$ از اعداد در مقابل x صرف‌نظر می‌کنیم:

$$y = |x| + ۲|x| - |x| = ۲|x| = +\infty$$

پس ماکزیمم ندارد. برای یافتن می‌نیمم کافی است فقط ریشه‌ها را بررسی کنیم:

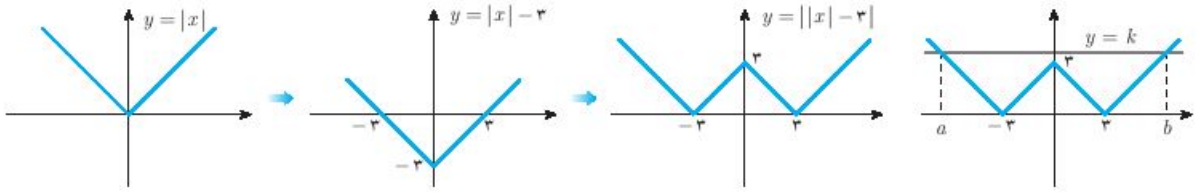
$$\begin{cases} x = ۰ \to y = ۰ \\ x = -۱ \to y = -۲ \\ x = ۲ \to y = ۸ \end{cases} \quad \to \min = -۲$$

تست ۲۷. به ازای چه مقادیری از k مجموعه جواب نامعادله‌ی $||x| - ۳| < k$ به صورت بازه‌ی ناتهی (a, b) می‌باشد؟

۱) $۰ < k < ۳$ ۲) $k \geq ۳$ ۳) $k > ۳$ ۴) $۰ < k \leq ۳$

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

نمودار توابع $y = ||x| - ۳|$ و $y = k$ را رسم می‌کنیم.



اگر $k > ۳$ باشد بازه‌ی (a, b) جواب نامعادله است.

تست ۲۸. به ازای چه مقادیری از a تابع $y = |x - a| - |x + ۳a - ۲|$ صعودی است؟

۱) $a \leq \frac{۱}{۲}$ ۲) $a \geq \frac{۱}{۲}$ ۳) $a \leq ۱$ ۴) $a \geq ۱$

پاسخ: ✓ ۲ ۳ ۴

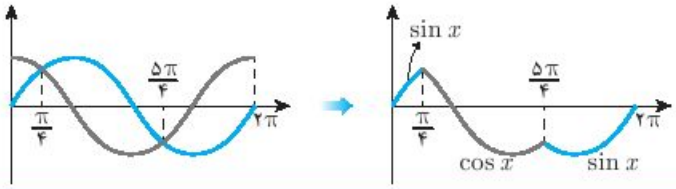
$$\begin{cases} x \to -\infty : y = (-x + a) - (-x - ۳a + ۲) = ۴a - ۲ \\ x \to +\infty : y = (x - a) - (x + ۳a - ۲) = -۴a + ۲ \end{cases} \to ۴a - ۲ \leq -۴a + ۲ \to a \leq \frac{۱}{۲}$$

✓ **نکته ۲۲** برای رسم تابع $y = \min\{f(x), g(x)\}$ ابتدا نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم. نقاط برخورد f و g را می‌یابیم و سپس در هر ناحیه از دو نمودار f و g آن منحنی که پایین‌تر است نگه می‌داریم و دیگری را حذف می‌کنیم.

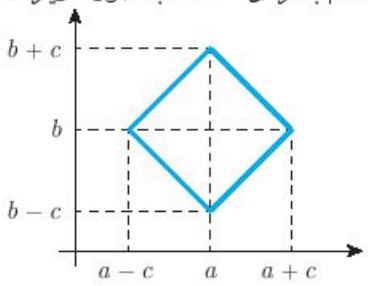
مثال ۱۶ نمودار $y = \min\{\sin x, \cos x\}$ را در بازه‌ی $(۰, ۲\pi)$ رسم کنید.

حل. با توجه به شکل در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴})$ برعکس.

دانلود از اپلیکیشن پادرس



ویژه‌ی علاقه‌مندان: نمودار $|x-a|+|y-b|=c$ با فرض $c>0$ به صورت زیر است.



قطر مربع $2c$ و مساحت آن $2c^2$ است.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۵.۱ تمرین

۹۹. نامعادله‌ی $|x - x^۳| \leq x$ در مجموعه اعداد صحیح دارای چند جواب است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۱۰۰. مجموعه جواب معادله‌ی $|۵x^۲ - ۶x + ۱| = ۶|x| + ۱ + ۵x^۲$ کدام گزینه است؟

۱) $x < -\frac{۱}{۵}$ ۲) $x < \frac{۱}{۵}$ ۳) $x < \frac{۱}{۲}$ ۴) $x \leq ۰$

۱۰۱. اگر داشته باشیم $xy \geq ۰$ چه تعداد از گزاره‌های زیر حتماً صحیح است؟

الف) $|x - y| = |x| - |y|$ ب) $|x + y| = |x| + |y|$ ج) $|x - y| = ||x| - |y||$ د) $|x + y| > |x| + |y|$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۲. اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۵x - ۲ = ۰$ باشند به طوری که $a > ۰$ آنگاه حاصل $|a| - |b| + |a + ۲b|$ کدام است؟

۱) $-۲a - ۳b$ ۲) $a + ۳b$ ۳) b ۴) $-۲a$

۱۰۳. جواب نامعادله‌ی $(|x - ۱| + ۳)(|x - ۱| - ۲) < ۰$ کدام است؟

۱) $۱ < x < ۳$ ۲) $-۳ < x < -۱$ ۳) $-۱ < x < ۳$ ۴) $\begin{cases} x > ۳ \\ x < ۱ \end{cases}$

۱۰۴. اگر $a < ۰ < b$ و $|b| > |a|$ آنگاه حاصل $|a| + |b| + |a + b|$ کدام است؟

۱) $-۲b$ ۲) $۲a$ ۳) $۲a + ۲b$ ۴) $-۲a - ۲b$

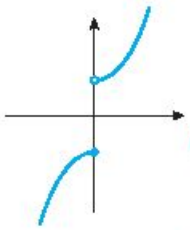
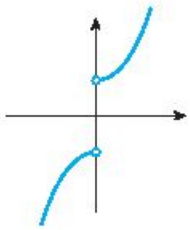
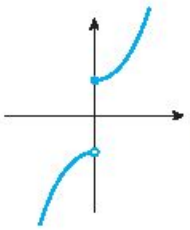
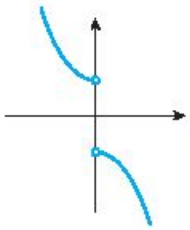
۱۰۵. اگر $a^۲ + b^۲ - ۶ab = ۰$ آنگاه حاصل $|\frac{a + b}{a - b}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۱۰۶. اگر $۰ < x < ۲$ آنگاه حاصل عبارت $|۳x - ۱۰| - |x - ۳| + |۲x - ۵|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۰۷. نمودار تابع $f(x) = |x|(x + \frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۰۸. معادله‌ی $||x| - ۱| = \cos x$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۹. معادله‌ی $|x - ۱| + |x + ۱| = ۳$ دارای چند جواب می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) جواب ندارد.

۱۱۰. معادله‌ی $|x - ۲| + |x + ۴| = a + ۳$ به ازای کدام مقدار a بی‌شمار جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۱. سطح محصور بین منحنی $y = |x| + |x - ۱|$ و خط $y = x + ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۱۲. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-۳|+|x+۳|>۶$ چه تعداد از اعداد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۳. می‌نیمم عبارت $A=|۳x-۳|+|x+۵|-|۳x|+۱$ در کدام گزینه است؟

۱) ۹ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) -۲

۱۱۴. معادله‌ی $|x-۲|+|x+۲|=۵$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) هیچ مقدار ۳) بی‌شمار ۴) سه جواب دارد.

۱۱۵. معادله‌ی $|x-۲|+|۷-x|=۵$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶. معادله‌ی $|x-۲|+|x+۱|=۳\cos x$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۱۱۷. مساحت محدود به نمودار تابع $y=۵-|x-۱|-|x-۳|$ و محور xها چقدر است؟

۱) ۸٫۵ ۲) ۹٫۵ ۳) ۱۰٫۵ ۴) ۱۱٫۵

۱۱۸. مساحت نمودار $|x-۱|+|y+۱|=۸$ چقدر است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

۱۱۹. مساحت محدود به نمودار $y=|x|$ و $x+۳y=a$ برابر ۱۸ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۲۴

۱۲۰. برای هر $a\le k\le b$ خط $y=k$ نمودار تابع $y=۳x+\frac{|x-۱|}{x-۱}$ را قطع نمی‌کند. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۱. مجموع جواب‌های معادله‌ی $|x-۳|+۱=|x+۳|+|x^۲-۹|$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

۱۲۲. کدام خط زیر نمودار $y=۳|x|-|x-۲|$ را در بازه‌ی $[۱,۳]$ قطع می‌کند؟

۱) $y=۱$ ۲) $y=۵$ ۳) $y=۹$ ۴) $y=۰$

۱۲۳. اگر $f(x)=\max\{|۲x|,|x+۱|\}$، آنگاه می‌نیمم تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۲»

۱۲۴. مساحت محدود به نمودار تابع $y=۳|x|+x-۴$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۰»

۱۲۵. با کدام ضابطه $f(x)$، همواره تساوی $f(x)=|f(x)|(-۱)^{[x]}$ برقرار است؟

۱) $\sin \pi x$ ۲) $\cos ۲\pi x$ ۳) $\sin ۲\pi x$ ۴) $\cos ۲\pi x$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۱»

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۶.۱ خواص جزء صحیح

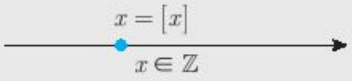
هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد به طوری که تابع روی هرکدام از این بازه‌ها ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند.

تابع جزء صحیح

اگر n عددی صحیح و $n \le x < n+1$ آن‌گاه n را جزء صحیح x می‌نامیم و به صورت $[x] = n$ (در بعضی کتاب‌ها به صورت $\lfloor x \rfloor$) نمایش می‌دهند. در واقع با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$[x] = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$$

نکته ۲۳ $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی (نابیش‌تر از) x است.



از ویژگی‌های مهم جزء صحیح می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) $[f(x)] \in \mathbb{Z}$

۲) $[x] \le x < [x]+1$

۳) $x-1 < [x] \le x$

۴) $0 \le x-[x] < 1$

۵) $k \in \mathbb{Z} \rightarrow [x+k] = [x]+k$

۶) $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

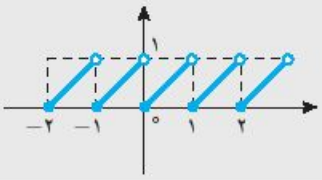
۷) $[x+y] = [x]+[y]$ یا $[x]+[y]+1$

۸) $[2x] = [x]+[x+\frac{1}{2}]$

۹) $0 < \frac{x}{[x]} < 2$

۱۰) $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$

نکته ۲۴ حاصل $x-[x]$ را جزء اعشاری x می‌نامیم بدیهی است که $0 \le x-[x] < 1$ نمودار تابع $y = x-[x]$ به صورت مقابل است.



مثال ۱۷ معادله‌ی $\frac{3}{4}x = [\frac{2}{3}x]$ را حل کنید.

