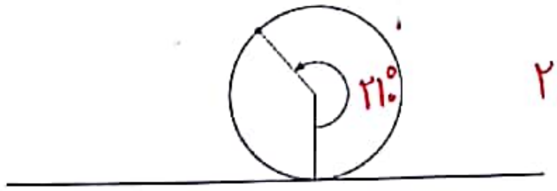
بسمه تعالی

ریاضی۲ پایه یازدهم فنی (سال ۹۶)   جزوه پودمان سوم مثلثات   طراحی : آقای مطوری   بهمن ماه

تعریف زاویه چرخش صفحه ۶۲ کتاب

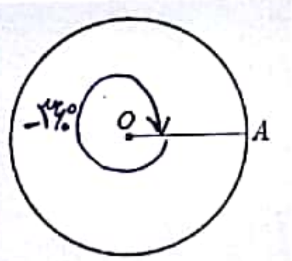
زاویه‌هایی که با چرخش ایجاد می‌شوند، می‌توانند از ۱۸۰ درجه هم بیشتر شوند و هر مقداری باشند. این زاویه‌ها را زاویهٔ چرخش می‌نامند؛

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

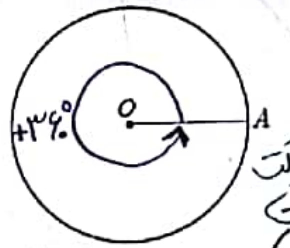


مثال : زاویه چرخش ۲۱۰°

به عنوان مثال : **با چرخش به اندازهٔ یک دور کامل، زاویهٔ چرخش، ۳۶۰ درجه خواهد بود.**



یک دور کامل
(منفی)
درجهت موافق حرکت
عقربه‌های ساعت
(ساعتگرد)

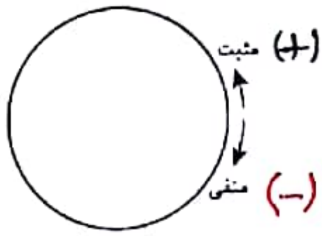


یک دور کامل
(مثبت)
درجهت خلاف حرکت
عقربه‌های ساعت
(پادساعتگرد)

قرار داد : **جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت و چرخش درجهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت را منفی در نظر می‌گیرند.**

جهت مثبت ← جهت مثلثاتی

جهت منفی ← جهت عکس مثلثاتی



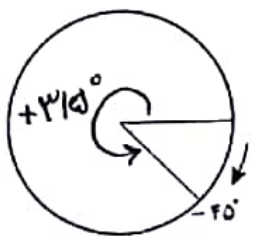
تعریف زاویه منفی : زاویه‌های با مقدار منفی را زاویهٔ منفی می‌نامند

مثال : زاویه‌ی −۳۰° یک زاویه منفی است.

تعریف دو زاویه قرینه :

دو زاویه را که مقدار آنها قرینهٔ یکدیگرند، دو زاویهٔ قرینه می‌نامند؛ مثلاً دو زاویه با مقدارهای ۴۵° و −۴۵°، قرینهٔ یکدیگرند.

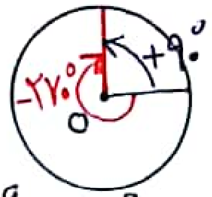
زاویه‌های +۳۱۵ و −۳۱۵°
نیز قرینه هم هستند.



سؤال: الف) کوچکترین زاویه چرخش مثبت که متناظر با زاویه چرخش -270° را بیابید؟

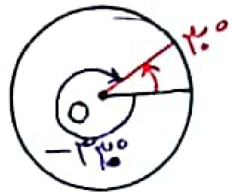
ب) بزرگترین زاویه چرخش منفی که متناظر با زاویه چرخش $+30^\circ$ را بیابید؟

حل (الف):



$(-270^\circ)+360^\circ=+90^\circ$

حل (ب):

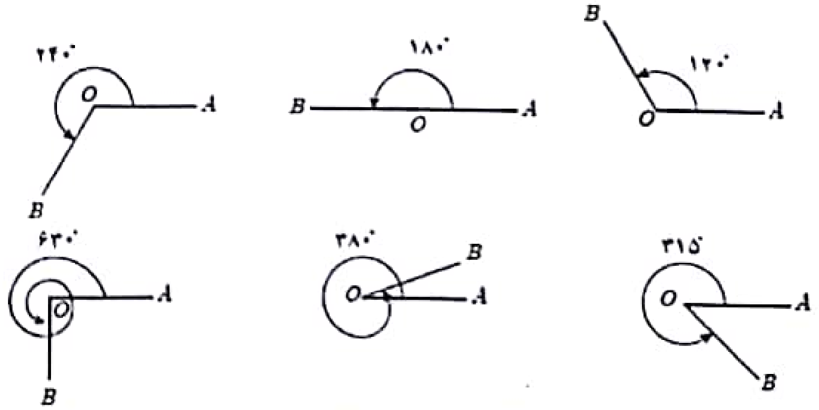


$(-360^\circ)+30^\circ=-330^\circ$

نکته: با چرخش به اندازه دورهای کامل می توانیم نقاط متناظر و زاویه های چرخش متناظر بی شماری را به دست آوریم. به عنوان مثال نقطه متناظر با زاویه 45° را در نظر می گیریم. اگر یک دور کامل در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت چرخش کنیم زاویه ی $(+360)+45^\circ=405^\circ$ را خواهیم داشت که متناظر با زاویه ی 45° می باشد. اگر مثلاً دو دور کامل در جهت موافق حرکت عقربه های ساعت چرخش کنیم زاویه ی متناظر $2(-360^\circ)+45^\circ=-675^\circ$ را داریم.

نکته: (مفهوم زاویه چرخش به عنوان چرخش یک نیم خط نسبت به یک نیم خط دیگر)

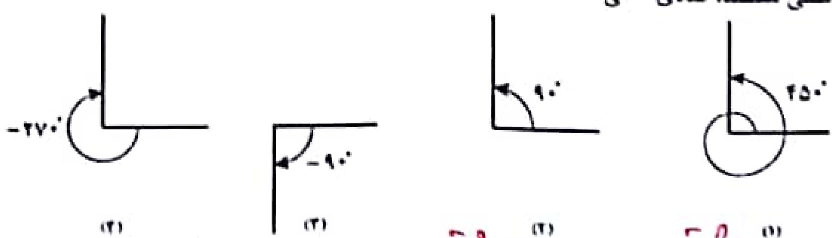
زاویه را می‌توان به‌عنوان چرخش یک نیم خط نسبت به یک نیم‌خط دیگر هم در نظر گرفت. در شکل‌های صفحه بعد، نیم‌خط OA ثابت است و نیم‌خط OB حول نقطهٔ O در حال چرخش در جهت مثبت است. در این شکل‌ها، مقدار زاویهٔ چند چرخش خاص بر حسب درجه نشان داده شده است.
توجه داشته باشید که زاویهٔ چرخش یک مفهوم فقط هندسی نیست و در آن از مفهوم حرکت و جهت حرکت نیز استفاده می‌شود.



معطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

علامت زاویه چرخش: اگر جهت چرخش، منفی (موافق حرکت عقربه‌های ساعت) باشد، مقدار زاویه‌های چرخش را به‌صورت منفی درنظر می‌گیریم؛ برای مثال در شکل‌های زیر، مقدار زاویه‌های چرخش (۳) و (۴) که در جهت منفی هستند، عددی منفی است.