حل. باید $\frac{3}{4}x$ برابر عدد صحیحی باشد. فرض کنید $\frac{3}{4}x = k$ داریم:

$$[\tfrac{2}{3}x] = \tfrac{3}{4}x \rightarrow [\tfrac{2}{3}(\tfrac{4k}{3})] = k \rightarrow [\tfrac{8}{9}k] = k$$

$$\rightarrow k \le \tfrac{8}{9}k < k+1 \rightarrow 9k \le 8k < 9k+9 \rightarrow -9 < k \le 0$$

$$\rightarrow k = -8, -7, -6, \cdots, 0 \rightarrow x = \tfrac{4}{3}(-8), \tfrac{4}{3}(-7), \tfrac{4}{3}(-6), \cdots, \tfrac{4}{3}(0)$$

معادله ۹ جواب دارد که به صورت $-\frac{32}{3}, -\frac{28}{3}, -\frac{24}{3}, \cdots, -\frac{4}{3}, 0$ می‌باشند.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

تست ۲۹. مجموعه‌ی $\{[\frac{۳}{۲}x] \mid |۳x+۱|<۷\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

$$|۳x+۱|<۷ \rightarrow -۷<۳x+۱<۷ \rightarrow -۸<۳x<۶ \rightarrow -۴<\frac{۳x}{۲}<۳$$
$$\rightarrow [\frac{۳x}{۲}] = -۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲$$

تست ۳۰. حاصل عبارت $p=|\frac{۳}{۲}x-[\frac{۳x+۳}{۲}]|$ برابر کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

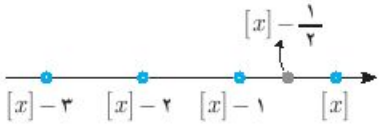
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ✓

از رابطه‌ی $۰ \le a-[a] < ۱$ استفاده می‌کنیم:

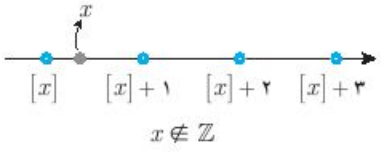
$$۰ \le (\frac{۳x+۳}{۲})-[\frac{۳x+۳}{۲}] < ۱ \xrightarrow{\times -\frac{۳}{۲}} -\frac{۳}{۲} \le \frac{۳x}{۲}-[\frac{۳x+۳}{۲}] < -\frac{۱}{۲}$$
$$\rightarrow \frac{۱}{۲} < |\frac{۳x}{۲}-[\frac{۳x+۳}{۲}]| \le \frac{۳}{۲}$$

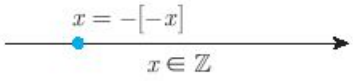
مثال ۱۸ بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{Z} | n \le [x]-\frac{۱}{۲}\} = A$ و کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $B = \{n \in \mathbb{Z} | n \ge x\}$ را بیابید.

حل. عدد حقیقی $\alpha = [x]-\frac{۱}{۲}$ بین دو عدد صحیح $[x]$ و $[x]-۱$ قرار دارد بنابراین بزرگ‌ترین عضو A همان $[x]-۱$ است.



عدد حقیقی x اگر صحیح باشد آنگاه کوچک‌ترین عضو B همان $-[-x]$ است و اگر x صحیح نباشد کوچک‌ترین عضو B همان $[x]+۱$ است که با $-[-x]$ برابر است. پس در هر حالتی کوچک‌ترین عضو B همان $-[-x]$ است. (توجه کنید وقتی $x \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $-[-x]=[x]+۱$)





ویژه‌ی علاقه‌مندان: در حالت کلی اگر n عددی طبیعی باشد رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$[nx] = [x]+[x+\frac{۱}{n}]+[x+\frac{۲}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-۱}{n}]$$

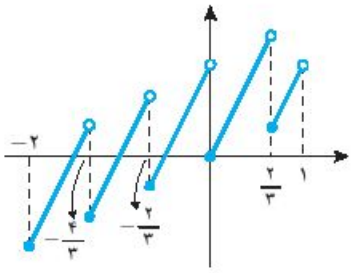
۱۷.۱ رسم جزء صحیح

برای رسم عبارت شامل $[f(x)]$ ابتدا با توجه به محدوده‌ی x، برد تابع f را می‌یابیم و سپس $f(x)$ را بین دو عدد صحیح متوالی (و یا زیرمجموعه‌ی آن) قرار می‌دهیم مثلاً $f(x)<n+۱$ رسم می‌کنیم. دقت کنید که از

دانلود از اپلیکیشن پادرس

روی نامساوی $n \le f(x) < n+1$ باید محدوده‌ی x را هم تعیین کنیم.

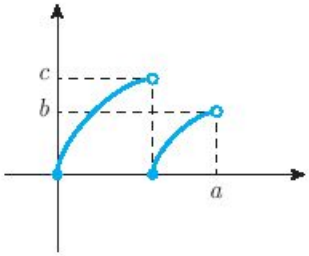
مثال ۱۹ نمودار $y = 2x - [\frac{3}{2}x]$ را در بازه‌ی $(-2, 1)$ رسم کنید.



حل. چون $-2 < x < 1$ پس $-3 < \frac{3}{2}x < \frac{3}{2}$، حال بازه‌ی $(-3, \frac{3}{2})$ را به بازه‌هایی کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم در واقع داخل براکت را بین دو عدد صحیح متوالی قرار می‌دهیم.

$$-3 < \frac{3}{2}x < -2 \to [\frac{3}{2}x] = -3 \to y = 2x + 3 \qquad -2 < x < -\frac{4}{3}$$
$$-2 \le \frac{3}{2}x < -1 \to [\frac{3}{2}x] = -2 \to y = 2x + 2 \qquad -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$$
$$-1 \le \frac{3}{2}x < 0 \to [\frac{3}{2}x] = -1 \to y = 2x + 1 \qquad -\frac{2}{3} < x < 0$$
$$0 \le \frac{3}{2}x < 1 \to [\frac{3}{2}x] = 0 \to y = 2x \qquad 0 \le x < \frac{2}{3}$$
$$1 \le \frac{3}{2}x < \frac{3}{2} \to [\frac{3}{2}x] = 1 \to y = 2x - 1 \qquad \frac{2}{3} \le x < 1$$

تست ۳۱. نمودار تابع $y = \sqrt{x - [x^2]}$ به صورت مقابل است. حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟



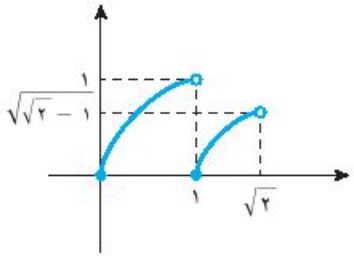
۱) $1 + 2\sqrt{2}$
۲) $3 + \sqrt{2}$
۳) $2 + \sqrt{2}$
۴) $2 + 2\sqrt{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

x نمی‌تواند منفی باشد. x^2 را باید بین دو عدد صحیح متوالی قرار دهیم.

$0 \le x < 1$ و $y = \sqrt{x}$ $\to$ $0 \le x^2 < 1$
$1 \le x < \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{x-1}$ $\to$ $1 \le x^2 < 2$
$\sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$ و $y = \sqrt{x-2}$ $\to$ $2 \le x^2 < 3$ $\to$ زیر رادیکال منفی می‌شود
$\sqrt{3} \le x < 2$ و $y = \sqrt{x-3}$ $\to$ $3 \le x^2 < 4$ $\to$ زیر رادیکال منفی می‌شود

دامنه‌ی این تابع فقط بازه‌ی $[0, \sqrt{2})$ است.



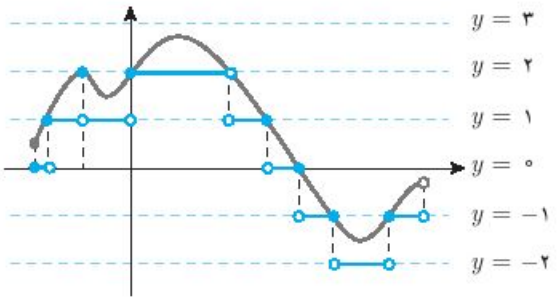
پس $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ و $c = 1$ می‌باشد و لذا $a^2 + b^2 + c^2 = 2 + \sqrt{2}$.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

رسم تابع $y = [f(x)]$

ابتدا منحنی $f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس خطوط افقی با عرض صحیح $(\cdots, y = -۱, y = ۰, y = ۱, y = ۲, \cdots)$ را رسم می‌کنیم. آن قسمت از نمودار f که بین دو خط متوالی قرار دارد را روی خط پایینی تصویر می‌کنیم. نقاط برخورد f با خطوط افقی همان جا توپُر می‌شوند.

در شکل زیر نمودار فرضی f و $[f]$ رسم شده است.

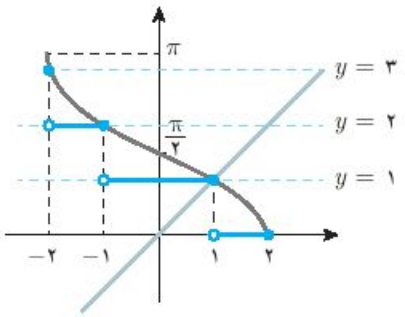


تست ۳۲. معادله‌ی $x = [\cos^{-۱}\frac{x}{۲}]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

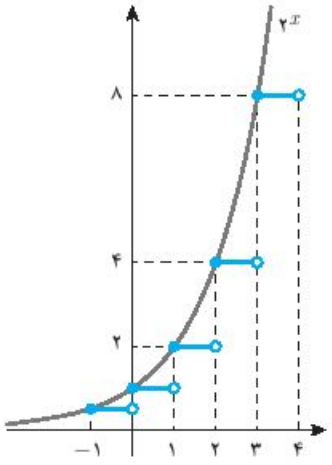
پاسخ: ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

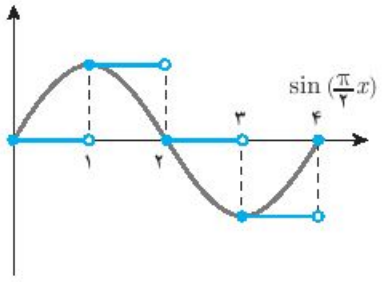
نمودار $y = [\cos^{-۱}\frac{x}{۲}]$ و $y = x$ در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل کمی تقریبی است و π تقریباً ۳ در نظر گرفته شده است.) (نقطه‌ی برخورد $x = ۱$ است.)



ویژه‌ی علاقه‌مندان: برای رسم تابع $y = f([x])$ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس خطوط عمودی $x = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ بین دو خط $x = n$ و $x = n + ۱$ خط افقی $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. (نقاط برخورد توپُر می‌شوند).

به طور مثال نمودار توابع $y = \sin(\frac{\pi[x]}{۲})$ و $y = ۲^{[x]}$ به صورت زیر است.





دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۸.۱ تمرین

۱۲۶. مجموعه‌ی $A = \left\{ [۳x + \frac{۱}{۲}] \,|\, |x + ۱| < ۲ \right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۲۷. حاصل $[\sqrt{۴n^۲ + ۴n}] + [\sqrt{n^۲ + ۲n}]$ با شرط طبیعی بودن n چقدر است؟

۱) $۲n + ۱$ ۲) $۳n$ ۳) $n + ۲$ ۴) $۴n - ۱$

۱۲۸. مجموعه جواب معادله‌ی $[\frac{x}{۵}] - [\frac{-x}{۵}] = ۳$ برابر است با:

۱) $[۵, ۱۵)$ ۲) $[۵, ۱۰)$ ۳) $(۵, ۱۵)$ ۴) $(۵, ۱۰)$

۱۲۹. معادله‌ی $x + ۳[x^۲] = ۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۳۰. اگر $f(x) = [\sin x] + [\cos x]$ حداقل مقدار $f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۱۳۱. معادله‌ی $[x] + [-x] = [۲x] - ۲x$ در بازه‌ی $(۱, \frac{۷}{۲})$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۳۲. معادله‌ی $x^۲ + [x] = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۳. اگر x کمانی حاده و $a = [\frac{۱}{۲} + \tan x + \cot x]$ باشد، آنگاه:

۱) $a \in \mathbb{N} - \{۱\}$ ۲) $a \in \mathbb{N}$ ۳) $a \in \mathbb{N} - \{۱, ۲\}$ ۴) $a \in \mathbb{Z}$

۱۳۴. مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $[x - ۳] + [۲x + ۵] = x + ۷$ کدام است؟

۱) $(۲, ۳)$ ۲) $(۲, ۲/۵)$ ۳) $\{۲\}$ ۴) ϕ

۱۳۵. اگر $[x + \frac{۲}{۳}] - [x - \frac{۱}{۳}] + [x] = ۱$ آنگاه x در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $[۳, ۴)$ ۲) $[۲, ۳)$ ۳) $[۴, ۵)$ ۴) $[۱, ۲)$

۱۳۶. معادله‌ی $\frac{x}{۲} + [\frac{x - ۴}{۲}] = ۳$ چند ریشه دارد؟

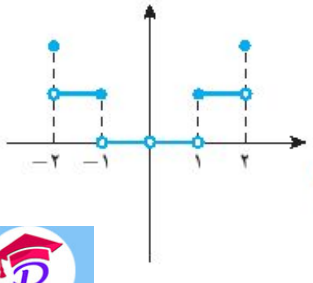
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۷. هرگاه بدانیم $(\sqrt{۲} - ۱)^۸ + (\sqrt{۲} + ۱)^۸ = ۱۱۵۴$ حاصل $[(\sqrt{۲} + ۱)^۸]$ برابر است با:

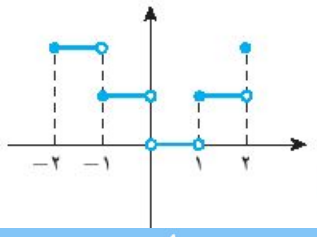
۱) ۱۱۵۳ ۲) ۱۱۵۴ ۳) ۵۶۷ ۴) ۵۷۷

۱۳۸. نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|}([x])$ در فاصله‌ی $[-۲, ۲]$ کدام است؟

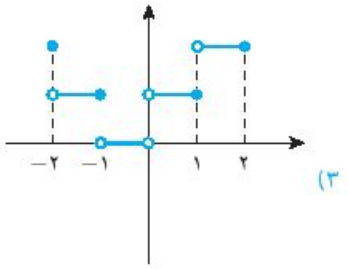
۱)

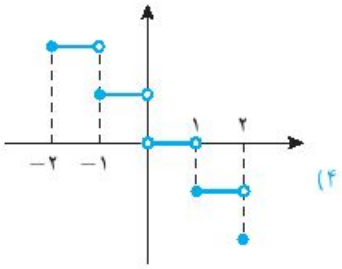


۲)



دانلود از اپلیکیشن پادرس

۳) 

۴) 

۱۳۹. کدام‌یک از اعداد زیر عضو مجموعه‌ی $\{x - \frac{1}{3}[3x] | x \in \mathbb{R}\}$ نمی‌باشد؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{10}$

۱۴۰. معادله‌ی $\frac{1}{[x]+[-x]} = 2x^2 - 5x + 2$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

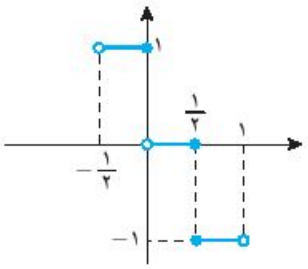
۱۴۱. مجموعه‌ی $\{[\frac{1}{2}x^2 + 1] | x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq 2\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴۲. معادله‌ی $[2x+2] = 2x + 1 + [2x^2 + x]$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۱۴۳. نمودار شکل مقابل مربوط به کدام تابع با ضابطه‌ی داده شده می‌باشد؟



۱) $y = [-2x] + 1$
۲) $y = -[2x] + 1$
۳) $y = [-\frac{1}{2}x] + 1$
۴) $y = -[\frac{1}{2}x] + 1$

۱۴۴. اگر $a \in \mathbb{R}^+$ و $A = [a + \frac{1}{a} + \frac{1}{3}]$ در این صورت:

۱) $A \in \mathbb{N}$ و $A \geq 2$ ۲) $A \in \mathbb{R}^+$ و $1 \leq A \leq \frac{7}{3}$ ۳) $A \in \mathbb{N}$ و $A \geq 3$ ۴) $A \in \mathbb{R}^+$ و $A \geq \frac{7}{3}$

۱۴۵. نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{[2x]}$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) یک پاره‌خط است. ۲) دو پاره‌خط است. ۳) سه پاره‌خط است. ۴) چهار پاره‌خط است.

۱۴۶. حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{50}{2^n}]$ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۱ ۴) ۴۷

۱۴۷. حاصل $[(1+\sqrt{2})^4]$ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۱۴۸. حاصل $[\frac{3x+2}{x+1}]$ به ازای $x = 1383$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) 3×1383 ۴) 2×1383

۱۴۹. معادله‌ی $[\sin x] = [x]$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ۲) بی‌شمار

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۵۰. اگر $A = \lfloor x - [x + \frac{۳}{۲}] \rfloor$ آن‌گاه محدوده‌ی A کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۲) $[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$ ۴) $[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$

۱۵۱. نامعادله‌ی $۳[x^۲]^۲ - ۵[x^۲] \leq -۲$ در مجموعه اعداد صحیح دارای چند جواب است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۱۵۲. اگر $[x + y] = [x] + [y]$ آن‌گاه $x + y - ([x] + [y])$ کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱٫۲ ۲) ۰٫۷ ۳) ۱٫۱ ۴) $-۰٫۳$

۱۵۳. معادله‌ی $[x] + [-x] = \cos x$ چند ریشه دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۵۴. معادله‌ی $\frac{۳}{۴}x = [\frac{۲}{۳}x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵۵. مساحت ناحیه‌ی $A = \{(x, y) | [\frac{x}{۲}][۳y] = ۱\}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۱۵۶. معادله‌ی $[x] + [۲x] + [۳x] = ۱$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۱۵۷. نمودار تابع $f(x) = ۲x + [x]$ کدام خط زیر را قطع نمی‌کند؟

۱) $y = \frac{۱}{۲}$ ۲) $y = \frac{۳}{۲}$ ۳) $y = \frac{۵}{۲}$ ۴) $y = \frac{۷}{۲}$

۱۵۸. اگر $[y] + x = ۵٫۲$ و $y - [x] = ۳٫۴$، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱) ۴٫۶ ۲) ۵٫۶ ۳) ۶٫۶ ۴) ۶

۱۵۹. معادله‌ی $۲x - [۲x] = \frac{۱}{۲}$ چند جواب در بازه‌ی $[\sqrt{۲}, \sqrt{۱۰}]$ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۱»

۱۶۰. جواب معادله‌ی $[\frac{۲x - ۱}{x}] = ۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲} < x \leq -۱$ ۲) $-۱ < x \leq ۰$ ۳) $-۲ \leq x < -۱$ ۴) $۱ \leq x < ۲$

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۱»

۱۶۱. حاصل عبارت جزء صحیح $[\log_{\sqrt{۳}} \sqrt{۵}]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۸»

دانلود از اپلیکیشن پادرس

جلسه پنجم: بخش‌پذیری، بسط دوجمله‌ای

۱۹.۱ تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند در این صورت چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $K(x)$ و $R(x)$ وجود دارند به طوری که درجه‌ی $R(x)$ از درجه‌ی $Q(x)$ کم‌تر باشد و رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$P(x) = Q(x)K(x) + R(x)$$

نکته ۲۵ اگر درجه‌ی مقسوم m و درجه‌ی مقسوم‌علیه n باشد، درجه‌ی خارج‌قسمت $m - n$ و درجه‌ی باقی‌مانده حداکثر $n - ۱$ است.

نکته ۲۶ باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $R(x)$ بر $x - a$ برابر است با $P(a)$.
در واقع مقدار مقسوم‌علیه به ازای $x = a$ همان باقی‌مانده‌ی تقسیم بر $x - a$ است.

به طور مثال باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^۵ - ۴x^۳ + x^۲ - ۳$ بر $x - ۱$ برابر است با:

$$R = P(۱) = ۱ - ۴ + ۱ - ۳ = -۵$$

نکته ۲۷ اگر $P(a) = ۰$ آن‌گاه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است.

تست ۳۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای فرد $P(x)$ بر $(x + ۲)(x - ۱)$ برابر $۵x - ۸$ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - ۲$ کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) ۱۸ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

$$P(x) = (x - ۱)(x + ۲)K(x) + ۵x - ۸$$

$$x = -۲ \to P(-۲) = -۱۸ \xrightarrow{P(x) \text{ فرد}} P(۲) = ۱۸$$

تساوی آخر نشان می‌دهد باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - ۲$ برابر ۱۸ است.

تست ۳۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - ۱$ و $x + ۳$ به ترتیب برابر ۲ و ۶ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x - ۱)(x + ۳)$ کدام است؟

۱) $x + ۹$ ۲) $x + ۱$ ۳) $-x + ۳$ ۴) $-x + ۷$

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

روش اول: طبق فرض مسئله، $P(۱) = ۲$ و $P(-۳) = ۶$ می‌باشد. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x - ۱)(x + ۳)$ را $ax + b$ فرض می‌کنیم.

$$P(x) = (x - ۱)(x + ۳)K(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} x = ۱ \to P(۱) = a + b \to a + b = ۲ \\ x = -۳ \to P(-۳) = -۳a + b \to -۳a + b = ۶ \end{cases} \to \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۳ \end{cases}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $x+3-$ می‌باشد.

روش دوم: گزینه‌ای جواب است که به ازای $x=1$ برابر ۲ و به ازای $x=-3$ برابر ۶ گردد. فقط گزینه‌ی ۳ چنین است.

نکته ۲۸ برای یافتن باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^n-a، ابتدا $P(x)$ را بر حسب $y=x^n$ می‌نویسیم و سپس به جای x^n عدد a را جایگزین می‌کنیم.

مثال ۲۰ باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^5+3x^4-x^3+2x-1$ بر x^2+1 را بیابید.

حل.

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$$

$$p(x)=(x^2)^2-(x^2)x+2x-1$$

$$P(x^2=-1)=(-1)^2x+3(-1)^2-(-1)x+2x-1=x+3+x+2x-1=4x+2$$

تست ۳۵. چندجمله‌ای $P(x)=x^5+ax^4+bx^3-x^2-2$ بر x^3-1 بخش‌پذیر است. اگر $Q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم باشد مقدار $Q(-1)$ چقدر است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

برای یافتن باقی‌مانده به جای x^3 عدد ۱ را جایگزین می‌کنیم:

$$R(x)=x^3x^2+ax^3x+bx^3-x^2-2=x^2+ax+b-x^2-2=ax+b-2$$

باقی‌مانده برابر صفر است در نتیجه:

$$a=0\ ,\ b=2$$

$$P(x)=x^5+2x^3-x^2-2=(x^3-1)Q(x)$$

$$x=-1 \rightarrow -1-2-1-2=-2Q(-1) \rightarrow Q(-1)=3$$

تست ۳۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم x^{1393} بر x^2+x+1 کدام است؟

۱) $-x-1$ ۲) $x-1$ ۳) x ۴) $-x$

پاسخ: ۱ ۲ ✓ ۴

روش اول:

$$x^{1393}=(x^2+x+1)Q(x)+R(x)$$

$$(x-1)x^{1393}=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+(x-1)R(x)$$

$$x^{1394}-x^{1393}=(x^3-1)Q(x)+(x-1)R(x)$$

$(x-1)R(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{1394}-x^{1393}$ بر x^3-1 است. برای یافتن باقی‌مانده به جای x^3 عدد ۱ را جایگزین می‌کنیم.

$$\text{باقی‌مانده}=(x-1)R(x)=(x^3)^{464}x^2-(x^3)^{464}x$$

$$x^2-x=(x-1)x$$

پس $R(x)=x$ ا

دانلود از اپلیکیشن پادرس

روش دوم: از همنهشتی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $m = x^۲ + x + ۱$.

$$x^۳ - ۱ = (x-۱)(x^۲ + x + ۱) \to x^۳ \overset{m}{\equiv} ۱ \to (x^۳)^{۴۶۴} \overset{m}{\equiv} ۱^{۴۶۴}$$

$$\to x^{۱۳۹۲} \overset{m}{\equiv} ۱ \to x^{۱۳۹۳} \overset{m}{\equiv} x \to \text{باقی‌مانده برابر } x \text{ است}$$

نکته ۲۹ چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است.
چندجمله‌ای $x^n + a^n$، وقتی n فرد باشد، بر $x + a$ بخش‌پذیر است.