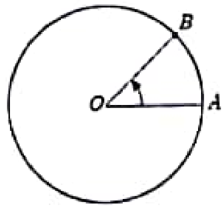
زاویه چرخش منفی



زاویه چرخش مثبت — زاویه چرخش مثبت — زاویه چرخش منفی

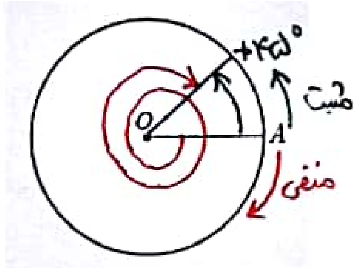
نکته: (مفهوم زاویه چرخش در دایره)

مفهوم زاویهٔ چرخش را در یک دایره نیز می‌توان توصیف کرد. اگر یک دایره و روی آن نقطه‌ای به‌عنوان مبدأ حرکت مانند A در نظر بگیریم، با حرکت یک نقطه مانند B از این مبدأ (مانند شکل روبه‌رو)، شعاع OB حول نقطهٔ O چرخش می‌کند و زاویه‌ای با شعاع OA می‌سازد. مقدار این زاویه را **زاویهٔ چرخش نقطهٔ B از مبدأ A** می‌نامند. پس هرگونه حرکت نقطهٔ B روی دایره، یک زاویهٔ چرخش را معین می‌کند و هر زاویهٔ چرخشی، نقطه‌ای متناظر روی دایره خواهد داشت.

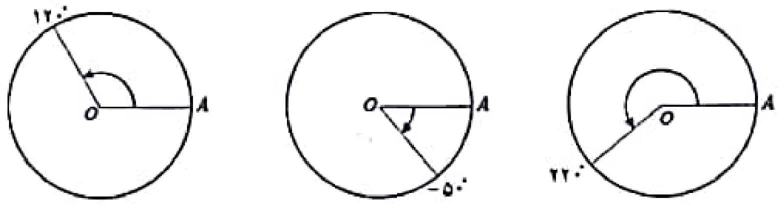


$(-۳۶۰^\circ)+(-۳۱۵^\circ) = -۶۷۵^\circ$

زاویه چرخش منفی در شکل نشان داده شده است.



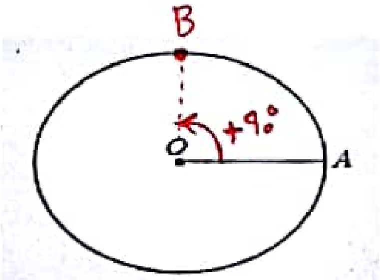
نقاط متناظر زاویه‌های ۱۲۰ درجه و ۵۰- درجه و ۲۲۰ درجه در شکل‌های زیر مشخص شده‌اند.



مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

مثال: اگر دونده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویهٔ چرخش او نسبت به نقطهٔ شروع چند درجه است؟

برای هر دور ۳۶۰° چرخیده است. لذا برای ۵ دور در جهت مثبت $۵ \times ۳۶۰^\circ = ۱۸۰۰^\circ$ چرخیده است.



دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای شکل، از نقطهٔ A طبق شکل زیر، با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند.

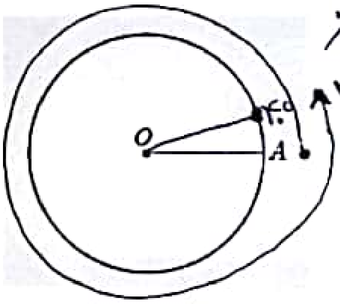
۱ دوچرخه‌سوار، $\frac{1}{4}$ این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایرهٔ بالا با یک نقطه (نقطه B) مشخص کنید.

کل مسیر یک دایره است و $\frac{1}{4}$ آن به اندازه یک ربع دایره است. بنابراین در نقطه متناظر زاویه ۹۰ درجه قرار خواهد گرفت. تعداد دورها و زمان سپری شده (در این مسئله) دو کمیت متناسب مستقیم هستند، بنابراین:

$$\frac{۳\ \text{دقیقه}}{\text{دور}} \times \frac{1}{4}\ \text{دور} = \frac{3}{4}\ \text{دقیقه}$$

$\frac{3}{4}$ دقیقه $=$ ۴۵ ثانیه

۱۲ این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟



پس از ۳ دقیقه دوچرخه سوار به مبدأ برگشته است و پس از ۲۰ ثانیه در ادامه حرکت ۴۰ درجه دیگر طی کرده است. پس در نقطه متناظر ۴۰ درجه قرار خواهد گرفت.

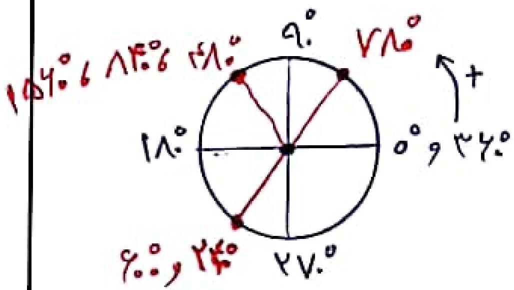
$$\frac{\text{۳۶۰ درجه}}{\text{۱۸۰ ثانیه}} \times \text{۲۰ ثانیه} = \text{۴۰ درجه}$$

زاویه چرخش این دوچرخه سوار برابر ۴۰° خواهد بود.

۱۳ اگر یک دوربین فیلم‌برداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟ یک دور کامل (۳۶۰ درجه) را در ۳ دقیقه طی می‌کند. در نتیجه:

$$\frac{\text{۳۶۰ درجه}}{\text{۳ دقیقه}} \times \text{۱ دقیقه} = \text{۱۲۰ درجه}$$

دوربین در هر دقیقه ۱۲۰ چرخش می‌کند.



۱۴ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۶/۵	۷	۱۲
زاویهٔ چرخش دوربین	۲۴۰°	۴۸۰°	۶۰۰°	۷۸۰°	۸۴۰°	۱۵۶۰°

$$\frac{\text{درجه}}{\text{دقیقه}} \times \text{دقیقه} = \text{درجه}$$

$$\frac{۳۶۰°}{۳} \times ۲ = ۲۴۰°$$

$$\frac{۳۶۰°}{۳} \times ۴ = ۴۸۰°$$

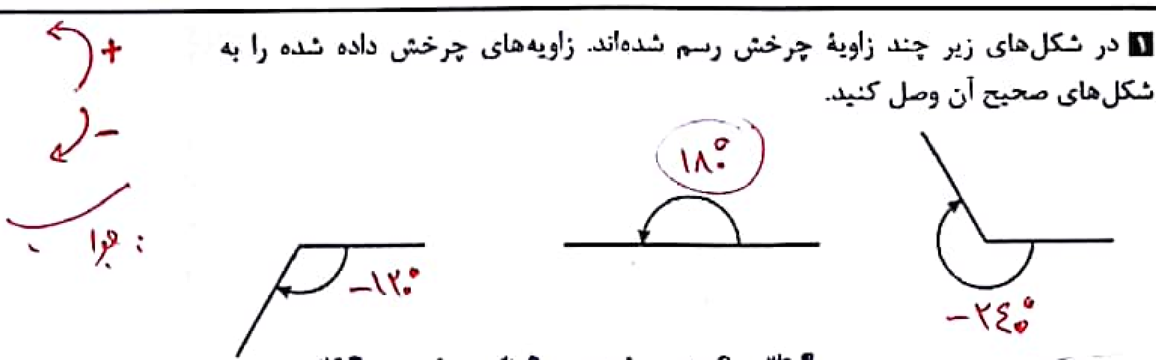
$$\frac{۳۶۰°}{۳} \times ۵ = ۶۰۰°$$

$$\frac{۳۶۰°}{۳} \times ۶/۵ = ۷۸۰°$$

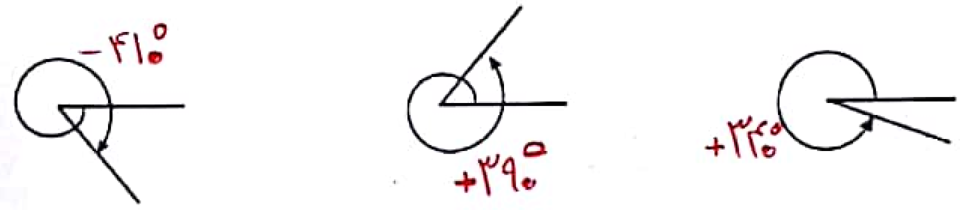
$$\frac{۳۶۰°}{۳} \times ۷ = ۸۴۰°$$

$$\frac{۳۶۰°}{۳} \times ۱۳ = ۱۵۶۰°$$

۱ در شکل‌های زیر چند زاویهٔ چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.