نکته ۳۰ اتحادهای زیر برقرار است:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-۱} + x^{n-۲}a + \cdots + xa^{n-۲} + a^{n-۱})$$

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-۱} - x^{n-۲}a + \cdots - xa^{n-۲} + a^{n-۱}) \qquad (n \text{ فرد})$$

در حالت خاص:

$$x^n - ۱ = (x-۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱)$$

$$x^n + ۱ = (x+۱)(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱) \qquad (n \text{ فرد})$$

۲۰.۱ بسط دوجمله‌ای

برای عدد صحیح و نامنفی n عبارت $(a+b)^n$ را دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی (نیوتن) و بسط آن را بر حسب a و b بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین کاشانی (نیوتن) می‌نامند.

نکته ۳۱ بسط دوجمله‌ای نیوتن به صورت زیر است:

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n b^۰ + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b^۱ + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-۱}a^۱ b^{n-۱} + \binom{n}{n}a^۰ b^n$$

به طور مثال:

$$(a+b)^۶ = a^۶ + ۶a^۵b + ۱۵a^۴b^۲ + ۲۰a^۳b^۳ + ۱۵a^۲b^۴ + ۶ab^۵ + b^۶$$
$$(a-b)^۶ = a^۶ - ۶a^۵b + ۱۵a^۴b^۲ - ۲۰a^۳b^۳ + ۱۵a^۲b^۴ - ۶ab^۵ + b^۶$$

دقت کنید بسط $(a-b)^n$ شبیه $(a+b)^n$ است و فقط جملات یکی در میان مثبت و منفی است.

نکته ۳۲ جمله‌ی عمومی بسط $(a+b)^n$ به صورت $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ می‌باشد (در کتاب‌های گذشته به آن جمله‌ی $(k+۱)$ام می‌گفتند).

تست ۳۷. ضریب جمله‌ی $a^۲b^۵$ در بسط $(a-۲b)^۷$ کدام است؟

۱) ۳۳۶ ۲) -۳۳۶ ۳) ۶۷۲ ۴) -۶۷۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳

دانلود از اپلیکیشن پادرس

جمله‌ی عمومی به صورت $\binom{۷}{k}a^{۷-k}(-۲b)^k$ می‌باشد. به ازای $k=۵$ داریم:

$$\text{جواب} = \binom{۷}{۵}a^۲(-۲b)^۵ = ۲۱a^۲(-۳۲b^۵) = -۶۷۲a^۲b^۵$$

تست ۳۸. جمله‌ی مستقل از x در بسط $(\frac{۱}{\sqrt{x}} - ۲x)^۶$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۰

پاسخ: ✓ ۲ ۳ ۴

$$\text{جمله‌ی عمومی} = \binom{۶}{k}a^{۶-k}b^k = \binom{۶}{k}(۲x)^{۶-k}(-\frac{۱}{\sqrt{x}})^k$$

اگر توان x صورت $(۶-k)$ با توان x مخرج $(\frac{k}{۲})$ برابر باشد آن‌گاه جمله‌ی فاقد x به‌دست می‌آید پس:

$$۶-k=\frac{k}{۲} \to k=۴ \to \text{جمله} = \binom{۶}{۴}(۲x)^۲(\frac{-۱}{\sqrt{x}})^۴ = ۱۵\times ۴ = ۶۰$$

مثال ۲۱ مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که $(۲-\sqrt{۳})^n = ۳۶۲ - a\sqrt{۳}$.

حل. روش اول: جملات بسط‌های $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ یکی در میان برابر و قرینه هستند پس:

$$\begin{cases}(۲-\sqrt{۳})^n = ۳۶۲ - a\sqrt{۳}\\(۲+\sqrt{۳})^n = ۳۶۲ + a\sqrt{۳}\end{cases}$$

ضرب می‌کنیم : $(۲-\sqrt{۳})^n(۲+\sqrt{۳})^n = ۳۶۲^۲ - ۳a^۲$

$$\to (۴-۳)^n = ۳۶۲^۲ - ۳a^۲ \to ۱ = ۳۶۲^۲ - ۳a^۲ \to a^۲ = \frac{۳۶۲^۲-۱}{۳} \to a = ۲۰۹$$

روش دوم:

$$۰ < ۲-\sqrt{۳} < ۱ \to ۰ < (۲-\sqrt{۳})^n < ۱ \to ۰ < ۳۶۲ - a\sqrt{۳} < ۱$$

$$\to \frac{۳۶۱}{\sqrt{۳}} < a < \frac{۳۶۲}{\sqrt{۳}} \to ۲۰۸/۰۰۰ < a < ۲۰۹/۰۰۰ \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a = ۲۰۹$$

۲۱.۱ خواص بسط نیوتن

۱. ضرایب بسط نیوتن از دو طرف برابرند به بیان دیگر $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. به طور مثال در بسط $(a+b)^۶$، ضریب $a^۲b^۴$ با $a^۴b^۲$، ضریب $ab^۵$ با $a^۵b$ و ... برابر است.

$$(a+b)^۶ = ۱a^۶b^۰ + ۶a^۵b^۱ + ۱۵a^۴b^۲ + ۲۰a^۳b^۳ + ۱۵a^۲b^۴ + ۶ab^۵ + ۱a^۰b^۶$$

۲. هر جمله از بسط $(a+b)^n$ به صورت ka^ib^j است به طوری که $i+j=n$ مثلاً در بسط $(a+b)^۹$ جملاتی مثل $ab^۶$، $a^۷b^۳$، $a^۴b^۲$، ... نداریم.
به طور مشابه هر جمله از بسط $(a+b+c)^n$ به صورت $ka^ib^jc^s$ است به طوری که $i+j+s=n$.

۳. تعداد جملات بسط $(a+b)^n$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۴. برای یافتن مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای به جای تمام متغیرها ۱ را جایگزین می‌کنیم. در این صورت با جایگزین کردن $a = b = ۱$ در بسط‌های $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ به روابط زیر می‌رسیم.

نکته ۳۳

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$
$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \cdots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \binom{n}{۵} + \cdots = ۲^{n-۱}$$

تست ۳۹. بسط $(x^۲+x+۱)^{۱۰} + (x^۲-x+۱)^{۱۰}$ چند جمله دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

تابع $f(x) = (x^۲+x+۱)^{۱۰} + (x^۲-x+۱)^{۱۰}$ زوج است $\big(f(-x) = f(x)\big)$ پس بسط داده شده فاقد x با توان فرد است به بیان دیگر بسط مورد نظر شامل جملات $x^{۲۰}, x^{۱۸}, x^{۱۶}, \cdots, x^۰$ است که ۱۱ جمله است.

تست ۴۰. جواب معادله‌ی $\sum_{k=۰}^{۱۷} \binom{۱۷}{k} ۳^k = x^{۳۴}$ کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۳ ۳) $\pm\sqrt{۳}$ ۴) $\pm\sqrt{۲}$

پاسخ: ۱ ✓ ۳ ۴

$$\sum_{k=۰}^{۱۷} \binom{۱۷}{k} ۳^k = \binom{۱۷}{۰} ۳^۰ + \binom{۱۷}{۱} ۳^۱ + \cdots + \binom{۱۷}{۱۷} ۳^{۱۷}$$
$$= (۱+۳)^{۱۷} = ۴^{۱۷} = ۲^{۳۴}$$

پس $x = \pm ۲$ می‌باشد.

۲۲.۱ مثلث خیام ـ پاسکال

ضرایب بسط $(a+b)^n$ همان اعداد واقع در سطر $(n+۱)$ام مثلث خیام ـ پاسکال است. بنابراین اعداد سطر $(n+۱)$ام همان $\binom{n}{۰}$، $\binom{n}{۱}$، $\binom{n}{۲}$، ... ، $\binom{n}{n}$ می‌باشند که جمع آن‌ها ۲^n است.

دقت کنید هر عدد واقع در سطر $(n+۱)$ام از مجموع دو عدد بالای خود واقع در سطر n ام به‌دست می‌آید (به جز ابتدا و انتها که همواره ۱ است).

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱

دانلود از اپلیکیشن پادرس

ویژه‌ی علاقه‌مندان: هر جمله‌ی بسط $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$ به صورت $a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_m^{x_m}$ است به طوری که $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$

بنابراین:

اولاً: تعداد جملات بسط برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ یعنی $\binom{n+m-1}{m-1}$

ثانیاً: ضریب جمله‌ی $a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_m^{x_m}$ برابر است با $\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_m!}$ و یا $\binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\binom{n-x_1-x_2}{x_3}\cdots\binom{x_m}{x_m}$.

مثلاً ضریب جمله‌ی ab^2c^3 در بسط $(a+b+c)^6$ برابر است با $\frac{6!}{1!2!3!}$ و یا $\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3}$ و تعداد جملات بسط $(a+b+c)^6$ برابر است با $\binom{8}{2}$.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲۳.۱ تمرین

۱۶۲. چنانچه تابع f فرد باشد و بر $x-3$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی f بر عبارت x^2-9 چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۶۳. چندجمله‌ای $x^5+2x^4+ax^2-bx+1$ بر x^2+1 بخش‌پذیر است. در این صورت $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -2 ۴) ۴

۱۶۴. اگر $f(-x)+2f(x)=x^3$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-1 برابر $x+2$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۶۶. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-9 مساوی $2x+3$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x+2)$ بر $(x-1)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) صفر ۴) ۹

۱۶۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^4-x^2 برابر x^3+3x^2+x+1 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x+1)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۶ ۴) ۲

۱۶۸. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $2x+5$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۸

۱۶۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{25}-3x^{13}+x^8+x^6+10$ بر x^2+1 کدام است؟

۱) $3x-12$ ۲) $12-3x$ ۳) $10-2x$ ۴) $2x-10$

۱۷۰. چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ در تساوی‌های $g(1)=-5$ و $f(x+6)=g(x-1)+5$ چندجمله‌ای $f(x)$ بر کدام عبارت زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $x-8$ ۲) $x-7$ ۳) $x-2$ ۴) $x-5$

۱۷۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{29}+2$ بر x^2+x+1 کدام است؟

۱) $1+x$ ۲) $1-x$ ۳) $2-x$ ۴) $2+x$

۱۷۲. با فرض $(2-\sqrt{3})^n=362-b\sqrt{3}$ مقدار b کدام است؟

۱) ۱۸۹ ۲) ۲۰۹ ۳) ۱۹۹ ۴) ۲۱۹

۱۷۳. مجموع ضرایب بسط $(a+b)^{2k+1}$ از مجموع ضرایب بسط $(a+b)^{k+4}$، ۲۵۶ واحد بیش‌تر است. مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۷۴. به ازای کدام مقدار n ضریب‌های x و x^2 و x^3 در بسط $(1+x)^n$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی‌اند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۷۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم x^3+mx^2+nx+1 بر x^2-m برابر ۱۰ است. حاصل mn کدام است؟

۱) ۹ ۲) -3

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱۷۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای اکیداً صعودی $f(x)$ بر $x-2$ برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(3x-1)+3f^{-1}(2x+3)$ بر $x-1$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۱۷۷. به ازای کدام مقدار a عبارت $x^9-3x^6+2x^4-ax^3+2x$ بر x^3+1 بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای درجه سوم $P(x)$ با ضرایب صحیح بر x، $x+1$ و $x+5$ برابر ۳ است. مجموع ضرایب این چندجمله‌ای کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۱۷۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای فرد $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر ۵ و ۸ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^3+x^2-2x کدام است؟

۱) $-x^2+6x$ ۲) $3x^2+2x$ ۳) $-x+6$ ۴) $3x+2$

۱۸۰. چندجمله‌ای $(x^2-x+1)^9+(x^2+x+1)^9$ چند جمله دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۸۱. جمله‌ی فاقد x در عبارت $(x^2-\frac{2}{x}+3)^5$ کدام است؟

۱) ۱۰۸۰ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۳۲۳ ۴) ۸۴۳

۱۸۲. مجموع ضرایب جملاتی از بسط $(x^2-\frac{1}{x^3})^5$ که توان x در آن جملات منفی است کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۶- ۴) ۶

۱۸۳. اگر باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $x(x-2)(x+2)$ برابر x^2+3x+1 باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر $ax+b$ باشد $a+b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۶»

۱۸۴. عبارت $x^4+4ax^2+2bx+1$ بر x^2-4 بخش‌پذیر است $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{15}{8}$ ۲) $-\frac{17}{16}$ ۳) $\frac{17}{16}$ ۴) $\frac{15}{8}$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۶»

۱۸۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $x^{13}+3x^2+1$ بر x^2-x+1 چقدر است؟

۱) $2x-2$ ۲) $4x+2$ ۳) $4x-2$ ۴) $2x+2$

«آزاد ـ ریاضی ـ ۸۹»

۱۸۶. اگر عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر x^2-1 کدام است؟

۱) $-3x-6$ ۲) $-2x+1$ ۳) $2x+4$ ۴) $3x-4$

«سراسری ـ ریاضی ـ ۸۹»

۱۸۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-4 برابر $x-2$ و بر x^2-2x-1 برابر A و بر $x+2$ برابر B باشد، آنگاه $A-B$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۸-

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۰»

۱۸۸. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2+3x+1$ باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x برابر $ax+b$ باشد، آنگاه $2a+b$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹

دانلود از اپلیکیشن پادرس

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۰»

۱۸۹. اگر n یک عدد طبیعی باشد $(\sqrt{۲}+۱)^{۲n} = ۹۹ + b\sqrt{۲}$، آیا نتیجه می‌شود که $(۳ - ۲\sqrt{۲})^{n} = ۹۹ - b\sqrt{۲}$، در صورت نتیجه‌گیری عدد b کدام است؟

۱) نتیجه نمی‌شود. ۲) ۷۰ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

«سراسری ـ ریاضی ـ ۹۱»

۱۹۰. در بسط $(\sqrt{x} + \frac{۱}{x})^{۹}$ ضریب جمله‌ی مستقل از x کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۹ ۳) ۸۴ ۴) جمله‌ی مستقل از x ندارد.

«آزاد ـ ریاضی ـ ۹۱»

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲۴.۱ پاسخ کلیدی تمرین‌های فصل اول

۱	۴	۴۱	۴	۸۱	۴	۱۲۱	۱	۱۶۱	۳
۲	۴	۴۲	۳	۸۲	۴	۱۲۲	۳	۱۶۲	۴
۳	۳	۴۳	۳	۸۳	۴	۱۲۳	۴	۱۶۳	۱
۴	۴	۴۴	۱	۸۴	۴	۱۲۴	۳	۱۶۴	۳
۵	۱	۴۵	۱	۸۵	۴	۱۲۵	۱	۱۶۵	۴
۶	۴	۴۶	۳	۸۶	۱	۱۲۶	۳	۱۶۶	۳
۷	۴	۴۷	۴	۸۷	۳	۱۲۷	۴	۱۶۷	۳
۸	۱	۴۸	۱	۸۸	۳	۱۲۸	۳	۱۶۸	۳
۹	۱	۴۹	۳	۸۹	۴	۱۲۹	۴	۱۶۹	۳
۱۰	۱	۵۰	۳	۹۰	۳	۱۳۰	۳	۱۷۰	۱
۱۱	۳	۵۱	۳	۹۱	۳	۱۳۱	۳	۱۷۱	۲
۱۲	۱	۵۲	۱	۹۲	۳	۱۳۲	۴	۱۷۲	۲
۱۳	۳	۵۳	۱	۹۳	۳	۱۳۳	۱	۱۷۳	۱
۱۴	۱	۵۴	۱	۹۴	۳	۱۳۴	۳	۱۷۴	۱
۱۵	۳	۵۵	۳	۹۵	۳	۱۳۵	۴	۱۷۵	۳
۱۶	۱	۵۶	۳	۹۶	۳	۱۳۶	۱	۱۷۶	۳
۱۷	۱	۵۷	۳	۹۷	۳	۱۳۷	۱	۱۷۷	۳
۱۸	۱	۵۸	۲	۹۸	۳	۱۳۸	۳	۱۷۸	۲
۱۹	۳	۵۹	۳	۹۹	۱	۱۳۹	۴	۱۷۹	۳
۲۰	۳	۶۰	۳	۱۰۰	۳	۱۴۰	۳	۱۸۰	۲
۲۱	۱	۶۱	۱	۱۰۱	۳	۱۴۱	۱	۱۸۱	۱
۲۲	۱	۶۲	۳	۱۰۲	۱	۱۴۲	۴	۱۸۲	۳
۲۳	۱	۶۳	۳	۱۰۳	۳	۱۴۳	۱	۱۸۳	۱
۲۴	۳	۶۴	۳	۱۰۴	۱	۱۴۴	۱	۱۸۴	۳
۲۵	۳	۶۵	۳	۱۰۵	۱	۱۴۵	۳	۱۸۵	۳
۲۶	۱	۶۶	۱	۱۰۶	۳	۱۴۶	۴	۱۸۶	۱
۲۷	۱	۶۷	۴	۱۰۷	۳	۱۴۷	۱	۱۸۷	۱
۲۸	۱	۶۸	۴	۱۰۸	۳	۱۴۸	۱	۱۸۸	۳
۲۹	۳	۶۹	۱	۱۰۹	۳	۱۴۹	۱	۱۸۹	۳
۳۰	۱	۷۰	۱	۱۱۰	۳	۱۵۰	۳	۱۹۰	۳
۳۱	۱	۷۱	۱	۱۱۱	۳	۱۵۱	۱		
۳۲	۱	۷۲	۳	۱۱۲	۴	۱۵۲	۴		
۳۳	۴	۷۳	۳	۱۱۳	۳	۱۵۳	۴		
۳۴	۳	۷۴	۴	۱۱۴	۱	۱۵۴	۴		
۳۵	۳	۷۵	۴	۱۱۵	۳	۱۵۵	۴		
۳۶	۱	۷۶	۳	۱۱۶	۳	۱۵۶	۴		
۳۷	۱	۷۷	۳	۱۱۷	۳	۱۵۷	۳		
۳۸	۱	۷۸	۳	۱۱۸	۱	۱۵۸	۴		
۳۹	۳	۷۹	۴	۱۱۹	۳	۱۵۹	۱		
۴۰	۴	۸۰	۱	۱۲۰	۳	۱۶۰	۱		

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۲۵.۱ جواب تمرین‌ها

۱. ۱ ۲ ✓ ۳ ۴

$$۲x(nx-۴)-x^۲+۱۶=۰$$
$$\Rightarrow (۲n-۱)x^۲-۸x+۱۶=۰$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Rightarrow \Delta<۰$

$$\Rightarrow ۶۴-۶۴(۲n-۱)<۰$$
$$\Rightarrow ۱-(۲n-۱)<۰ \Rightarrow n>۱ \Rightarrow n\geq ۲$$

۲. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

$$\sqrt{\frac{x'}{x''}}+\sqrt{\frac{x''}{x'}}=\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}$$
$$=\frac{x'+x''}{\sqrt{x'x''}}=\frac{۳}{\sqrt{۱}}=۳$$

توجه کنید که $x'+x''=-\frac{b}{a}=۳$ و $x'x''=\frac{c}{a}=۱$ بنابراین هر دو ریشه مثبت می‌باشند و جدا کردن رادیکال‌های صورت و مخرج مجاز است. اگر هر دو ریشه منفی بود روش زیر صحیح است:

$$A=\sqrt{\frac{x'}{x''}}+\sqrt{\frac{x''}{x'}}$$
$$\Rightarrow A^۲=\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}+۲$$
$$=\frac{x'^۲+x''^۲}{x'x''}+۲$$
$$=\frac{s^۲-۲p}{p}+۲=\frac{۹-۲}{۱}+۲=۹$$
$$\Rightarrow A=\sqrt{۹}=۳$$

۳. ۱ ۲ ✓ ۳ ۴

می‌دانیم $\alpha=\beta^۳$ پس:

$$\alpha.\beta=\beta^۳\cdot\beta=۴ \Rightarrow ۴=\beta^۴ \Rightarrow \beta=\pm\sqrt{۲}$$

ریشه را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$x^۲+\sqrt{۲}mx+۴=۰$$
$$\xrightarrow{x=\pm\sqrt{۲}} ۲\pm ۲m+۴=۰ \Rightarrow m=\pm ۳$$

۴. ۱ ۲ ✓ ۳ ۴

α را در معادله صدق می‌دهیم:

$$x=\alpha \Rightarrow \alpha^۲+۲\alpha-۱=۰ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۳+۲\alpha^۲-\alpha=۰$$
$$\Rightarrow \alpha^۳+۲\alpha^۲=\alpha$$

به طور مشابه $\beta^۳+۲\beta^۲=\beta$ پس داریم:

$$\overbrace{(\alpha^۳+۲\alpha^۲+m)}^{\alpha}\overbrace{(\beta^۳+۲\beta^۲+m)}^{\beta}=۲$$
$$\Rightarrow \underbrace{\alpha\beta}_{-۱}+m\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-۲}+m^۲=۲$$
$$\Rightarrow -۱-۲m+m^۲=۲ \Rightarrow m=۳ \text{ یا } -۱$$

۵. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

α و β را ریشه‌های $x^۲+۲x-۱=۰$ فرض کنید پس $\alpha+\beta=-۲$ و $\alpha\beta=-۱$. ریشه‌های معادله‌ی جدید $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ می‌باشند.

$$\begin{cases} s=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ \quad =-۸-۳(-۱)(-۲)=-۱۴ \\ p=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=(-۱)^۳=-۱ \end{cases}$$

معادله‌ی جدید : $x^۲-sx+p=۰ \Rightarrow x^۲+۱۴x-۱=۰$

۶. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: اگر α و β ریشه‌های $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند آن‌گاه $\alpha+\beta=۳$ و $\alpha\beta=۱$ ریشه‌های معادله‌ی جدید ۳α و ۳β می‌باشد.