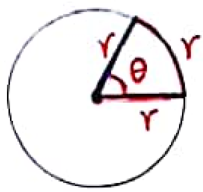


۳۴۰° ۱۸۰° -۴۱۰° -۲۴۰° -۱۲۰° ۳۹۰°



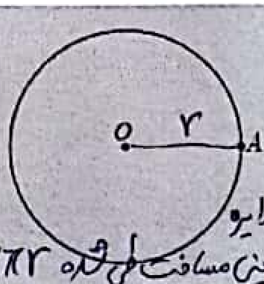
واحد اندازه گیری زاویه : رادیان

تعریف یک رادیان : فرض کنید دایره‌ای به شعاع r دارید. در این صورت یک رادیان برابر است با زاویه مقابل کمانی به اندازه r .



$\theta = 1\,\text{radian} \simeq ۵۷,۲۹۵^\circ$

دایره‌ای را به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطه A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.



۱ اگر از مبدأ، در جهت مثبت، شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویهٔ چرخش چند درجه است؟ ۳۶۰° مسافت طی شده چقدر است؟ برابر محیط دایره است. یعنی مسافت طی شده $2\pi r$ می‌باشد.

۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

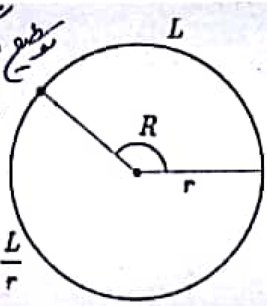
مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

$$\frac{2\pi r \text{ مسافت}}{360^\circ} \times 1^\circ \text{ درجه} = \frac{\pi r}{180} \text{ مسافت}$$

به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده به مقدار $\frac{\pi r}{180}$ می‌باشد.

تعریف

اگر نقطه‌ای از یک دایره به شعاع r، کمانی به طول L را در جهت مثبت طی کند، مقدار $\frac{L}{r}$ را اندازهٔ زاویه چرخش آن نقطه، بر حسب رادیان می‌نامند. برای زاویه‌های منفی، $-\frac{L}{r}$ را مقدار آن زاویه بر حسب رادیان می‌نامند.



$R = \frac{L}{r}$ (رادیان)

توضیح: اگر طول کمان L برابر r باشد در این زاویه چرخش مورد نظر برابر ۱ رادیان خواهد بود:

$R = \frac{r}{r} = 1$ رادیان

دایره واحد: دایره ای که شعاع آن ۱ واحد است، دایره واحد نامیده می شود.

نکته: در دایره واحد، طول کمان طی شده، همان اندازه زاویه چرخش برحسب واحد رادیان است.

$R = \frac{L}{r} = \frac{L}{1} = L$ زاویه رادیان

نکته: ضریب تبدیل رادیان به درجه $\frac{180}{\pi}$ و ضریب تبدیل درجه به رادیان $\frac{\pi}{180}$ است.

D: اندازه زاویه برحسب درجه

R: اندازه زاویه برحسب رادیان

$$R = \frac{\pi}{180} \times D \quad , \quad D = \frac{180}{\pi} \times R$$

مثال ۱) ۱۸۰ درجه معادل چند رادیان است؟

جواب: $D = 180$ درجه و $R = ?$ رادیان

محاسبه: $R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{\cancel{180}} \times \cancel{180} = \pi \approx 3/14$ رادیان

مثال ۲) ۱ رادیان، چند درجه است؟

جواب: $R = 1$ رادیان ، $D = ?$ درجه

محاسبه: $D = \frac{180}{\pi} \times R = \frac{180}{\pi} \times 1 = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3/14} \approx 57/3^\circ$

نتیجه: ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه است.

مثال ۳) ۱ درجه معادل چند رادیان است؟

$D = 1$ درجه و $R = ?$ رادیان

محاسبه: $R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{180} \times 1 = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3/14}{180} \approx 0/017$

نتیجه: ۱ درجه تقریبا معادل ۰/۰۱۷ رادیان است.

مثال ۴) زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ۹۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

جواب: با توجه به اینکه $\pi = 180^\circ$ رادیان به صورت زیر نیز می توان عمل کرد:

$30^\circ = \frac{180^\circ}{6} = \frac{\pi}{6}$ رادیان

$45^\circ = \frac{180^\circ}{4} = \frac{\pi}{4}$ رادیان

$60^\circ = \frac{180^\circ}{3} = \frac{\pi}{3}$ رادیان

$90^\circ = \frac{180^\circ}{2} = \frac{\pi}{2}$ رادیان

$$\frac{180}{\pi} \times \text{رادیان} = \text{درجه}$$

$$\frac{\pi}{180} \times \text{درجه} = \text{رادیان}$$

۲ در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

درجه	۵۵	۶۶۰	-۲۷۰	۳۶۰۰	-۶۷۵
رادیان	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	20π	$\frac{-15\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{180} \times \overset{\text{درجه}}{55} = \frac{55\pi}{180} = \frac{11\pi}{36} \ \text{رادیان}$$

$$\frac{\pi}{180} \times \overset{\text{درجه}}{(-270)} = \frac{-270\pi}{180} = -\frac{3\pi}{2} \ \text{رادیان}$$

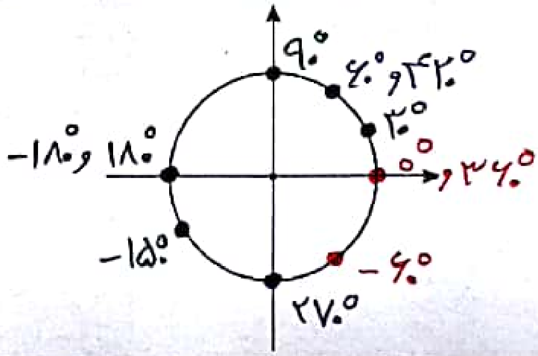
$$\frac{\pi}{180} \times \overset{\text{درجه}}{3600} = \frac{3600\pi}{180} = 20\pi \ \text{رادیان}$$

$$\frac{180}{\pi} \times \overset{\text{رادیان}}{\frac{11\pi}{3}} = \frac{180 \times 11}{3} = 660 \ \text{درجه}$$

$$\frac{180}{\pi} \times \overset{\text{رادیان}}{\frac{-15\pi}{4}} = \frac{180 \times (-15)}{4} = -675 \ \text{درجه}$$

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

۳ نقاط متناظر زاویه‌های $\frac{7\pi}{3}$، ۰، $\frac{-\pi}{3}$، 2π، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$، $-\pi$، π، $\frac{-5\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$ را روی دایره زیر مشخص کنید.



$$\text{رادیان} \ \frac{7\pi}{3} = \frac{7 \times 180^\circ}{3} = 420^\circ = 360^\circ + 60^\circ \ ✓$$

$$\text{رادیان} \ -\frac{\pi}{3} = -\frac{180^\circ}{3} = -60^\circ \ ✓$$

$$\text{رادیان} \ 2\pi = 2 \times 180^\circ = 360^\circ \ ✓$$

$$\text{رادیان} \ \frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \ ✓$$

$$\text{رادیان} \ \frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180^\circ}{2} = 270^\circ \ ✓$$

$$\text{رادیان} \ -\pi = -180^\circ \ ✓$$

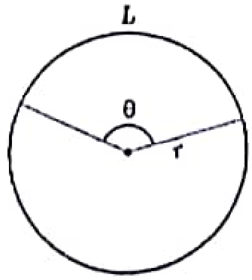
$$\text{رادیان} \ \pi = 180^\circ \ ✓$$

$$\text{رادیان} \ \frac{-5\pi}{6} = \frac{-5 \times 180^\circ}{6} = -150^\circ$$

$$\text{رادیان} \ \frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

در یک دایره به شعاع r، اگر زاویهٔ یک کمان بر حسب رادیان، θ باشد، طول این کمان برحسب r و θ چقدر است؟