$$\begin{cases} s=۳\alpha+۳\beta=۳(\alpha+\beta)=۹ \\ p=(۳\alpha).(۳\beta)=۹(\alpha\beta)=۹ \end{cases}$$

معادله‌ی جدید : $x^۲-sx+p=۰ \Rightarrow x^۲-۹x+۹=۰$

روش دوم: α ریشه‌ی $x^۲-۳x+۱=۰$ و $x=۳\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی جدید است. $\alpha=\frac{x}{۳}$ را در معادله‌ی قدیم جایگزین می‌کنیم:

$$x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۳\alpha+۱=۰$$
$$\xrightarrow{\alpha=\frac{x}{۳}} (\frac{x}{۳})^۲-۳(\frac{x}{۳})+۱=۰$$
$$\Rightarrow x^۲-۹x+۹=۰$$

۷. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} x'-x''=\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \\ x'x''=\frac{c}{a} \end{cases}$$
$$\xrightarrow{x'-x''=x'x''} \frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{c}{a} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=c$$
$$x',x''=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-b\pm c}{۲a}$$

۸. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} x_۱=\sin\alpha \\ x_۲=\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow x_۱^۲+x_۲^۲=۱ \Rightarrow s^۲-۲p=۱$$
$$\Rightarrow (\frac{۲m}{۴})^۲-۲(-\frac{۱}{۴})=۱ \Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \log_2 A + \log_2 B = \frac{3}{2}$$
$$\log_2 AB = \frac{3}{2} \Rightarrow AB = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

۱۰. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^2 + 2 = t \Rightarrow f(t) = (t-2)^2 + 3(t-2) = t^2 - t - 2$$
$$t = 2x + 1 \Rightarrow f(2x+1) = (2x+1)^2 - (2x+1) - 2$$
$$= 4x^2 + 2x - 2$$

مجموع ریشه‌های معادله‌ی آخر $-\frac{2}{4}$ است.

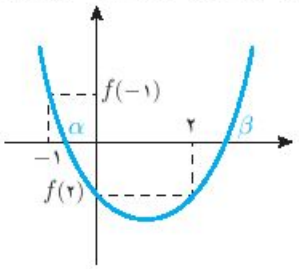
۱۱. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

دو شرط $a > 0$ و $\Delta < 0$ باید برقرار باشد پس:

$$\begin{cases} 1 - m > 0 & \Rightarrow m < 1 \\ \Delta = 4 + 4(1 - m^2) < 0 & \Rightarrow m^2 > 2 \end{cases} \Rightarrow m < -\sqrt{2}$$

۱۲. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنید $f(x) = x^2 + ax + 4$ چون ۲ بین دو ریشه است پس علامت $f(2)$ مخالف علامت ضریب x^2 یعنی منفی است و چون ۱- خارج دو ریشه است پس علامت $f(-1)$ مثبت است.



$$\begin{cases} f(2) < 0 & \Rightarrow 8 + 2a < 0 \\ f(-1) > 0 & \Rightarrow 5 - a > 0 \end{cases} \Rightarrow a < -4$$

۱۳. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: چندجمله‌ای $f(x)$ وقتی دارای ریشه‌ی مضاعف است که $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ باشد پس:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + mx + 54 = 0 \\ f'(x) = 3x^2 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 54 = 0 \\ 3x^2 + mx = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x^2 = 54 \Rightarrow x = 3$$

حال $x = 3$ را در معادله صدق می‌دهیم:

$$x^2 + mx + 54 = 0 \xrightarrow{x=3} 27 + 3m + 54 = 0$$
$$\Rightarrow m = -27$$
$$\Rightarrow x^2 - 27x + 54 = 0 \Rightarrow (x-3)^2(x+6) = 0$$

ریشه ساده

روش دوم: α را ریشه‌ی مضاعف و β را ریشه‌ی ساده فرض کنید پس:

$$x^2 + mx + 54 = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$
$$= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x-\beta)$$
$$= x^3 + (-\beta - 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \beta\alpha^2$$

ضرایب دو طرف تساوی را نظیر به نظیر مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} -\beta - 2\alpha = 0 \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = m \\ -\beta\alpha^2 = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -6 \\ m = -27 \end{cases}$$

۱۴. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} \alpha = 3\beta \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 16 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3\beta + \beta = 16 \Rightarrow \beta = 4 \Rightarrow \alpha = 12$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 48 = 5m + 3 \Rightarrow m = 9$$

۱۵. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 x_2^3 = 0 \Rightarrow s^3 - 3ps + p^3 = 0$$
$$\Rightarrow (-\frac{b}{a})^3 - 3(\frac{c}{a})(-\frac{b}{a}) + (\frac{c}{a})^3 = 0$$
$$\Rightarrow (-\frac{b}{a})^3 + 3(\frac{b}{a})(\frac{c}{a}) + (\frac{c}{a})^3 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{-b^3 + 3abc + c^3}{a^3} = 0$$
$$\Rightarrow b^3 - c^3 = 3abc$$

۱۶. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

علامت تابع در نقطه‌ی $x = 2$ مخالف علامت a یعنی منفی است.

$$f(x) = x^2 - mx - 2 \Rightarrow f(2) < 0$$
$$\Rightarrow 4 - 2m - 2 < 0 \Rightarrow m > 1$$

۱۷. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

جمع ریشه‌ها یعنی $\alpha + \beta$ برابر $-\frac{b}{a}$ است.

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 4 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha + 2}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

۱۸. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4c = 0$$
$$x^2 + bx + c + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta = \underbrace{b^2 - 4c}_{0} - 8 = 0 - 8 = -8$$ ریشه ندارد

دانلود از اپلیکیشن پادرس

روش دوم: نمودار $f(x)=x^2+bx+c$ بر محور xها مماس و رو به بالا است. نمودار $f(x)+2=x^2+bx+c+2$ همان نمودار $f(x)$ است که ۲ واحد به سمت بالا منتقل شده است پس ریشه ندارد.

۱۹. ۱ ۲ ۳ ✓۴

ریشه $x=a \Rightarrow a^2+2a-4=0$

$\Rightarrow a^2+2a-4=0 \Rightarrow a^2+2a=4$

$$A=\frac{a^2b^2(b+a)}{a^2+2a}=\frac{(-4)^2(-2)}{4}=-8$$

۲۰. ✓۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} x^2+(m+1)x+3=0 \\ x^2+mx+2=0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{کم}} x+3-2=0 \Rightarrow x=-1$

۲۱. ✓۱ ۲ ۳ ۴

$x^2+3x-2=0 \xrightarrow{x=x'} x'^2+3x'-2=0$

$\Rightarrow x'^2-2=-3x'$

به طور مشابه $x''^2-2=-3x''$ پس:

$$\frac{x'}{x'^2-2}+\frac{x''}{x''^2-2}=\frac{x'}{-3x'}+\frac{x''}{-3x''}$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

۲۲. ✓۱ ۲ ۳ ۴

$\alpha\beta=4(\alpha+\beta) \Rightarrow -5m-3=4(-3m+1) \Rightarrow m=1$

۲۳. ✓۱ ۲ ۳ ۴

ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+1=0$ را α و β فرض می‌کنیم پس $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$ و $\alpha\beta=\frac{1}{2}$.

ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+3x-k=0$ برابر $\alpha-2$ و $\beta-2$ است پس

$$(\alpha-2)(\beta-2)=\frac{c}{a}=-\frac{k}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-\frac{k}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}-2(\frac{5}{2})+4=-\frac{k}{2} \Rightarrow k=1$$

۲۴. ۱ ۲ ✓۳ ۴

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=5 \Rightarrow m+1=5 \Rightarrow m=4$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}=m-1=3$

۲۵. ۱ ۲ ۳ ✓۴

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد به طوری که جمع آن‌ها مثبت است و نمودار آن رو به بالاست پس:

$$\Delta>0,\ p=\frac{c}{a}<0,\ s=-\frac{b}{a}>0,\ a>0$$

۲۶. ۱ ۲ ۳ ✓۴

روش اول:

α و β ریشه‌های $2x^2-3x-7=0$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-\frac{7}{2}$

ریشه‌های معادله‌ی جدید $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} s=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{7}{2}}=\frac{3}{7} \\ p=(-\frac{1}{\alpha})(-\frac{1}{\beta})=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-\frac{7}{2}}=-\frac{2}{7} \end{cases}$$

معادله‌ی جدید : $x^2-sx+p=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}=0 \Rightarrow 7x^2-3x-2=0$

روش دوم: کافی است جای a و c را عوض کنیم و b را قرینه کنیم

$2x^2-3x-7=0 \Rightarrow -7x^2+3x+2=0$

۲۷. ✓۱ ۲ ۳ ۴

ضریب x^2 منفی است پس $1-a^2<0$ یا $|a|>1$.

دقت شود که چون در این تست نمودار تابع سهمی است پس $|a|\neq 1$ باشد.

۲۸. ✓۱ ۲ ۳ ۴

$$x'^2+x''^2=s^2-2p=4k^2-2(4k-5)$$
$$=4k^2-8k+10=(2k-2)^2+6$$

می‌نیمم $(2k-2)^2$ برابر صفر است که به ازای $k=1$ به‌دست می‌آید.

۲۹. ✓۱ ۲ ۳ ۴

در ناحیه‌های دوم و چهارم، x و y مختلف‌العلامتند.

$x_1x_2<0 \Rightarrow -8m+16<0 \Rightarrow m>2$

۳۰. ✓۱ ۲ ۳ ۴

اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی باشند آن‌گاه $b^2=ac$ پس:

$9=\alpha\beta \Rightarrow \frac{-m+2}{2}=9 \Rightarrow m=-16$

۳۱. ✓۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} \Delta>0 & \Rightarrow m^2-12(m^2-5)>0 \\ & \Rightarrow m^2<\frac{60}{11} \\ x_1x_2=\frac{c}{a}<0 & \end{cases}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

$\Rightarrow m^۲ < ۵$

اعداد صحیح $m = ۰, \pm ۱, \pm ۲$ در نامعادله‌ی بالا صدق می‌کنند.
توجه کنید وقتی $\frac{c}{a} < ۰$ است خودبه‌خود Δ مثبت است پس کافی بود فقط شرط $\frac{c}{a} < ۰$ را بررسی می‌کردیم.

۳۲. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

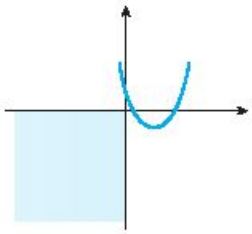
اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی باشند آنگاه $b = \frac{a+c}{۲}$ پس:

$$m = \frac{x' + x''}{۲} \Rightarrow m = -\frac{۵m - ۴}{۶} \Rightarrow m = \frac{۴}{۱۱}$$

۳۳. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

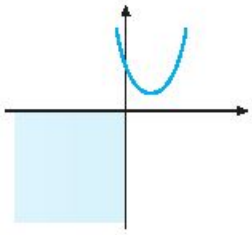
حالت اول: معادله‌ی دو ریشه‌ی نامنفی داشته باشد پس:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ & \Rightarrow a^۲ - ۴a - ۱۲ > ۰ \\ & \Rightarrow a < -۲ \text{ یا } a > ۶ \\ \alpha + \beta > ۰ & \Rightarrow -a > ۰ \Rightarrow a < ۰ \\ \alpha\beta \geq ۰ & \Rightarrow a + ۳ \geq ۰ \Rightarrow a \geq -۳ \end{cases}$$



اشتراک سه نامعادله‌ی بالا به صورت $-۳ \leq a < -۲$ است که فقط $a = -۳$ صحیح است.

حالت دوم: معادله‌ی ریشه نداشته باشد یا مضاعف داشته باشد. پس:



$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a - ۱۲ \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq a \leq ۶$$

فقط اعداد $a = -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ صحیح می‌باشند.
پس جمعاً ده مقدار صحیح برای a یافت می‌شود.

۳۴. ✓ ۱ ۳ ۴

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است. اگر $\tan\alpha$ یکی از ریشه‌ها باشد ریشه‌ی دیگر $\cot\alpha$ است پس:

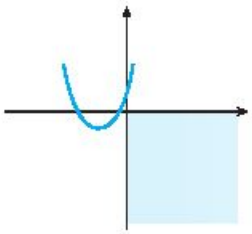
$$x_۱ + x_۲ = -۵ \Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = -۵$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -۵$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} = -۵ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{۱}{۵}$$
$$\Rightarrow \sin ۲\alpha = -\frac{۲}{۵}$$

۳۵. ✓ ۱ ۳ ۴

اگر $a < ۰$ آنگاه نمودار $y = ax^۲ + bx + c$ حتماً از ناحیهٔ چهارم عبور می‌کند. پس باید $m > ۰$ باشد. دو حالت داریم:

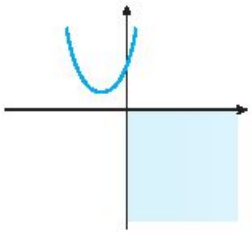
حالت اول: معادله دو ریشه‌ی منفی (یا صفر) دارد پس:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ & \Rightarrow ۹ - ۸m > ۰ \Rightarrow m < \frac{۹}{۸} \\ -\frac{b}{a} < ۰ & \Rightarrow \frac{۳}{m} < ۰ \Rightarrow m < ۰ \\ \frac{c}{a} \geq ۰ & \Rightarrow \frac{۲}{m} \geq ۰ \Rightarrow m > ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$



حالت دوم: معادله ریشه ندارد یا ریشه‌ی مضاعف دارد پس:

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow ۹ - ۸m \leq ۰ \Rightarrow m \geq \frac{۹}{۸}$$



۳۶. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۲x^۲ - ۶x - ۱ = ۰ \xrightarrow{x=\beta} ۲\beta^۲ - ۶\beta - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow \beta^۲ = ۳\beta + \frac{۱}{۲}$$
$$\beta^۲ + ۳\alpha = (۳\beta + \frac{۱}{۲}) + ۳\alpha$$
$$= ۳(\alpha + \beta) + \frac{۱}{۲} = ۳(۳) + \frac{۱}{۲} = ۹/۵$$

۳۷. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $-۵۷, -۵۳, -۴۹, \ldots$ به صورت $-۵۷ + (n-۱)(۴)$ و یا $۴n - ۶۱$ می‌باشد. پس ریشه‌ها به صورت $۴n - ۶۱$ و $۴n - ۵۷$ می‌باشند.

$$s = ۴n - ۶۱ + ۴n - ۵۷ = ۸n - ۱۱۸ = ۲$$
$$\Rightarrow n = ۱۵$$
$$p = (۴n - ۶۱)(۴n - ۵۷) = ۲m - ۳$$
$$\Rightarrow (-۱)(۳) = ۲m - ۳ \Rightarrow m = ۰$$

روش دوم: تفاضل دو جمله‌ی متوالی دنباله برابر قدرنسبت (یعنی ۴) است

$$|\alpha - \beta| = ۴ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = ۴$$
$$\Rightarrow \sqrt{۴ - ۸ \quad} \quad ۴$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

به ازای $m=0$ دو ریشه‌ی معادله عبارت است از $\alpha=-1$ و $\beta=3$ که جملات ۱۵ام و ۱۶ام دنباله می‌باشند.

۳۸. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\alpha\beta=1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}+\frac{\beta^2+1}{\beta}=\alpha^2+\underbrace{\frac{1}{\alpha^2}}_{\beta^2}+\beta+\underbrace{\frac{1}{\beta}}_{\alpha}$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\beta+\alpha$$

$$=(s^2-2p)+s=m^2-2+m=10 \Rightarrow m=3 \text{ یا } -4$$

۳۹. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^2-3x-6=0 \Rightarrow \alpha^2-3\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha^2=3\alpha+6$$

$$\sqrt{\alpha^2(\beta-2)}=\sqrt{(3\alpha+6)(\beta+2)}$$

$$=\sqrt{3\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+12}$$

$$=\sqrt{3(-6)+6(3)+12}=2\sqrt{3}$$

۴۰. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

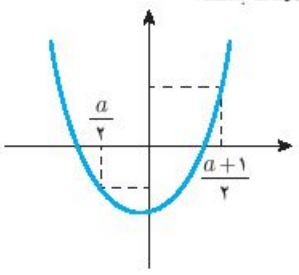
α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+3x-2=0$ فرض می‌شود پس $\alpha+\beta=-3$ و $\alpha\beta=-2$. ریشه‌های معادله‌ی جدید α^2+1 و β^2+1 می‌باشد پس:

$$\begin{cases} s=\alpha^2+1+\beta^2+1=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2 \\ \quad =9+4+2=15 \\ p=(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1 \\ \quad =4+13+1=18 \end{cases}$$

معادله‌ی جدید : $x^2-sx+p=0 \Rightarrow x^2-15x+18=0$

۴۱. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنید $f(x)=x^2+3x-2$ کافی است اول و آخر بازه مقدار $f(x)$ مختلف‌العلامت باشند.



$$f(\frac{a}{2})f(\frac{a+1}{2})<0$$

$$\Rightarrow (\frac{a^2}{4}+\frac{3a}{2}-2)((\frac{a+1}{2})^2+3(\frac{a+1}{2})-2)$$

$$\Rightarrow (a^2+6a-8)(a^2+8a-1)<0$$

به ازای $a=1$ نامساوی بالا برقرار است.

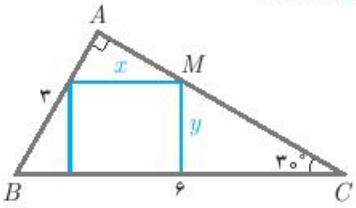
(توجه کنید که اختلاف ریشه‌های معادله‌ی $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{17}$ است، در حالی که طول

شرط لازم و کافی برای آنکه ریشه‌ی معادله در این بازه باشد آن است که $f(\frac{a}{2})f(\frac{a+1}{2})<0$ باشد.)

۴۲. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر m واسطه‌ی هندسی بین دو ریشه‌ی α و β باشد آنگاه $m^2=\alpha\beta$ پس باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت باشد یعنی یا گزینه‌ی ۲ صحیح است و یا گزینه‌ی ۳. درگزینه‌ی ۲، Δ منفی است پس فقط گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۴۳. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C}=30^\circ \Rightarrow MC=2y,\ AC=3\sqrt{3}$$

تالس : $\frac{x}{6}=\frac{AM}{AC}=\frac{3\sqrt{3}-2y}{3\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow x=6-\frac{4}{\sqrt{3}}y$$

مساحت : $S=xy=(6-\frac{4}{\sqrt{3}}y)y=-\frac{4}{\sqrt{3}}y^2+6y$

$$\max S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{36}{4(-\frac{4}{\sqrt{3}})}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

۴۴. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

نقطه‌ی $B(b,b^2)$ را روی سهمی در نظر بگیرید.

$$AB^2=(b-0)^2+(b^2-a)^2=b^2+(1-2a)b^2+a^2$$

روش اول: اگر می‌نیمم AB برابر $|a|$ باشد لازم است که B همان مبدأ باشد در واقع معادله‌ی زیر باید $b=0$ را نتیجه دهد.

$$b^2+(1-2a)b^2=0$$

$$\xrightarrow{b=0} b^2+(1-2a)\neq 0 \Rightarrow b^2\neq 2a-1$$

پس باید $2a-1\leq 0$ و یا $a\leq\frac{1}{2}$ باشد.

روش دوم:

$$AB^2=(b^2-\frac{2a-1}{2})^2+a^2-(\frac{2a-1}{2})^2$$

برای آنکه می‌نیمم برابر a^2 باشد لازم است که $b^2-\frac{2a-1}{2}$ برابر صفر نشود پس:

$$b^2-\frac{2a-1}{2}=0 \Rightarrow b^2=\frac{2a-1}{2}$$

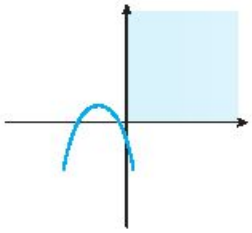
$$\Rightarrow \frac{2a-1}{2}\leq 0 \Rightarrow a\leq\frac{1}{2}$$

۴۵. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

باید سهمی رو به پایین باشد پس $a-3<0$ است یعنی $a<3$ دو

دانلود از اپلیکیشن پادرس

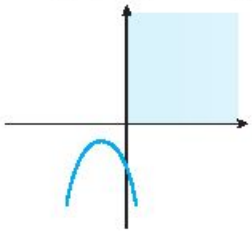
حالت اول: معادله دو ریشه‌ی منفی (یا صفر) دارد.



$$\begin{cases} s < 0 & \Rightarrow -\frac{a}{a-3} < 0 \xrightarrow{a<3} a < 0 \\ p \geq 0 & \Rightarrow -\frac{1}{a-3} \geq 0 \xrightarrow{a<3} a \neq 3 \end{cases}$$

اشتراک دو جواب بالا به صورت $a < 0$ می‌باشد دقت کنید در این حالت $\Delta > 0$ است.

حالت دوم: معادله ریشه نداشته باشد (یا ریشه مضاعف داشته باشد).



$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \xrightarrow{a<3} -6 \leq a \leq 2$$

اجتماع دو جواب بالا عبارت است از $a \leq 2$.

۴۶. ۱ ۲ ✓ ۴

$$s = (\frac{1}{\alpha} + 1) + (\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2$$
$$= \frac{\frac{2}{2}}{-\frac{2}{2}} + 2 = \frac{5}{4}$$
$$p = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1$$
$$= \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{-\frac{2}{2}} + 1 = -\frac{1}{4}$$

معادله‌ی جدید : $x^2 - sx + p = 0$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۴۷. ۱ ۲ ✓ ۴

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{3}{5} \ , \ \alpha\beta = -\frac{2}{5}$$

حاصل‌جمع ریشه‌های معادله‌ی جدید $= s = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(-\frac{3}{5})^2 + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

معادله‌ی جدید : $x^2 - sx + p = 0$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{29}{4}x + p = 0 \Rightarrow 4x^2 - 29x + 4p = 0$$

پس $k = 29$ می‌باشد.

۴۸. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

شرط آن‌که نمودار $y = ax^2 + bx + c$ زیر محور xها باشد آن است که $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد یعنی $m < 1$ و هم‌چنین:

$$\Delta = 3 - 4m(m-1) = -4m^2 + 4m + 3$$
$$= (2m - 3)(-2m - 1)$$
$$\Delta < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > \frac{3}{2} \xrightarrow{m<1} m < -\frac{1}{2}$$

۴۹. ۱ ۲ ✓ ۴

جمع و ضرب ریشه‌ها هر دو مثبت است و Δ نیز مثبت است پس:

$$\begin{cases} s = -\frac{b}{a} = 2 \\ p = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m > 3 \end{cases}$$
$$\Delta = 16 - 8m + 24 > 0 \Rightarrow m < 5$$

در نتیجه $3 < m < 5$ است.