با توجه به تعریف ص ۶۹ کتاب



r = شعاع دایره

θ = اندازه زاویه چرخش برحسب رادیان

L = طول کمان متقابل به زاویه چرخش

$\theta =$ اندازه زاویه چرخش برحسب رادیان $= \frac{L}{r}$

L ← طول کمان

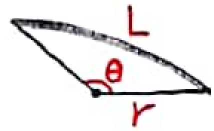
r ← شعاع دایره

بنابراین ⇐ $\boxed{L = r\theta}$

مثال: طول قوس (کمان) از یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع ۳۰ متر که متقابل زاویه ۱۲۰ درجه است (جا به جا می‌شود) را حساب کنید.

جواب:

$r = 30$ متر ، $\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ، $L = ?$



$L = r\theta = 30 \times \frac{2\pi}{3} = 20\pi \simeq 20 \times 3/14 = 62/8$ متر

مثال: در دایره‌ای به شعاع ۷ سانتی‌متر، اندازه کمان متقابل به زاویه θ برابر ۱۴ سانتی‌متر است. اندازه زاویه θ را برحسب رادیان و درجه به دست آورید.

$L = r\theta \longrightarrow \theta = \frac{L}{r}$

بنابراین: $\theta = \frac{14}{7} = 2$ رادیان $\xrightarrow[\text{به درجه}]{\text{تبدیل}} \frac{180}{\pi} \times 2 = \frac{360}{\pi} \simeq \frac{360}{3/14} \simeq 114/6^\circ$

در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیهٔ خود، به اندازهٔ ۱رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰متر باشد، زاویهٔ چرخش کابین برحسب رادیان و درجه چقدر است؟

شعاع $r = 10$ متر

مسافت طی شده (طول قوس) $L = 70$ متر

جواب: اگر یک رادیان چرخش داشته باشیم طول کمان طی شده به اندازه شعاع دایره است، یعنی یک کابین این چرخ و فلک به ازای یک رادیان چرخش ۱۰ متر طی می‌کند.

زاویه (رادیان) $\theta = \frac{L}{r} = \frac{70}{10} = 7$ رادیان و $\frac{180}{\pi} \times 7 = \frac{1260}{\pi} \simeq \frac{1260}{3/14} \simeq 401$ درجه

طول پره‌های یک چرخ، ۶۰ سانتی‌متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم.
با مثبت درنظرگرفتن جهت چرخش،
الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویهٔ چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه آن (برحسب درجه و رادیان) چقدر است؟

شعاع $r = 60\,cm = 0.6\,m$

مسافت $L = 100\,m$

(الف) $L = r\theta \rightarrow \theta = \frac{L}{r} = \frac{100}{0.6} = \frac{1000}{6} = \frac{500}{3}$ رادیان

$\simeq 166.6$ رادیان

$\frac{180}{\pi} \times \frac{500}{3} = \frac{90000}{3\pi} = \frac{30000}{\pi} \simeq \frac{30000}{3.14} \simeq 9549$ درجه

ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشد، چرخ چند متر طی کرده است؟

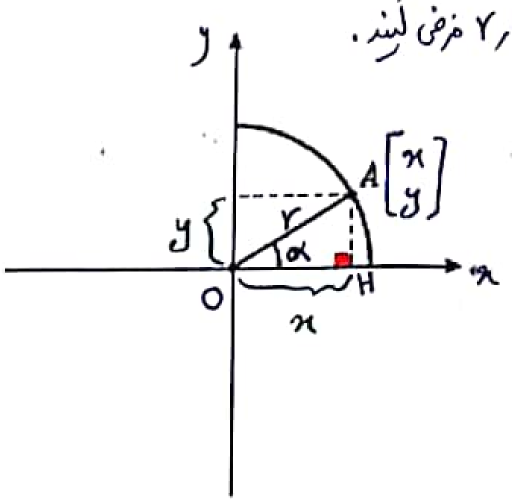
زاویه $\theta = 3000^\circ = \frac{50\pi}{3}$ رادیان $\leftarrow \frac{\pi}{180} \times 3000 = \frac{3000\pi}{180} = \frac{50\pi}{3}$ رادیان

مسافت طی شده توسط چرخ $L = r\theta = 0.6 \times \frac{50\pi}{3} = \frac{6}{10} \times \frac{50\pi}{3} = 10\pi \simeq 31.4$ متر

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

نسبت های مثلثاتی زاویه های دلخواه

آیا می‌توانید بین نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ تند α و مختصات نقطهٔ متناظر آن (A)، رابطه‌ای بیابید؟



فاصله نقطه A تا مبدأ مختصات (وتر مثلث OAH) را مقدار r فرض کنید.

$x^2 + y^2 = r^2 \longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

بنا به ریاضی اول سال قبل داریم:

$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$

$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$

$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x}$

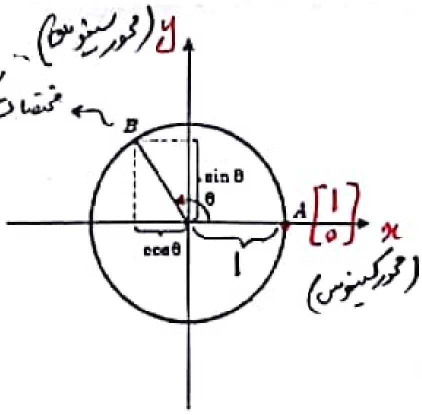
توجه کنید:

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Scanned by CamScanner

تعریف

$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ مختصات آن



در صفحهٔ مختصات، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ A به مختصات $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ را به‌عنوان مبدأ برای اندازه‌گیری زاویه در نظر می‌گیریم. اگر B نقطهٔ متناظر زاویه چرخش θ باشد، $\underbrace{\text{طول } B}_{x}$ را cosθ و $\underbrace{\text{عرض } B}_{y}$ را sinθ می‌نامند.

از آنجا که کسینوس یک زاویه، طول نقطهٔ متناظر آن زاویه و سینوس یک زاویه، عرض نقطه متناظر آن زاویه است، محور افقی را **محور کسینوس‌ها** و محور عمودی را **محور سینوس‌ها** می‌نامند. در این حالت در شکل بالا، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات را **دایرهٔ مثلثاتی** می‌نامند و نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ مبدأ اندازه‌گیری زاویه‌ها است.

شعاع $r=1$ — مبدأ $O\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

همان نقطه A می‌باشد.

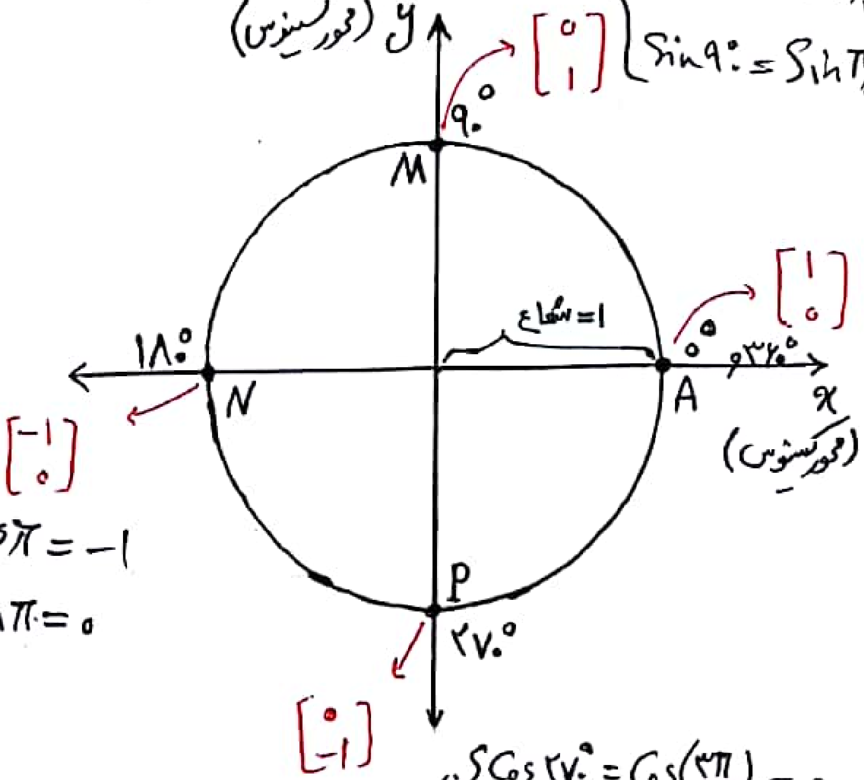
$0^\circ =$ زاویه متناظر با نقطه A

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

$$\begin{bmatrix} \cos 0^\circ \\ \sin 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\cos 0^\circ = 1} \quad \boxed{\sin 0^\circ = 0}$$

برای زاویه‌های خاص ۰، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه ، نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس آن‌ها را بیابید.

$$\begin{cases} \cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$



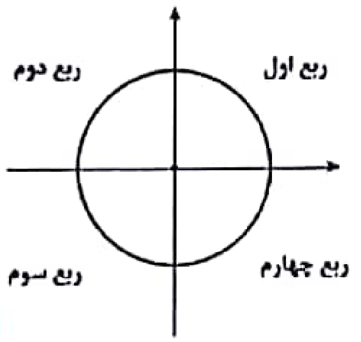
$$\begin{cases} \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\pi = \cos 360^\circ = 1 \\ \sin 2\pi = \sin 360^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 180^\circ = \cos \pi = -1 \\ \sin 180^\circ = \sin \pi = 0 \end{cases}$$

بنابراین
$$\begin{cases} \cos 270^\circ = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin 270^\circ = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

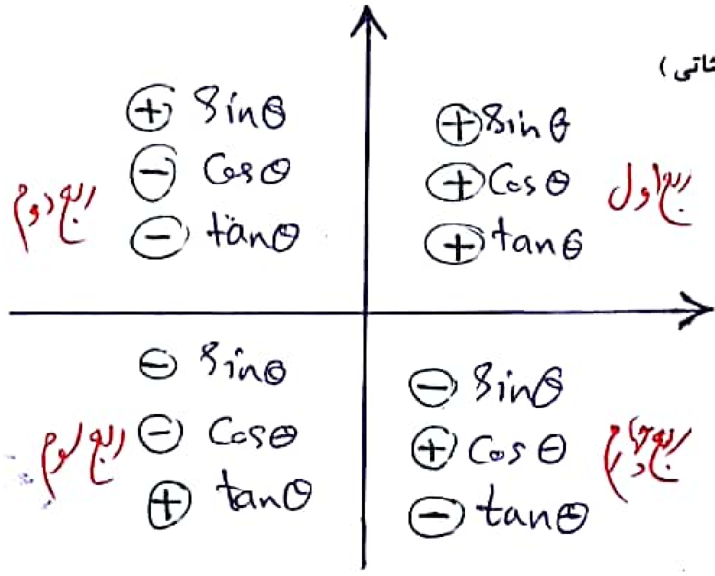
معمولاً دایره مثلثاتی را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند و طبق شکل مقابل این چهار قسمت را ربع‌های اول، دوم، سوم و چهارم دایره مثلثاتی می‌نامند.



جدول مقادیر مثلثاتی

زاویه / نسبت مثلثاتی θ	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده

نکته : (علامت نسبت های مثلثاتی)



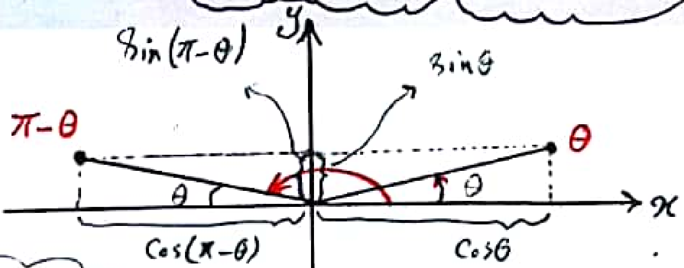
برای هر زاویهٔ تند θ (برحسب رادیان)، زاویهٔ $\pi-\theta$ باز است و نقاط متناظر آنها روی دایرهٔ مثلثاتی نسبت به محور سینوس‌ها قرینه یکدیگرند. بنابر این:

نکته

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$\pi = 180^\circ$

به شکل مقابل توجه کنید :



مثال ۱ : سینوس و کسینوس زاویهٔ ۱۵۰ درجه را حساب کنید.

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$$

$$\sin(150^\circ)=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos(150^\circ)=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

مثال ۲ : سینوس و کسینوس زاویه $\frac{3\pi}{4}$ را حساب کنید.

نرم: $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3\pi}{4}=3\times 45^\circ=135^\circ$$

$$\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سوال چهارگزینه ای ۱: حاصل عبارت $\cos(\pi-\theta)$ کدام یک از گزینه های زیر است؟

الف) $\sin\theta$ ب) $-\sin\theta$ ج) $\cos\theta$ د) $-\cos\theta$

جواب: $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \longrightarrow$ گزینه (د)

سوال چهارگزینه ای ۲: حاصل عبارت $\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi-\theta)=?$ کدام است؟

الف) $\sin\theta+\cos\theta$ ب) $\sin\theta-\cos\theta$

ج) $-\sin\theta+\cos\theta$ د) $-\sin\theta-\cos\theta$

جواب: می دانیم: $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ و $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

بنابراین گزینه (ب) صحیح است.

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۳۵۵۳

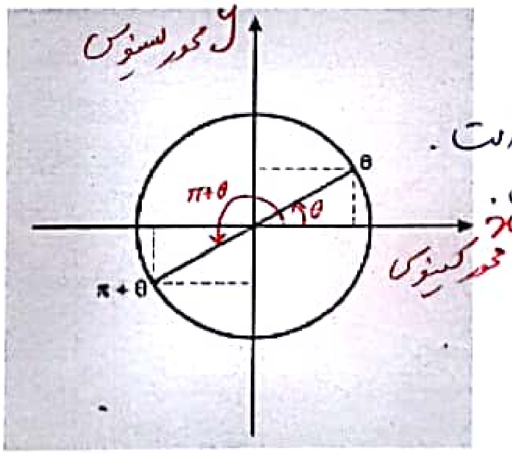
از پاسخ به سؤال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویهٔ تند مانند θ داریم:

نکته

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ ، $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

180° ، 180°

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند.



با توجه به شکل،

سینوس زاویه $\pi+\theta$ قرینه سینوس زاویه θ است.

کسینوس زاویه $\pi+\theta$ قرینه کسینوس زاویه θ است.

π

مثال ۱: سینوس و کسینوس زاویهٔ ۲۴۰ درجه را حساب کنید.

جواب:

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

مثال ۲: سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{7\pi}{6}$ را به دست آورید.

جواب:

$$\frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$$

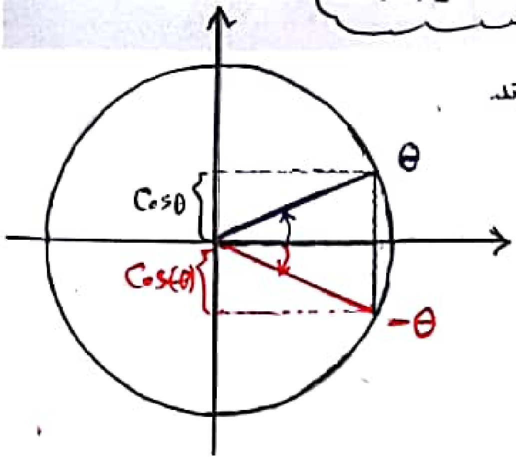
$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نکته

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند.



به شکل مقابل توجه کنید:

با توجه به شکل، سینوس دو زاویه‌ی θ و θ- قرینه‌ هم هستند. از طرفی کسینوس های هر دو زاویه θ و θ- با هم برابرند.

مثال ۱) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۰- درجه را حساب کنید.

$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \longrightarrow \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$

$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال ۲) سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{-5\pi}{6}$ را حساب کنید.

$\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از 2π را اضافه یا کم کنیم، نقطهٔ متناظر زاویهٔ جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

جواب: نقاط متناظر این دو زاویه بر هم منطبق‌اند. به همین دلیل، نسبت های مثلثاتی آنها برابرند. زیرا نسبت های مثلثاتی یک زاویه، مختصات نقطه متناظر آن است.

نکته: اگر $n \in \mathbb{Z}$ (n عددی صحیح) باشد، آنگاه:

مضرب زوج از π

1) $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

مضرب زوج π

2) $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$

مثال: سینوس و کسینوس 1500° را به دست آورید.

$1500 - 1440 = 60^\circ$ ، $1440 \div 360 = 4$ ، $360^\circ \to (2\pi)$

1) $\sin 1500^\circ = \sin(\overbrace{1440^\circ}^{8\pi} + 60^\circ) = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos 1500^\circ = \cos(1440^\circ + 60^\circ) = \cos(8\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{14\pi}{3}$ و $\frac{-25\pi}{6}$ رادیان را حساب کنید.

$$1)\ \frac{14\pi}{3}=\frac{12\pi+2\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=4\pi+\frac{2\pi}{3}$$

$$2)\ \frac{-25\pi}{6}=\frac{-24\pi-\pi}{6}=\frac{-24\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-4\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$1)\ \sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\sin\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2)\ \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$3)\ \sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=\sin\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-4\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$4)\ \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=\cos\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-4\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

تعریف تانژانت یک زاویه

تعریف

اگر α زاویه‌ای باشد که $\cos\alpha \neq 0$ بنا به تعریف $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

تانژانت زاویه‌های ۳۳۰ درجه و $\frac{4\pi}{3}$ رادیان را حساب کنید.

جواب:

$$\tan 330^\circ=\frac{\sin 330^\circ}{\cos 330^\circ}=\frac{\sin(360^\circ-30^\circ)}{\cos(360^\circ-30^\circ)}=\frac{\sin(-30^\circ)}{\cos(-30^\circ)}=\frac{-\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3}=\frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}}=\frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{3})}{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}=\frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{+\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

مثال : نشان دهید برای زاویه دلخواه θ تساوی های زیر برقرارند.

(الف) $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

(ب) $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

(ج) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

اثبات الف: $\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$

اثبات ب: $\tan(\pi+\theta)=\frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$

اثبات (ج) تمرین * * *

مثال : دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

حل : می دانیم $\tan\frac{\pi}{4}=1$. از طرفی می دانیم $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ، بنابراین $\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$

همچنین چون $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ ، بنابراین $\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

یعنی زاویه های $(-\frac{\pi}{4})$ و $(\pi-\frac{\pi}{4})$ $\frac{3\pi}{4}$ دو مورد از زاویه هایی هستند که تانژانت آنها برابر ۱- است.

مثال : دو زاویه مشخص کنید که کسینوس آنها برابر صفر باشد.

حل : می دانیم که $\cos\frac{\pi}{2}=0$ می باشد، پس یکی از جواب های مسئله مشخص شد، زاویه $\frac{\pi}{2}$

از طرفی می دانیم $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$ بنابراین با در نظر گرفتن $\theta=\frac{\pi}{2}$ داریم :

$$\cos(2\pi+\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0 \longrightarrow$$ جواب دیگر : $2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$

مثال : دو زاویه نام ببرید که سینوس آنها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد.

جواب : می دانیم $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، همچنین $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ بنابراین :

$\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ← یکی از زاویه های مورد نظر را می توان $(-\frac{\pi}{3})$ در نظر گرفت.

همچنین $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ ، بنابراین $\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

یعنی زاویه $(\pi+\frac{\pi}{3})$ نیز دارای سینوس $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

نکته : **سینوس و کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی در بازهٔ (۰،۱) هستند.**

نکته ۱ : $-1\leq \sin(\text{هر زاویه})\leq 1$

سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه، اعدادی در بازهٔ [۱،۱-] هستند.

نکته ۲ : $-1\leq \cos(\text{هر زاویه})\leq 1$

تانژانت زاویه‌های تند هر عدد مثبتی می‌تواند باشد.

θ زاویه تند $\Longrightarrow 0<\tan\theta<+\infty$

نکته ۳ : $-\infty<\tan(\text{زاویه})<+\infty$

نکته : از هر زاویه می توان سینوس و یا کسینوس گرفت ولی تانژانت برخی زاویه ها تعریف نمی شود و نمی توان از هر زاویه ای تانژانت گرفت !!

نکته: منظور از عبارت $\sin^2\theta$ این است که $\sin\theta$ به توان ۲ برسد. $\leftarrow (\sin\theta)^2$

برای به دست آوردن حاصل یک عبارت مثلثاتی، کافی است مقادیر مثلثاتی خواسته شده را به دست آوریم و با جایگزین و ساده کردن در رابطه داده شده، حاصل عبارت را مشخص کنیم.

مثال: حاصل هر عبارت مثلثاتی را به دست آوریم.

(۱) $\sin^2(30^\circ) - \cos^2(45^\circ) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

(۲) $2\tan 45^\circ + \cos^2 60^\circ - 3\cos^2 30^\circ = 2(1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

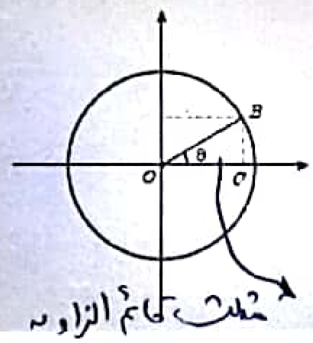
$= 2 + \frac{1}{4} - 3\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \boxed{0}$

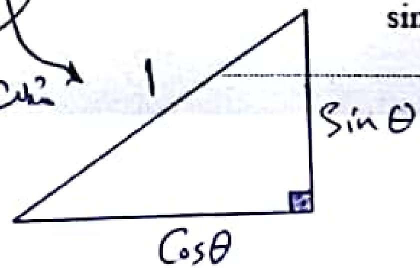
(۳) $\tan^5\frac{\pi}{4} - \sin^4\frac{\pi}{2} + 5\cos^{10} 0 = (1)^5 - (1)^4 + 5(1)^{10} = 1 - 1 + 5 = \boxed{5}$

(۴) $\cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ = 1$ اتحاد معروف مثلثاتی

۱ زاویهٔ تند θ را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.
با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OCB، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$





رابطه فیثاغورس: $(\text{ضلع قائم ۱})^2 + (\text{ضلع قائم ۲})^2 = (\text{وتر})^2 \Rightarrow (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

نکته: از تساوی (اتحاد مثلثاتی معروف) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ نتیجه می‌شود:

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ و $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

انتخاب علامت + یا - بستگی به آن دارد که زاویه θ در کدام ربع قرار گرفته باشد.

اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به‌طوری که $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

جواب: زاویه θ در ربع دوم است، بنابراین کسینوس آن منفی و تانژانت آن نیز منفی می‌باشد.

$$۱)\ \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲} = -\sqrt{1-\frac{۹}{۲۵}} = -\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۴}{۵}$$

$$۲)\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}} = -\frac{۳}{۴}$$

زاویهٔ θ در ربع سوم است و $\cos\theta = -\frac{۱}{۵}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

جواب: زاویه θ در ربع سوم است، بنابراین سینوس آن منفی و تانژانت آن مثبت می‌باشد.

$$۱)\ \sin\theta = -\sqrt{1-\left(-\frac{۱}{۵}\right)^۲} = -\sqrt{1-\frac{۱}{۲۵}} = -\sqrt{\frac{۲۴}{۲۵}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$۲)\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}}{-\frac{۱}{۵}} = +۲\sqrt{۶}$$

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

مثال: درستی تساوی مثلثاتی زیر را به کمک اتحاد $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ نشان دهید.

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

جواب:

روش اول: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \xrightarrow[\cos^2\theta]{\text{تقسیم بر}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

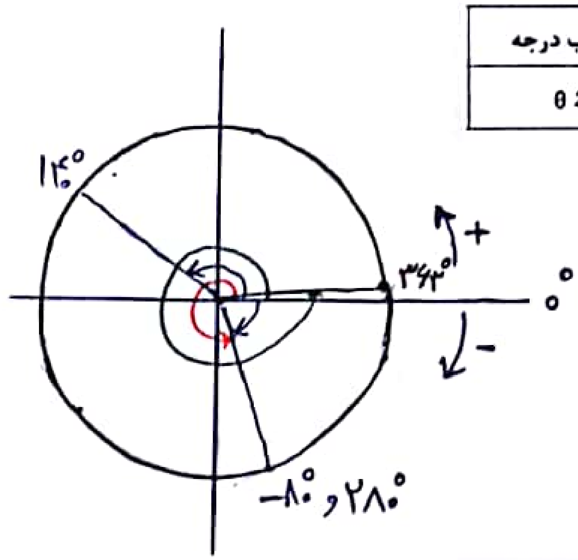
$$\xrightarrow{\text{پس از ساده کردن}} \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

روش دوم: $1+\tan^2\theta = 1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

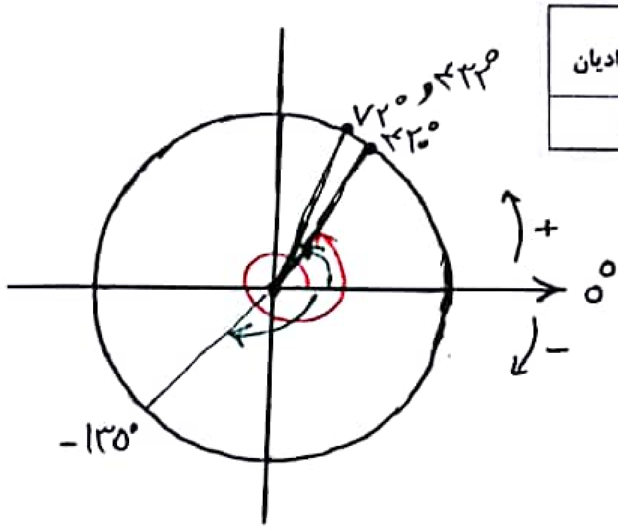
$$= \frac{1}{\cos^2\theta}\ ▲$$

۱ در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.

زاویهٔ θ بر حسب درجه	۳۶۳	۲۸۰	۱۴۰	-۸۰
مکان زاویهٔ θ	ربع اول	ربع چهارم	ربع دوم	ربع چهارم



	۴۳۲°	۴۲۰°	۷۲°	-۱۳۵°
زاویهٔ θ بر حسب رادیان	$\frac{12\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{4}$
مکان زاویهٔ θ	ربع اول	ربع اول	ربع اول	ربع سوم



۲ جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin θ	مثبت	مثبت	منفی	منفی
cos θ	مثبت	منفی	منفی	مثبت
tan θ	مثبت	منفی	مثبت	منفی

ربع اول

(+) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(+) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(+) $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ربع دوم

(+) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(−) $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(−) $\tan 135^\circ = -1$

ربع سوم

(−) $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$

(−) $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(+) $\tan 210^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{3}$

ربع چهارم

(−) $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$

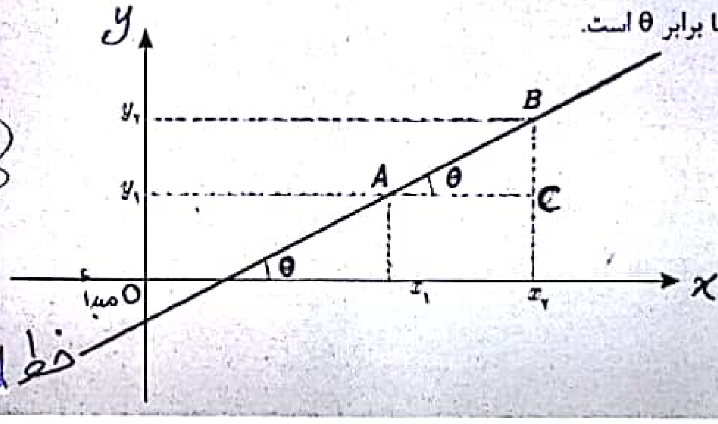
(+) $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(−) $\tan 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

توضیح: این علامت به معنای نسبت ۱ به ۱۰ می‌باشد و در اینجا یعنی به ازای هر ۱۰ واحد حرکت افقی، ارتفاع از سطح زمین ۱ واحد افزایش می‌یابد. بنابراین وضعیت سربالایی جاده را با شکل بالایی (چپ) مدل‌سازی کرده‌ایم.

یک خط دلخواه به معادلهٔ $y=ax+b$ با شیب مثبت ($a>0$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویهٔ این خط با محور طول‌ها برابر θ است.

شیب خط d: $a=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



خط d با معادله $y=ax+b$

چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه آن با محور افقی به‌دست می‌آورید؟

θ: زاویه‌ای که خط d با محور افقی (طول‌ها) می‌سازد.

a: شیب خط d (ضریب x) ← گذرا از نقاط A و B

فرمول ← شیب خط: $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

تانژانت زاویه θ برابر شیب خط می‌باشد یعنی: $\boxed{a=\tan\theta}$

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

این فعالیت نشان می‌دهد که برای یک خط با شیب مثبت، تانژانت زاویهٔ تند بین این خط و محور xها همان شیب خط است.

نکته

برای هر خط d با شیب a که با محور طول‌ها زاویه θ می‌سازد داریم: $\tan\theta=a$

تانژانت زاویه خط با محور افقی ← $\tan\theta$ ؛ شیب خط ← a

مثال ۱: شیب خط $y=x+5$ برابر چه عددی است؟ شیب $=1$

این خط چه زاویه‌ای با محور طول‌ها (افقی) می‌سازد؟

$\tan\theta=1 \xrightarrow{\text{زاویه}} \theta=\frac{\pi}{4}$

زاویهٔ خط به معادلهٔ $y=2$ با محور طول‌ها چقدر است؟

این خط با محور طول‌ها (افقی) موازی است و زاویهٔ آن با محور افقی برابر صفر است.

$\theta = 0$ (زاویهٔ خط با محور طول‌ها)

۲ شیب خط $y=-4$ چقدر است؟ زاویهٔ بین خط $y=-4$ و محور طول‌ها چقدر است؟

شیب این خط صفر می‌باشد. این خط با محور طول‌ها (افقی) موازی است و زاویهٔ آن با محور طول‌ها صفر است. ← $\theta = 0$

همچنین:

$\tan 0 = 0$: تانژانت زاویهٔ صفر نیز صفر است.

معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و محور yها را در نقطه به عرض ۲ قطع کند.

$\theta = 60^\circ \longrightarrow$ شیب خط $a = \tan\theta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

محور yها را در نقطهٔ عرض ۲ $\longrightarrow A\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}$ معادلهٔ خط: $y-y_1=a(x-x_1)$

$y-2=\sqrt{3}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}x+2}$ معادلهٔ خط

معادلهٔ خطی را که از مبدأ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه باز $\frac{5\pi}{6}$ می‌سازد، بنویسید.

مبدأ مختصات $O\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و زاویه با محور افقی $\theta = \frac{5\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

شیب خط $a=\tan\theta = \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y-y_1=a(x-x_1) \Rightarrow y-0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-0)$

$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطه به طول ۱-، محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن زاویهٔ ۱۵۰ درجه می‌سازد.

نقطه به طول ۱- روی محور افقی (طول) $\longrightarrow A\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}$, $\theta = 150^\circ$ زاویه

شیب خط

شیب خط $a=\tan\theta = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

معادلهٔ خط $y-y_1=a(x-x_1) \Rightarrow y-0=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

$\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Scanned by CamScanner

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویهٔ ۲۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ بگذرد.

(بارسم شکل) $\tan 20^\circ \simeq 0{,}36 \longrightarrow a = 0{,}36$ شیب خط

بنابراین: $y = ax + b \longrightarrow y = 0{,}36x + b$

با جایگذاری x و y نقطهٔ $\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ در معادلهٔ خط داریم:

$-2 = 0{,}36(-1) + b \Rightarrow -2 + 0{,}36 = b \Rightarrow \boxed{b = -1{,}64}$

بنابراین (معادلهٔ خط): $\boxed{y = 0{,}36x - 1{,}64}$

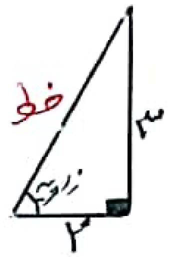
۳ خطی که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟

(از رسم خط و نقاله استفاده کنید.)

نقطه $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}$ ، نقطه $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}$

شیب خط $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-2}{1-(-1)} = \dfrac{3}{2}$

$\tan\theta = \dfrac{3}{2} \longrightarrow \theta \simeq 56$ درجه



مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

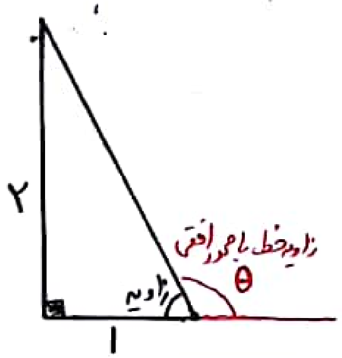
خط به معادلهٔ $y = -2x + 1$ با محور طول‌ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

شیب این خط $a = -2$ می‌باشد، پس تانژانت زاویهٔ خط با محور افقی برابر ۲- می‌باشد. به کمک رسم خط و نقاله، مقدار زاویهٔ تندی را که تانژانت آن برابر ۲ است پیدا می‌کنیم که تقریباً ۶۳٫۴ درجه است، یعنی: $\tan\theta = 2 \xrightarrow{\text{تقریباً}} \theta = 63{,}4$

بنابراین $180^\circ - 63{,}4 = 116{,}6^\circ$ می‌باشد که تانژانت آن تقریباً ۲- است.

۱ زاویهٔ بین خط به معادلهٔ $y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ و محور طول‌ها، چند رادیان است؟

زاویهٔ این خط با محور افقی (طول‌ها) برابر $116{,}6^\circ$ می‌باشد.



شیب خط $a = \sqrt{3}$

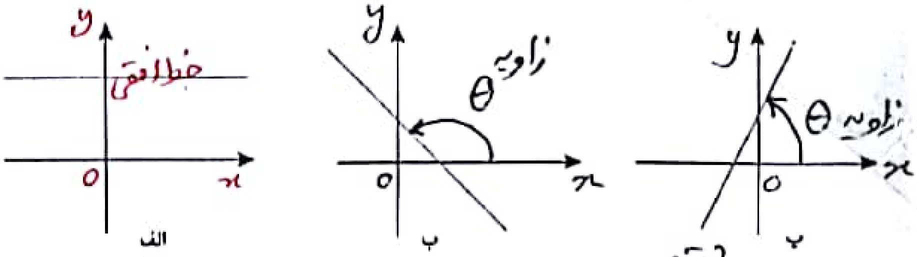
تانژانت زاویه $\tan\theta = a$

با شیب خط برابر

$\tan\theta = \sqrt{3} \longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$

(زاویه $\dfrac{\pi}{3}$ رادیان می‌سازد.)

۱ در شکل‌های زیر زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به‌دست آورید.



شیب صفر است.

$a=0$

زاویه خط افقی با محور طول‌ها همیشه صفر است.

$\theta=0$

خط با شیب منفی پس زاویه آن با محور افقی یک زاویه باز می‌باشد.

خط با شیب مثبت پس زاویه آن با محور افقی یک زاویه تند می‌باشد.

مطوری – دبیر ریاضی
@shakermatory
۰۹۳۵۶۱۹۲۵۵۳

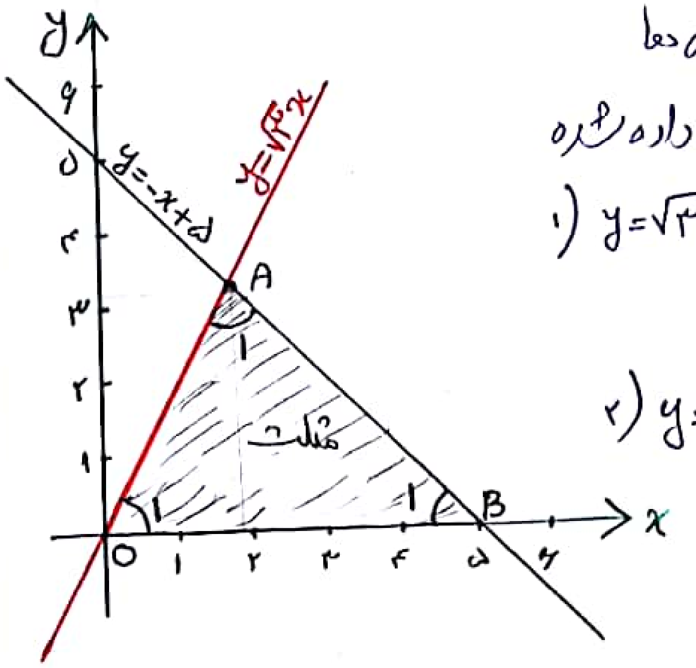
۵ از برخورد دو خط با معادله‌های $y=\sqrt{3}x$ و $y=-x+5$ و محور طول‌ها، یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به‌دست آورید.

خط‌ها را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و مثلث تشکیل شده را تشخیص می‌دهیم.

O_1 : زاویه خط $y=\sqrt{3}x$ با محور طول‌ها

B_1 : مکمل زاویه خط $y=-x+5$ با محور طول‌ها

A_1 : (زاویه سوم مثلث) زاویه بین دو خط داده شده



۱) $y=\sqrt{3}x \rightarrow$ شیب $=\sqrt{3} \rightarrow \tan O_1=\sqrt{3}$

$\rightarrow \hat{O}_1=60^\circ=\frac{\pi}{3}$ رادیان

۲) $y=-x+5 \rightarrow$ شیب $=-1$

$\rightarrow \tan B=-1$

$\rightarrow B=135^\circ$

$\rightarrow \hat{B}_1=180^\circ-135^\circ=45^\circ=\frac{\pi}{4}$ رادیان

۳) زاویه سوم $60^\circ+45^\circ=105^\circ$

$\hat{A}_1=180^\circ-105^\circ=75^\circ=\frac{5\pi}{12}$ رادیان