۵۰. ۱ ✓ ۳ ۴

$$\begin{cases} \alpha = 3\beta + 3 \\ \alpha + \beta = \frac{17}{3} \Rightarrow (3\beta + 3) + \beta = \frac{17}{3} \\ \Rightarrow \beta = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 5 \end{cases}$$
$$\alpha\beta = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 10$$

۵۱. ۱ ✓ ۳ ۴

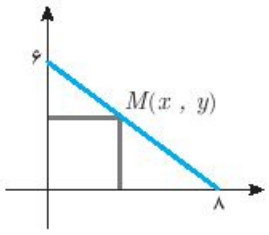
باید معادله‌ی تقاطع دو منحنی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$ax^2 + 4x = x^2 + 1 \Rightarrow (a-1)x^2 + 4x - 1 = 0$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = -3$$

۵۲. ۱ ۲ ✓ ۴

معادله‌ی وتر به صورت $6x + 8y = 48$ می‌باشد نقطه‌ی M روی وتر می‌باشد

$$s = xy = x(\frac{48 - 6x}{8}) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$$
$$\max s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4(-\frac{3}{4})} = 12$$

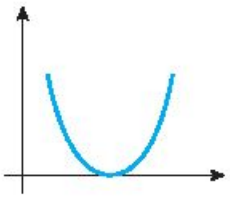


۵۳. ۱ ۲ ✓ ۴

باید معادله‌ی $(3 - \frac{x}{m})(mx - 1) = 0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. یعنی ریشه‌ی پرانتزها برابر باشند.

$$\begin{cases} 3 - \frac{x}{m} = 0 & \Rightarrow x = 3m \\ mx - 1 = 0 & \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3m = \frac{1}{m}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس



۵۴. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

$$x^2-2x-4=0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha-4=0$$
$$\Rightarrow \alpha^2-4=2\alpha$$
$$(\alpha^2-4)^2+4\beta^2=(2\alpha)^2+4\beta^2=4(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=4(s^2-2p)=4(4+8)=48$$

۵۵. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

تقاطع دو معادله ریشه ندارد پس:

$$(2x+1)(x+8)=mx$$
$$\Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8=0$$
$$\Delta<0 \Rightarrow (17-m)^2-64<0$$
$$\Rightarrow (17-m-8)(17-m+8)<0$$
$$\Rightarrow 9<m<25$$

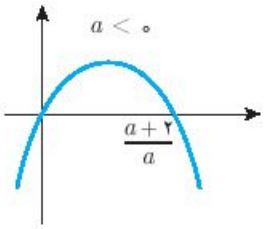
۵۶. ✓ ۲ ۳ ۴

$$A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \Rightarrow A^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}$$
$$\Rightarrow A^2=4+2 \Rightarrow A=\sqrt{6}$$

۵۷. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

یکی از ریشه‌ها $x=0$ است. بنابراین ریشه‌ی دیگر باید مثبت (یا صفر) باشد و سهمی رو به پایین باشد (یعنی باید $a<0$ باشد).

$$ax^2-(a+2)x=0$$
$$\Rightarrow x(ax-a-2)=0 \Rightarrow x=\frac{a+2}{a}$$
$$\frac{a+2}{a}\geq 0 \xrightarrow{a<0} a\leq -2$$



۵۸. ۱ ✓ ۳ ۴

معادله‌ی تقاطع ریشه‌ی مضاعف دارد (فقط یک بار یکدیگر را قطع می‌کنند).

$$(m+3)x^2+mx=2x-4$$
$$\Rightarrow (m+3)x^2+(m-2)x+4=0$$
$$\Delta=0 \Rightarrow (m^2-4m+4)-16(m+3)=0$$
$$m=-2\ ,\ 22$$

۵۹. ۱ ۲ ✓ ۴

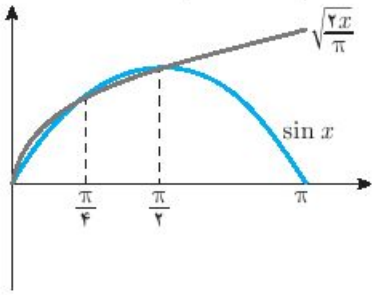
بازه‌ی $[0\ ,1]$ جواب است چون $x-1$ منفی یا صفر است. حال با فرض $x\geq 1$ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x\geq 1 \Rightarrow (x-1)^2\leq (2\sqrt{x})^2$$
$$\Rightarrow x^2-6x+1\leq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq 3+2\sqrt{2}$$

بنابراین مجموعه جواب بازه‌ی $[0\ ,3+2\sqrt{2}]$ می‌باشد پس: $b-a=3+2\sqrt{2}$ است.

۶۰. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

با فرض $x\geq 0$ نمودار $y=\sin x$ و $y=\sqrt{\frac{2}{\pi}x}$ را رسم می‌کنیم. در نقاط $x=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ دو منحنی متقاطع‌اند پس بازه‌ی $\frac{\pi}{4}\leq x\leq \frac{\pi}{2}$ جواب نامعادله است. به طور مشابه در قسمت منفی نیز بازه‌ی $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq -\frac{\pi}{4}$ جواب است. پس با فرض $x\neq 0$ مجموعه جواب نامعادله، به صورت $\frac{\pi}{4}\leq |x|\leq \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.



۶۱. ۱ ۲ ✓ ۴

فرض کنید $t=x^2$ در این صورت معادله‌ی $t^2-3(m-1)t+m-3=0$ به‌دست می‌آید. اگر این معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد آن‌گاه ریشه‌ی منفی قابل قبول نیست و به ازای ریشه‌ی مثبت برای x دو جواب به‌دست می‌آید. پس باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد.

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow m-3<0 \Rightarrow m<3$$

(توجه کنید وقتی $\frac{c}{a}<0$ است خودبه‌خود Δ مثبت است.)

۶۲. ✓ ۲ ۳ ۴

$$3^x=t \Rightarrow t^2-3^at+b=0$$
$$t_1t_2=b \Rightarrow 3^{x_1}\times 3^{x_2}=b$$
$$\Rightarrow 3^{x_1+x_2}=b \Rightarrow 3^2=b$$

۶۳. ۱ ✓ ۳ ۴

روش اول: ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $(x+1)(x^2+ax+9)=0$ مضاعف است. یعنی $x^2+ax+9=0$ ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow a^2-36=0 \Rightarrow a=\pm 6$$

به ازای $a=-6$ معادله‌ی $x^2+ax+9=0$ ریشه‌ی مضاعف

دانلود از اپلیکیشن پادرس

روش دوم: باید معادله به صورت زیر باشد

$$(x+1)(x^2+ax+9)=(x+1)(x-3)^2$$

در نقطه‌ی $x=-1$ محور xها را قطع و در نقطه‌ی $x=3$ بر محور xها مماس است.

۶۴. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

ریشه‌های معادله به صورت $\pm\sqrt{\alpha}$ و $\pm\sqrt{\beta}$ می‌باشد. برای آن‌که ریشه‌ها تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند باید به صورت $\sqrt{\alpha}، \sqrt{\beta}، -\sqrt{\beta}$ و $-\sqrt{\alpha}$ (و یا $\sqrt{\beta}، -\sqrt{\beta}، \sqrt{\alpha}، -\sqrt{\alpha}$) باشند در این صورت

$$(\sqrt{\beta})^2=(-\sqrt{\alpha})(-\sqrt{\beta}) \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha=\beta$$

پس معادله‌ی $t^2+at+9=0$ ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد یعنی $a=-6$.

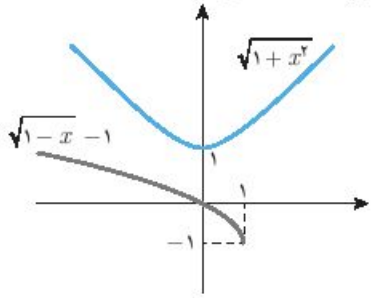
۶۵. ۱ ۲ ✓ ۳ ۴

$$t=e^x \Rightarrow 2t=\frac{e}{t}+3 \Rightarrow 2t^2-3t-e=0$$

چون $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}<0$ پس دو جواب مختلف‌العلامت دارد که چون $t=e^x$ نمی‌تواند منفی باشد پس فقط جواب مثبت قابل قبول است.

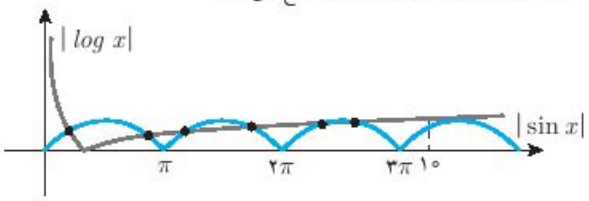
۶۶. ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

نمودار توابع $y=\sqrt{1-x}-1$ و $y=\sqrt{1+x^2}$ را رسم می‌کنیم. دو منحنی هیچ نقطه‌ی تقاطعی ندارند.



۶۷. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار دو طرف تساوی را رسم می‌کنیم. در شش نقطه (که در شکل مشخص شده است) یکدیگر را قطع می‌کنند.



۶۸. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$\frac{4x^2+(3x+1)^2}{2x(3x+1)}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{13x^2+6x+1}{6x^2+2x}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 39x^2+18x+3=12x^2+4x$$

جواب ندارد $\Rightarrow$ [illegible]

روش دوم: با توجه به نامساوی $|a+\frac{1}{a}|\geq 2$ معادله‌ی داده شده جواب ندارد.

۶۹. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

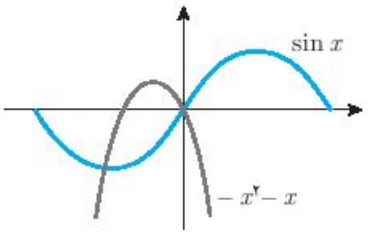
$$3^{-x}=t \Rightarrow \frac{t^2+1}{2-x^2}=t$$

$$\Rightarrow \frac{t^2+1}{t}=2-x^2 \Rightarrow t+\frac{1}{t}=2-x^2$$

دقت کنید $t+\frac{1}{t}\geq 2$ در حالی که $2-x^2\leq 2$ بنابراین تنها جواب ممکن $x=0$ است که در معادله نیز صدق می‌کند.

۷۰. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

$$-x-1=\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\neq 0} \sin x=-x^2-x$$



نمودار دو منحنی $\sin x$ و $-x^2-x$ در یک نقطه (به جز $x=0$) متقاطع‌اند.

۷۱. ✓ ۱ ۲ ۳ ۴

دو طرف تساوی را در $(3+2x)(7+4x)$ ضرب می‌کنیم

$$2x(3+2x)-(a+2x)(7+4x)=(7+4x)(3+2x)$$

$$\Rightarrow 6x+4x^2-7a-4ax-14x-8x^2$$

$$=21+14x+12x+8x^2$$

$$\Rightarrow 12x^2+(34+4a)x+21+7a=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{19}{6} \Rightarrow \frac{34+4a}{-12}=-\frac{19}{6} \Rightarrow a=1$$

معادله : $12x^2+38x+28=0 \Rightarrow x=-2, -\frac{7}{6}$

۷۲. ۱ ✓ ۳ ۴

$$3\cos x+2a\geq 0 \Rightarrow \cos x\geq -\frac{2a}{3}$$

چون همواره $\cos x\geq -1$ است پس کافی است $-\frac{2a}{3}\leq -1$ باشد یعنی $a\geq \frac{3}{2}$.

۷۳. ۱ ✓ ۳ ۴

فرض کنید $t=\cos x$ $(\frac{\pi}{2}<x\leq \pi)$ در این صورت $-1<t<0$ می‌باشد.

$$y=\frac{t^2+11}{3t}=\frac{1}{3}t+\frac{11}{3t}$$

$$y'=\frac{1}{3}-\frac{11}{3t^2}=\frac{t^2-11}{3t^2}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس