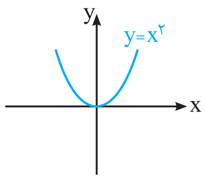
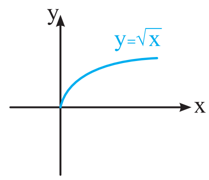
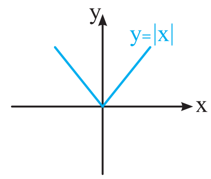
درسنامه ۱

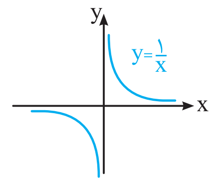
تبدیل نمودارها

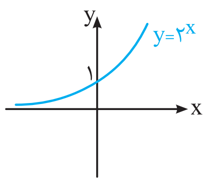
قبلاً با نمودار برخی از توابع مهم آشنا شدید:

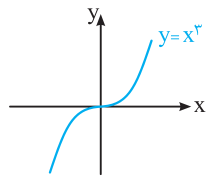


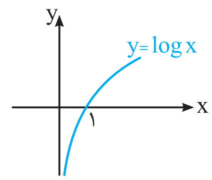


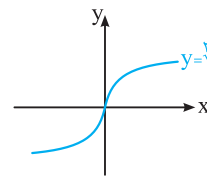












اکنون می‌خواهیم با تبدیل نمودارهای بالا (در صورت امکان) نمودار برخی توابع دیگر را رسم کنیم.

انتقال نمودارها

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده باشد،

آ) انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ از روی نمودار $y=f(x)$؛

۱) اگر $k>۰$ باشد، نمودار f را k واحد به **بالا** انتقال می‌دهیم. ۲) اگر $k<۰$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به **پایین** انتقال می‌دهیم.

ب) انتقال افقی: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ از روی نمودار $y=f(x)$؛

۱) اگر $k>۰$ باشد، نمودار f را k واحد به **چپ** منتقل می‌کنیم. ۲) اگر $k<۰$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به **راست** منتقل می‌کنیم.

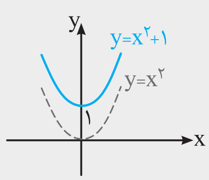
مثال

به کمک نمودار $y=x^{۲}$، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

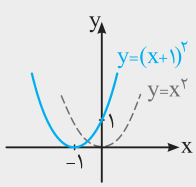
آ) $y=x^{۲}+۱$ ب) $y=(x+۱)^{۲}$ پ) $y=x^{۲}-۱$

ت) $y=(x-۱)^{۲}$ ث) $y=(x-۱)^{۲}+۱$ ج) $y=(x+۱)^{۲}-۱$

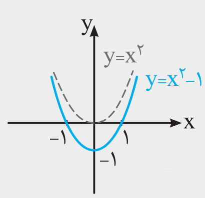
پاسخ: آ) برای رسم $y=x^{۲}+۱$، نمودار $y=x^{۲}$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



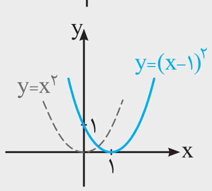
ب) برای رسم $y=(x+۱)^{۲}$، نمودار $y=x^{۲}$ را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:



پ) برای رسم $y=x^{۲}-۱$، نمودار $y=x^{۲}$ را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

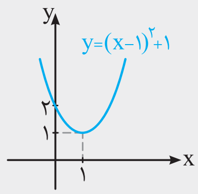


ت) برای رسم $y=(x-۱)^{۲}$، نمودار $y=x^{۲}$ را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم:

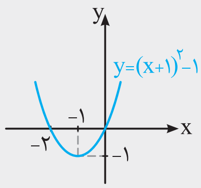


درسنامه ۱

ث) برای رسم $y=(x-۱)^۲+۱$، نمودار $y=x^۲$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



ج) برای رسم $y=(x+۱)^۲-۱$، نمودار $y=x^۲$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



نکته

اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب برابر با $[a,b]$ و $[c,d]$ باشد، آن‌گاه:

۱) دامنهٔ تابع $y=f(x+h)+k$ با حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید، زیرا باید $(x+h)$ در دامنهٔ f باشد:

$$a \le x+h \le b \Rightarrow a-h \le x \le b-h$$

۲) برد تابع $y=f(x+h)+k$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید، زیرا $f(x+h)$ در برد f قرار می‌گیرد:

$$c \le f(x+h) \le d \xrightarrow{+k} c+k \le \underbrace{f(x+h)+k}_{y} \le d+k \Rightarrow c+k \le y \le d+k$$

مثال

اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ برابر با $[-۱,۳]$ و $(۲,۵]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x)=f(x-۲)-۳$ را بیابید.

پاسخ:

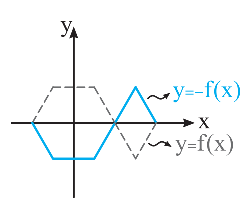
دامنهٔ g : $-۱ \le x-۲ \le ۳ \xrightarrow{+۲} -۱+۲ \le x \le ۳+۲ \Rightarrow ۱ \le x \le ۵$

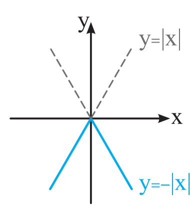
برد g : $۲ < f(x-۲) \le ۵ \xrightarrow{-۳} -۱ < f(x-۲)-۳ \le ۲ \Rightarrow -۱ < y = g(x) \le ۲$

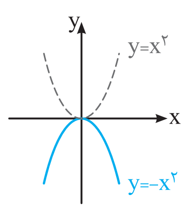
انعکاس نمودارها

۱) برای رسم نمودار $y=-f(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است yها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

به طور مثال:

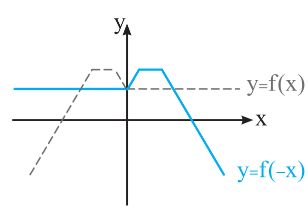


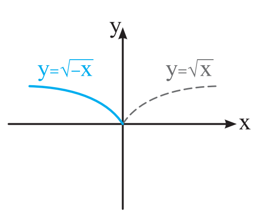




۲) برای رسم نمودار $y=f(-x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است xها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

به طور مثال:





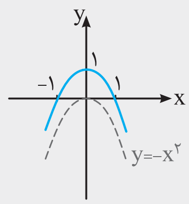
درسنامه ۱

مثال

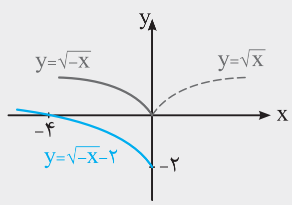
نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

آ) $y=-x^{۲}+۱$ ب) $y=\sqrt{-x}-۲$ پ) $y=-\sqrt{-x+۱}$ ت) $y=-(x-۱)^{۲}+۱$

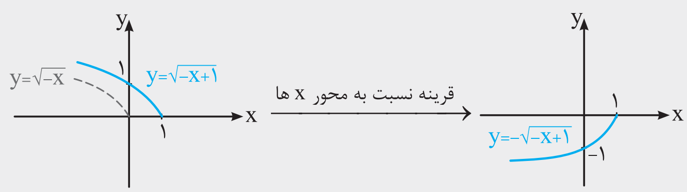
پاسخ: آ) کافی است نمودار $y=-x^{۲}$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:



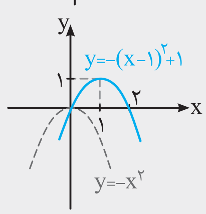
ب) ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=\sqrt{-x}$ به‌دست آیـد. سپس نمودار $y=\sqrt{-x}$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



پ) ابتدا نمودار $y=\sqrt{-x}$ را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم، تا نمودار $y=\sqrt{-(x-۱)}=\sqrt{-x+۱}$ به‌دست آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



ت) نمودار $y=-x^{۲}$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نکته

اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب برابر با $[a،b]$ و $[c،d]$ باشد، آن‌گاه:

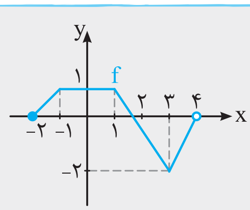
۱) دامنهٔ تابع $y=f(-x)$ برابر با $[-b،-a]$ است: $a\le -x\le b \xrightarrow{\times(-۱)} -b\le x\le -a$

۲) برد تابع $y=-f(x)$ برابر با $[-d،-c]$ است: $c\le f(x)\le d \xrightarrow{\times(-۱)} -d\le -f(x)\le -c$

توجه: بازه‌های داده‌شده در دامنه و برد، می‌توانند باز یا نیم‌باز هم باشند.

مثال

اگر نمودار زیر مربوط به تابع f باشد، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را بیابید.



آ) $g(x)=f(-x)+۱$

ب) $k(x)=-f(x+۱)$

پ) $h(x)=-f(-x+۱)$

پاسخ: دامنه: $D_f=[-۲،۴)$ ، برد: $R_f=[-۲،۱]$

آ)
$$\begin{cases} D_g:-۲\le -x<۴ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲\ge x>-۴ \Rightarrow D_g=(-۴،۲] \\ R_g:-۲\le f(-x)\le ۱ \xrightarrow{+۱} -۱\le f(-x)+۱\le ۲ \Rightarrow R_g=[-۱،۲] \end{cases}$$

درسنامه ۱

ب)
$$\begin{cases} D_k : -۲ \le x+۱ < ۴ \xrightarrow{+(-۱)} -۳ \le x < ۳ \Rightarrow D_k = [-۳,۳) \\ R_k : -۲ \le f(x+۱) \le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲ \ge -f(x+۱) \ge -۱ \Rightarrow R_k = [-۱,۲] \end{cases}$$

پ)
$$\begin{cases} D_h : -۲ \le -x+۱ < ۴ \xrightarrow{+(-۱)} -۳ \le -x < ۳ \xrightarrow{\times(-۱)} ۳ \ge x > -۳ \Rightarrow D_h = (-۳,۳] \\ R_h : -۲ \le f(-x+۱) \le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲ \ge -f(-x+۱) \ge -۱ \Rightarrow ۲ \ge h(x) \ge -۱ \Rightarrow R_h = [-۱,۲] \end{cases}$$

انقباض و انبساط نمودارها

آ) انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y=f(kx)$، طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌کنیم. در این‌صورت با فرض $k>۰$؛

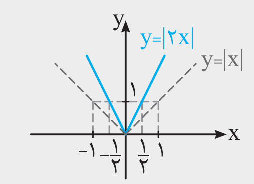
۱) اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{۱}{k}$ **منقبض** می‌گردد.

۲) اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{۱}{k}$ **منبسط** می‌گردد.

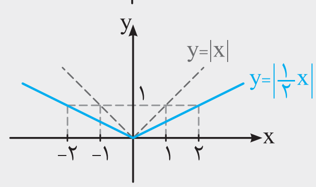
مثال **به کمک نمودار $y=|x|$، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.**

آ) $y=|۲x|$ **ب) $y=|\frac{۱}{۲}x|$**

پاسخ: آ) برای رسم $y=|۲x|$، نمودار $y=|x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض می‌گردد:



ب) برای رسم $y=|\frac{۱}{۲}x|$، نمودار $y=|x|$ در راستای افقی با ضریب $۲=\frac{۱}{k}$ منبسط می‌گردد:



ب) انبساط و انقباض عمودی

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y=kf(x)$، عرض نقاط نمودار تابع f را در k ضرب می‌کنیم. در این‌صورت با فرض $k>۰$؛

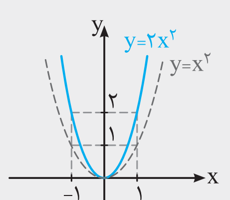
۱) اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k **منبسط** می‌گردد.

۲) اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k **منقبض** می‌گردد.

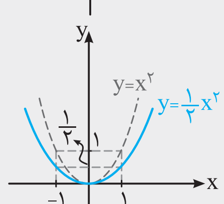
مثال **به کمک نمودار تابع $y=x^۲$، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.**

آ) $y=۲x^۲$ **ب) $y=\frac{۱}{۲}x^۲$**

پاسخ: آ) نمودار $y=x^۲$ با ضریب $k=۲$ در راستای قائم منبسط می‌گردد:



ب) نمودار $y=\frac{۱}{۲}x^۲$ با ضریب $k=\frac{۱}{۲}$ در راستای قائم منقبض می‌گردد:



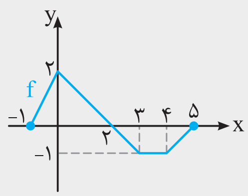
درسنامه ۱

نکته

برای رسم نمودار توابع $y=f(ax+b)$ ابتدا باید از ضریب x داخل پرانتز فاکتور بگیریم تا در ترتیب تبدیلات اشتباه نکنیم (و ابتدا با ضریب $\frac{۱}{a}$، انبساط یا انقباض افقی و سپس انتقال را انجام دهیم). $y=f(ax+b)=f(a(x+\frac{b}{a}))$

مثال

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.



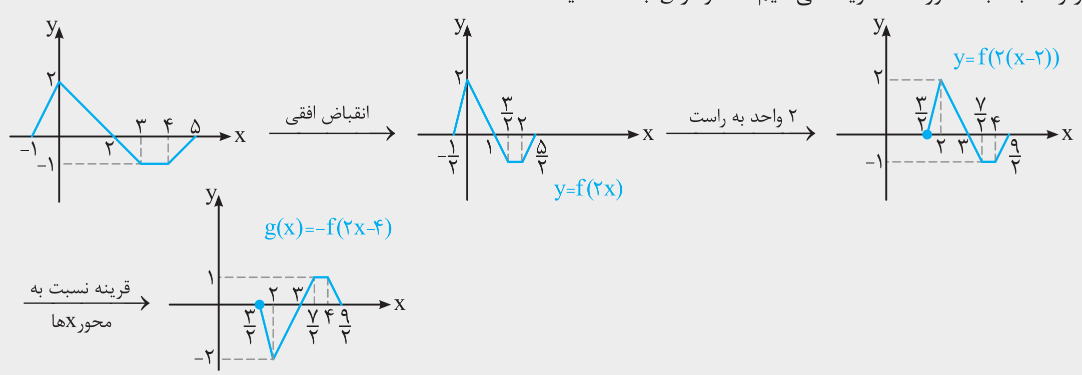
آ) $\mathbf{g(x)=-f(۲x-۴)}$

ب) $\mathbf{h(x)=۲f(-x+۱)}$

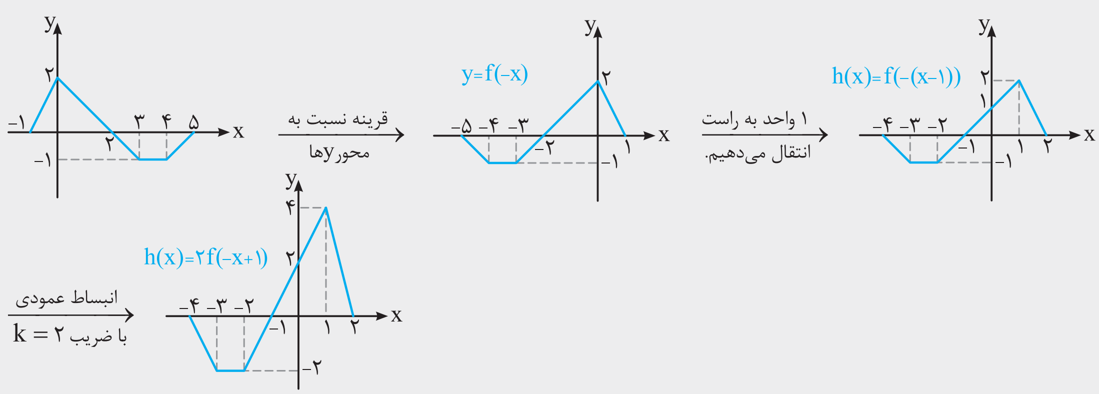
پاسخ: آ) ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:

$g(x)=-f(۲(x-۲))$

بنابراین نمودار تابع f را ابتدا با ضریب $\frac{۱}{k}=\frac{۱}{۲}$ منقبض و سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y=f(۲(x-۲))$ به‌دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار g به‌دست آید:



ب) ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم: $h(x)=۲f(-(x-۱))$



نکته

اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب برابر با $[m،n]$ و $[c،d]$ باشد، آن‌گاه

۱) برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=kf(ax+b)+h$ کافی است نامعادلهٔ مقابل را حل کنیم: $m\le ax+b\le n$

۲) برای محاسبهٔ برد تابع $y=kf(ax+b)+h$، طرفین نامعادلهٔ زیر را (با توجه به علامت k) k برابر کرده، سپس طرفین نامعادلهٔ حاصل را با h جمع می‌کنیم تا برد تابع y به‌دست آید. $c\le f(ax+b)\le d$

توجه: بازه‌های داده‌شده برای دامنه و برد می‌توانند باز یا نیم‌باز هم باشند.

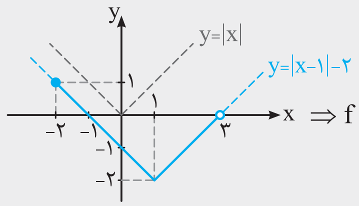
درسنامه ۱

مثال

تابع $f(x)=|x-۱|-۲$ را در بازهٔ $[-۲,۳)$ در نظر بگیرید و دامنه و برد هر یک از توابع زیر را پیدا کنید.

آ) $g(x)=-f(۲x-۱)+۳$ ب) $k(x)=۳f(۲-x)-۱$

پاسخ: آ) ابتدا با رسم نمودار f، برد تابع f را می‌یابیم. برای رسم نمودار f نیز کافی است نمودار $y=|x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم:



$\Rightarrow$ برد f $=R_f=[-۲,۱]$

$$R_g: -۲\le f(۲x-۱)\le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲\ge -f(۲x-۱)\ge -۱ \xrightarrow{+۳} ۵\ge -f(۲x+۱)+۳\ge ۲ \Rightarrow R_g=[۲,۵]$$

دامنهٔ تابع f همان بازهٔ $[-۲,۳)$ است، بنابراین:

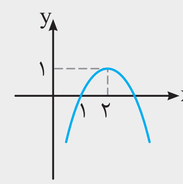
$$D_g: -۲\le ۲x-۱<۳ \xrightarrow{+۱} -۱\le ۲x<۴ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲}\le x<۲ \Rightarrow D_g=[-\frac{۱}{۲},۲)$$

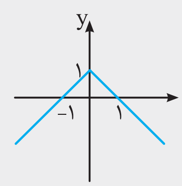
ب)
$$D_k: -۲\le ۲-x<۳ \xrightarrow{+(-۲)} -۴\le -x<۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۴\ge x>-۱ \Rightarrow D_k=(-۱,۴]$$

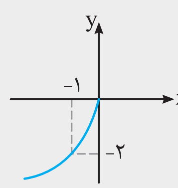
$$R_k: -۲\le f(۲-x)\le ۱ \xrightarrow{\times ۳} -۶\le ۳f(۲-x)\le ۳ \xrightarrow{+(-۱)} -۷\le ۳f(۲-x)-۱\le ۲ \Rightarrow R_k=[-۷,۲]$$

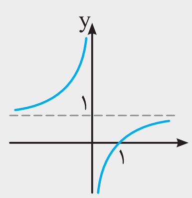
مثال

ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را به کمک توابع $y=|x|$، $y=x^۲$، $y=\sqrt{x}$ و $y=\frac{۱}{x}$ بنویسید.

آ)


ب)


پ)


ت)


پاسخ: آ) با مقایسهٔ نمودار داده‌شده و نمودار $y=x^۲$، درمی‌یابیم که نمودار $y=x^۲$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$$y=x^۲ \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-x^۲ \xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-۲)^۲+۱$$

ب) با مقایسهٔ نمودار و نمودار $y=|x|$، درمی‌یابیم که نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

$$y=|x| \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-|x| \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{۱ واحد به بالا}} y=-|x|+۱$$

پ) نمودار $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور x ها و محور y ها قرینه و سپس با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط شده است:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} y=-۲\sqrt{-x}$$

ت) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

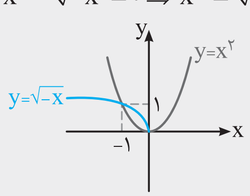
$$y=\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{۱ واحد به بالا}} y=-\frac{۱}{x}+۱$$

مثال

به کمک رسم نمودار، معادلهٔ $x^۲-\sqrt{-x}=۰$ را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادله، نمودار توابع $y=x^۲$ و $y=\sqrt{-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تقاطع، جواب‌های معادله‌اند:

$$x^۲-\sqrt{-x}=۰\Rightarrow x^۲=\sqrt{-x}$$



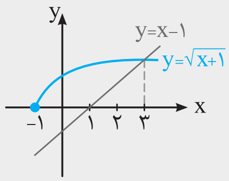
$\Rightarrow$ جواب‌های معادله $=\{۰,-۱\}$

درسنامه ۱

مثال

به روش هندسی، نامعادلهٔ $\sqrt{x+1} \geq x-1$ را حل کنید.

پاسخ: باید نقاطی را بیابیم که در آن نقاط، نمودار $y=\sqrt{x+1}$ بالا یا روی نمودار $y=x-1$ قرار دارند:

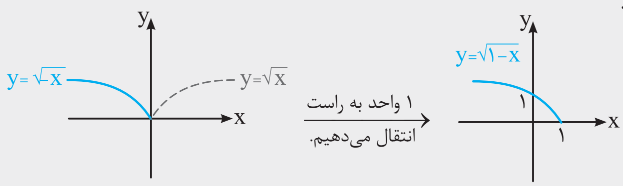


$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{-1 \leq x \leq 3\}$

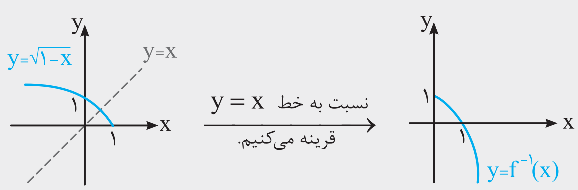
مثال

با رسم نمودار $f(x)=\sqrt{1-x}$ وارون‌پذیری تابع f را بررسی کنید. در صورت وارون‌پذیری نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.

پاسخ: نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=\sqrt{-x}$ به‌دست آید. سپس نمودار حاصل را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=\sqrt{-(x-1)}=\sqrt{1-x}$ به‌دست آید.



با توجه به نمودار f، f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است و برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.



سؤالات امتحانی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

آ) برای رسم نمودار تابع $g(x)=-f(x)$ از روی نمودار تابع f، کافی است نموار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرد. (خرداد ۹۷)

ب) نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=f(-x)$، نسبت به محور yها قرینه‌اند.

پ) برای رسم تابع $g(x)=|x+1|-2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند. (دی ۹۶)

ت) اگر دامنهٔ تابع f برابر $[-1,3]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=-3f(2x)$ بازهٔ $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ است. (دی ۹۵)

۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

آ) اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ باشد، برد این تابع مجموعهٔ .... است. (شهریور ۹۵)

۱) $[1,\sqrt{2}]$ ۲) $[0,+\infty)$

ب) در رسم نمودار $y=f(ax)$ از روی نمودار $y=f(x)$، اگر $0<a<1$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در امتداد xها .... می‌شود.

۱) منبسط ۲) منقبض (شهریور ۹۵)

پ) تابع $y=f(x)$ را با دامنهٔ $[-2,1]$ در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $g(x)=-f(2x)+1$ بازهٔ .... است.

۱) $[-4,2]$ ۲) $[-1,\frac{1}{2}]$ (خرداد ۹۴)

ت) در رسم نمودار $y=af(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، اگر $0<a<1$ باشد، نمودار f در امتداد محور .... ، .... می‌گردد.

۱) yها، منبسط ۲) xها، منبسط ۳) yها، منقبض ۴) xها، منقبض

ـ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

۳. $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$ ۴. $y = 1 - 2\cos x$ ۵. $y = -2^{x-2} + 1$ ۶. $y = -\log(x+1)$

۷. $y = 3x^2 + 1$ ۸. $y = \frac{-1}{2}x^2 - 1$ ۹. $y = 1 - \cos 2x$ ۱۰. $y = 2 - \sqrt{x-2}$

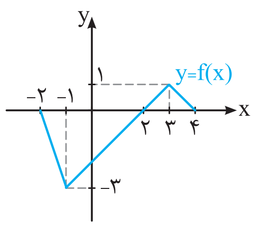
۱۱. $y = 2\sqrt{-2x}$ ۱۲. $y = -2\sqrt{x+1}$ ۱۳. $y = -\sqrt{\frac{x}{2}}$ ۱۴. $y = 1 + \sqrt{-x+1}$

۱۵. نمودار تابع f داده شده است، به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $y = f(-x)$ ب) $y = -2f(x)$

پ) $y = -f(x-1) + 1$ ت) $y = f(2x - 4)$

ث) $y = f(2 - x)$ ج) $y = 1 - \frac{1}{3}f(x)$

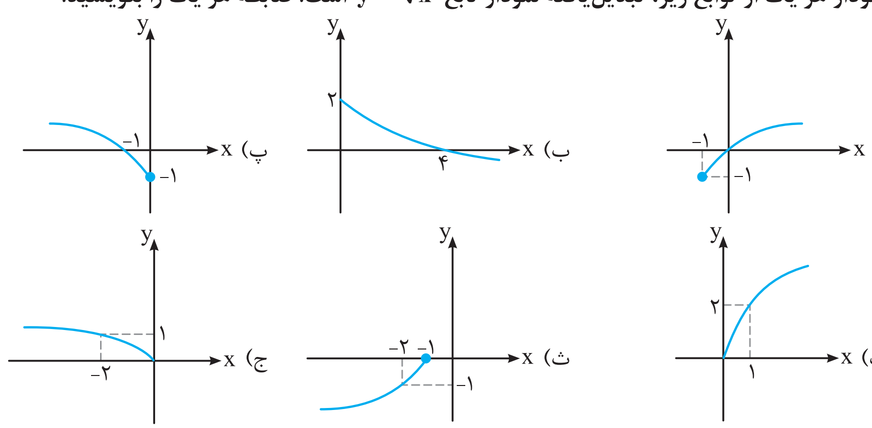


۱۶. نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در بازهٔ $[-1, 2]$ رسم کنید، سپس به کمک نمودار f، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و با نمودار f مقایسه کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $y = f(-x)$ ب) $y = -f(x)$ پ) $y = -f(-x)$ ت) $y = 2f(x)$

ث) $y = \frac{1}{2}f(x)$ ج) $y = f(2x)$ چ) $y = -2f(\frac{x}{2})$ ح) $y = \frac{1}{2}f(-2x)$

۱۷. نمودار هر یک از توابع زیر، تبدیل‌یافتهٔ نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ است. ضابطهٔ هر یک را بنویسید. (برگرفته از کتاب درسی)



۱۸. به کمک رسم نمودار، تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x - 3| = \sqrt{5 - x}$ را بیابید. (خرداد ۹۷)

۱۹. با رسم نمودار، معادلهٔ $\sqrt{x+1} = x - 1$ را حل کنید. (شهریور ۹۶ و شهریور ۹۲)

۲۰. معادلهٔ $|x| = \sqrt{2 + x}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (دی ۹۴)

۲۱. معادلهٔ $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

۲۲. معادلهٔ $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۱)

۲۳. نامعادلهٔ $x^2 \le |x|$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۱ و مشابه دی ۸۹)

۲۴. نامعادلهٔ $\frac{1}{x} \le \sqrt{x}$ را با روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۰)

۲۵. نامعادلهٔ $x + 1 < |x|$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۴)

۲۶. با رسم نمودار، نامعادلهٔ $|x+1| < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به‌صورت بازه نمایش دهید. (دی ۹۶ و مشابه خرداد ۹۶)

۲۷. نامعادلهٔ $2^x \leq |x-1|$ را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید.

۲۸. نامعادلهٔ $\log_{0/5} x \leq |x-1|$ را به روش هندسی حل کنید.

۲۹. نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ وارون‌پذیر است، سپس نمودار و ضابطهٔ وارون آن را بنویسید. (مشابه خرداد ۹۷)

۳۰. با رسم نمودار، وارون‌پذیری $y = \sqrt{x+2} - 3$ را بررسی کنید و ضابطهٔ تابع وارون را بیابید. (شهریور۹۵)

۳۱. با رسم نمودار، وارون‌پذیری تابع $y = \sqrt{x+3} + 5$ را بررسی کنید و نمودار و ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید. (مشابه شهریور ۹۲)

۳۲. وارون‌پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4$ را روی دامنهٔ $\{x > 0\}$ بررسی کنید و ضابطه و نمودار تابع وارون را به‌دست آورید. (دی ۹۶)

۳۳. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون‌پذیر است. سپس ضابطهٔ وارون آن را بیابید. (خرداد ۹۱)

۳۴. وارون‌پذیری تابع $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$ را با رسم شکل بررسی کنید. (شهریور ۹۶)

۳۵. به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری تابع زیر را بررسی کنید. (خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۳۶. نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن وارون‌پذیری تابع را بررسی کنید. در صورت وارون‌پذیری، نمودار و ضابطهٔ وارون f را تعیین کنید. (خرداد ۸۹)

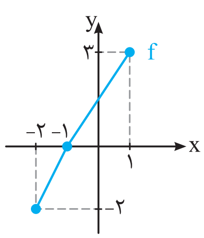
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۳۷. نقطهٔ $(-3,1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = -f(2x)$ این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌گردد؟ (شهریور ۹۶)

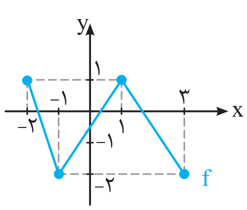
۳۸. نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است: (خرداد ۹۶)

آ) دامنهٔ تابع $g(x) = f(\dfrac{x}{2})$ را تعیین کنید.

ب) نمودار $h(x) = f(-x) + 1$ را رسم کنید.



۳۹. نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل است. با استفاده از تبدیل نمودار، نمودار تابع $y = f(\dfrac{1}{2}x) + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۴)



۴۰. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-1|$ را با دامنهٔ $[0,2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۳)

۴۱. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-3|$ را در بازهٔ $[2,4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید. (دی ۹۱)

۴۲. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (خرداد ۹۲)

پاسخ‌های تشریحی

۱ آ) درست است. برای رسم $g(x)=-f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار f را قرینه کنیم. بنابراین نمودار f را نسبت به محور x ها (طول‌ها) قرینه می‌کنیم.

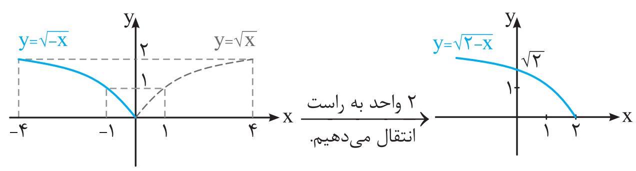
ب) درست است. چون x ها قرینه می‌گردد.

پ) نادرست است. برای رسم نمودار g، نمودار f را ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

ت) درست است. زیرا داریم:

$$-۱\le ۲x\le ۳ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲}\le x\le \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_g=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$$

۲ آ) با رسم نمودار تابع f داریم: $y=\sqrt{۲-x}=\sqrt{-(x-۲)}$



بنابراین برد تابع برابر با $[۰,+\infty)$ است.

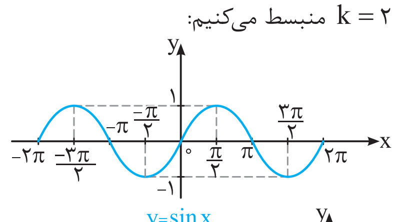
ب) اگر $۰<a<۱$، برای رسم $y=f(ax)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{a}>۱$ در راستای x ها منبسط کنیم.

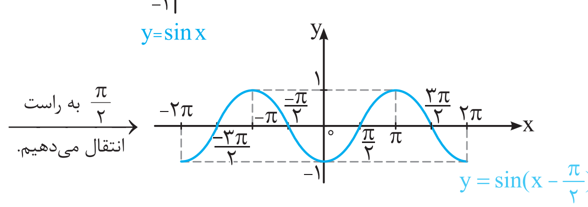
پ) باید $(۲x)$ در دامنهٔ تابع f قرار گیرد: $g(x)=-f(۲x)+۱$

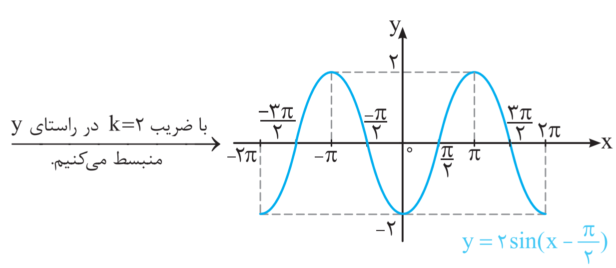
$$D_g: -۲\le ۲x\le ۱ \xrightarrow{\div ۲} -۱\le x\le \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g=[-۱,\frac{۱}{۲}]$$

ت) برای رسم $y=af(x)$ وقتی $۰<a<۱$، نمودار f را در راستای y ها منقبض می‌کنیم.

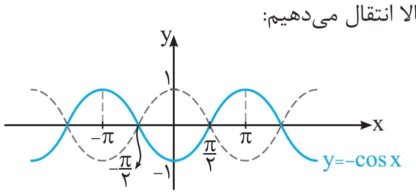
۳ نمودار $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{۲}$ به راست انتقال می‌دهیم و سپس در راستای محور y ها، با ضریب $k=۲$ منبسط می‌کنیم:

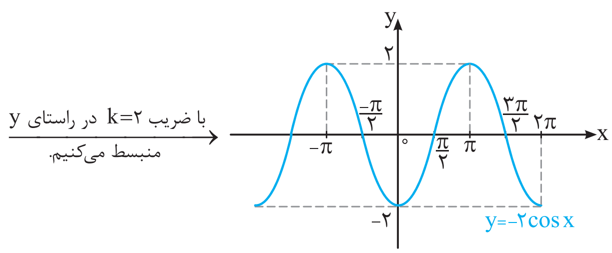


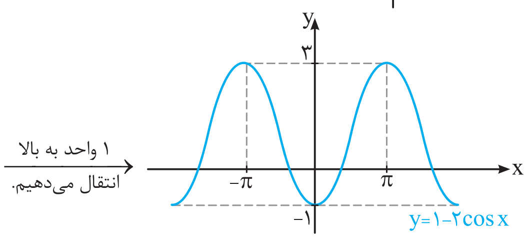




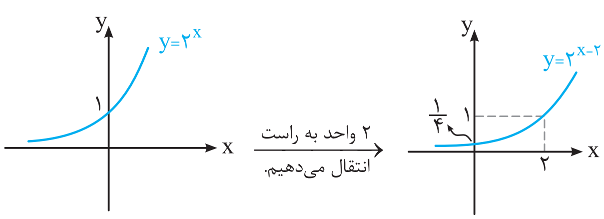
۴ نمودار $y=\cos x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-\cos x$ به‌دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای y منبسط کرده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

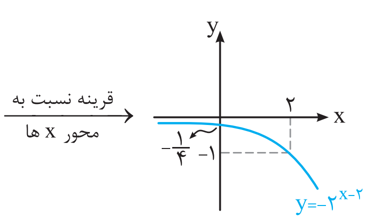


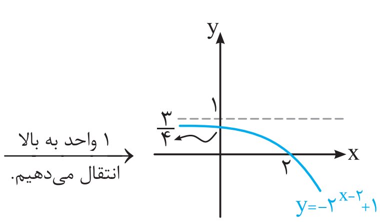




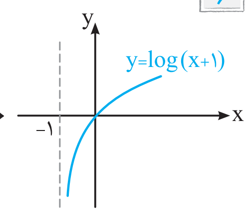
۵ برای رسم نمودار $y=-۲^{x-۲}+۱$، کافی است نمودار $y=۲^x$ را ۲ واحد به راست برده سپس نسبت به محور x ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا انتقال دهیم:



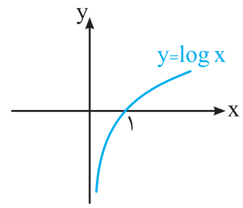




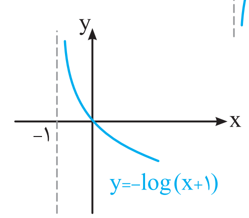
۶



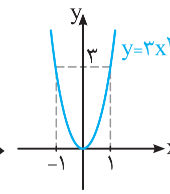
۱ واحد به چپ
انتقال می‌دهیم.



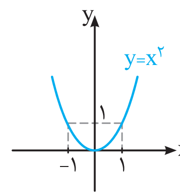
قرینه نسبت به محور x ها



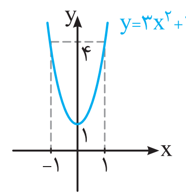
۷



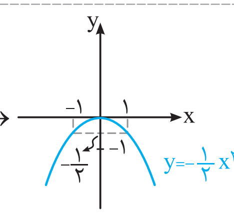
در راستای y با ضریب
k=۳ منبسط می‌کنیم.



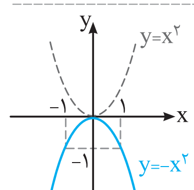
۱ واحد به بالا
انتقال می‌دهیم.



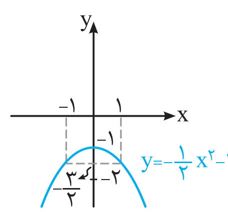
۸



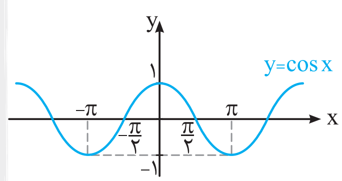
انقباض با ضریب
۱/۲ در راستای y



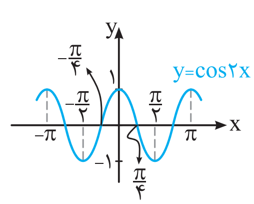
۱ واحد به پایین
انتقال می‌دهیم.



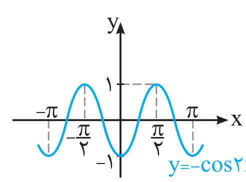
۹



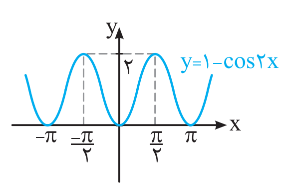
با ضریب ۱/۲ در راستای
x ها منقبض می‌کنیم.



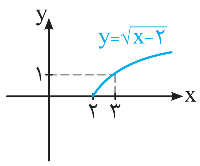
قرینه نسبت به
محور x ها



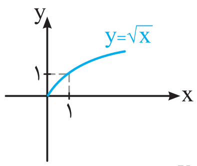
۱ واحد به بالا انتقال
می‌دهیم.



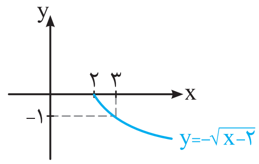
۱۰



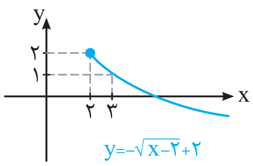
۲ واحد به راست
انتقال می‌دهیم.



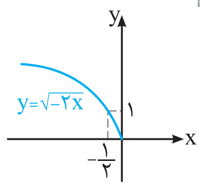
قرینه نسبت به
محور x ها



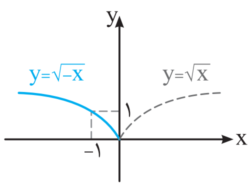
۲ واحد به بالا
انتقال می‌دهیم.



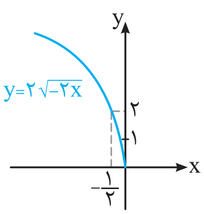
۱۱



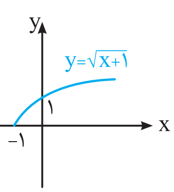
انقباض افقی با
ضریب ۱/۲



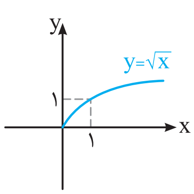
انبساط عمودی
با ضریب ۲



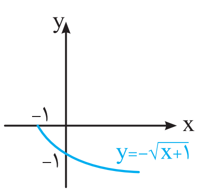
۱۲



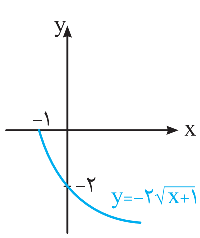
۱ واحد به چپ
انتقال می‌دهیم.



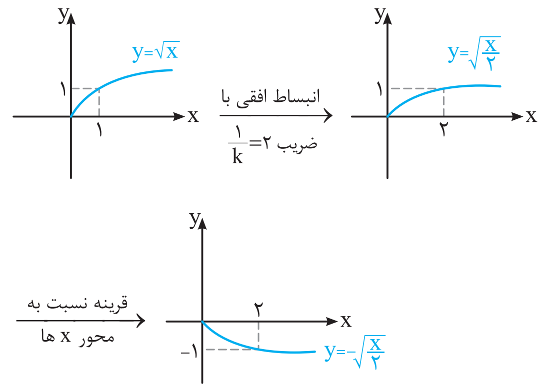
قرینه نسبت به
محور x ها



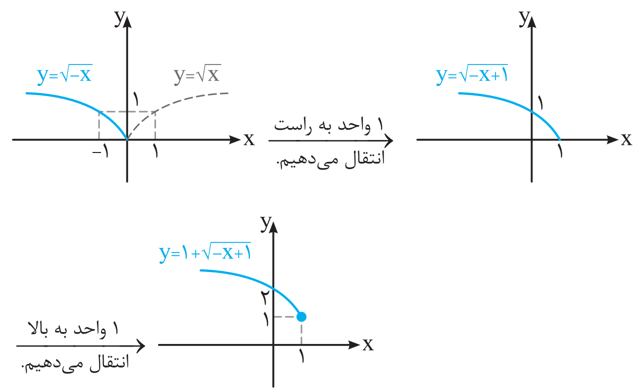
انبساط عمودی
با ضریب ۲



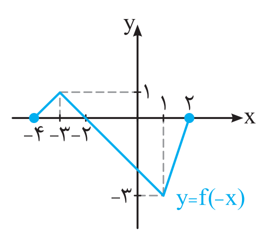
۱۳



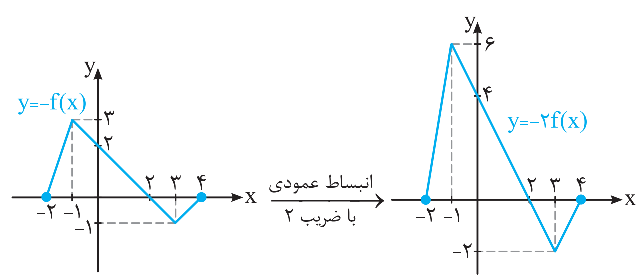
۱۴ $y=۱+\sqrt{-x+۱} \Rightarrow y=۱+\sqrt{-(x-۱)}$



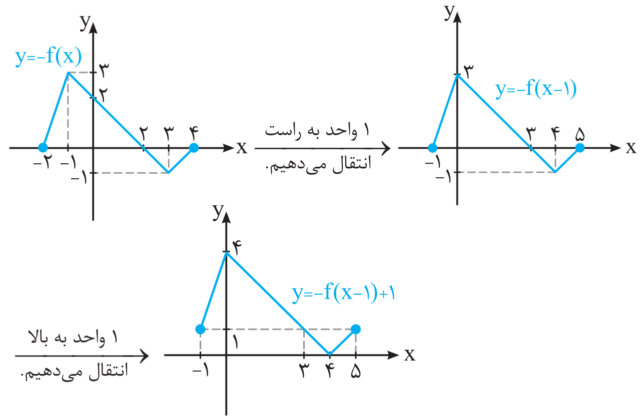
۱۵ آ) برای رسم نمودار $y=f(-x)$، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



ب) برای رسم نمودار $y=-۲f(x)$، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس با ضریب ۲ در راستای محور y منبسط می‌کنیم:

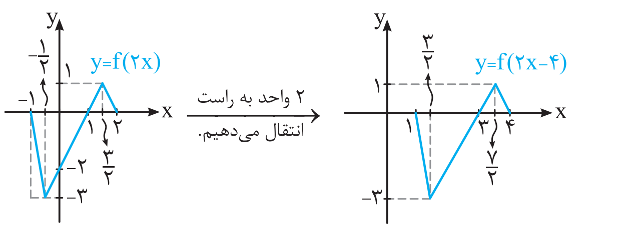


پ) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرده تا نمودار $y=-f(x)$ به‌دست آید و سپس ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-f(x-۱)$ به‌دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



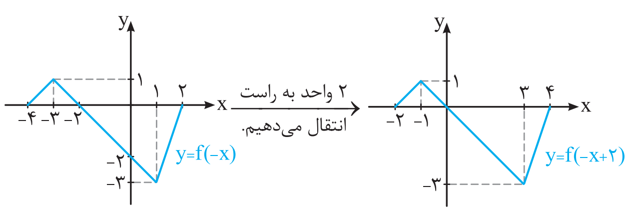
ت) $y=f(۲x-۴)=f(۲(x-۲))$

نمودار f را در راستای افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض می‌کنیم تا نمودار $y=f(۲x)$ به دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:

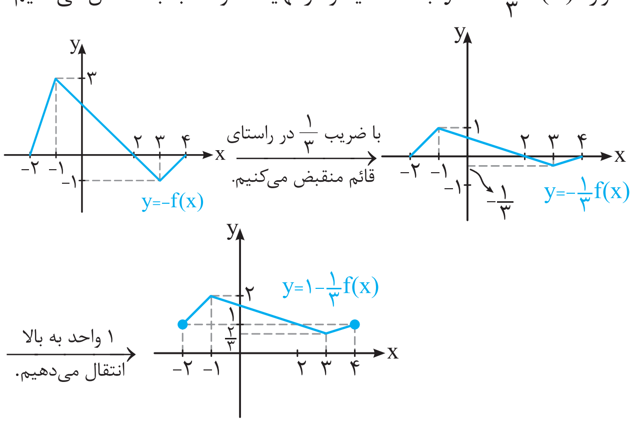


ث) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=f(-x)$ به‌دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم.

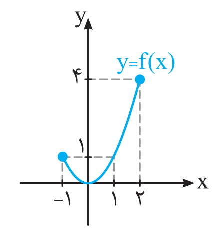
$y=f(-x+۲)=f(-(x-۲))$



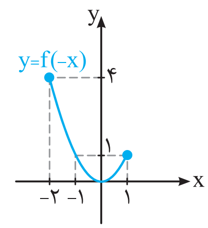
ج) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)$ به‌دست آید، سپس با ضریب $\frac{۱}{۳}$ در راستای قائم (عمودی) منقبض می‌کنیم تا نمودار $y=-\frac{۱}{۳}f(x)$ به‌دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



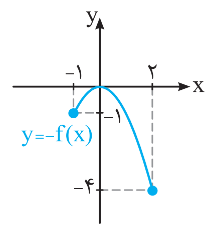
۱۶ ابتدا نمودار $y=x^{۲}$ را در بازهٔ $[-۱،۲]$ رسم می‌کنیم:



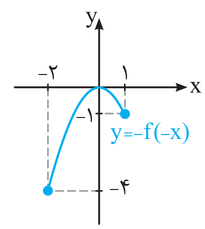
آ) برای رسم نمودار $y=f(-x)$، نمودار f را نسبت به محور y‌ها قرینه می‌کنیم:



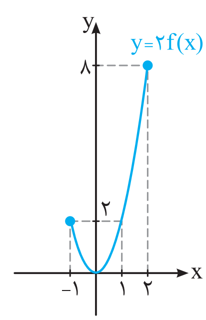
ب) برای رسم نمودار $y=-f(x)$، نمودار f را نسبت به محور x‌ها قرینه می‌کنیم:



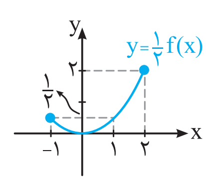
پ) برای رسم نمودار $y=-f(-x)$، نمودار f را نسبت به محور x‌ها و y‌ها قرینه می‌کنیم:



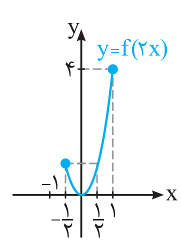
ت) برای رسم نمودار $y=۲f(x)$، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



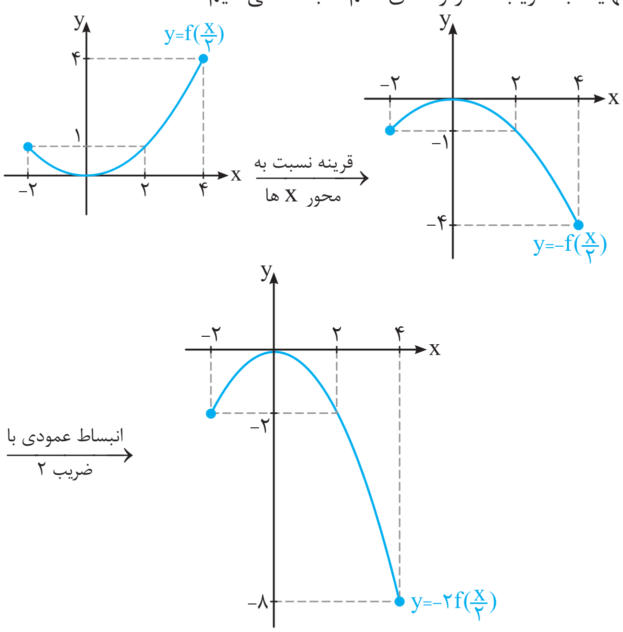
ث) برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$، نمودار f را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



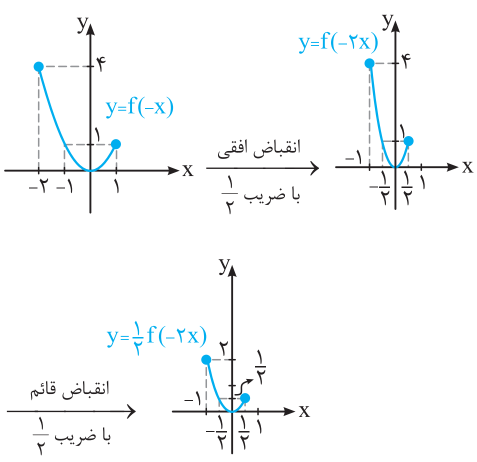
ج) برای رسم نمودار $y=f(۲x)$، نمودار f را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم:



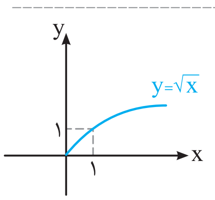
چ) برای رسم نمودار $y=-۲f(\frac{x}{۲})$، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط می‌کنیم، سپس نمودار را نسبت به محور x‌ها قرینه و در نهایت با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



ح) برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)$، نمودار f را نسبت به محور y‌ها قرینه می‌کنیم و با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم و در نهایت با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



۱۷ نمودار $y=\sqrt{x}$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار $y=\sqrt{x}$، داریم:

آ) نمودار $y=\sqrt{x}$، ۱ واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال یافته است: $y=\sqrt{x+۱}-۱$

ب) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور xها قرینه شده و سپس دو واحد به بالا انتقال یافته است: $y=-\sqrt{x}+۲$

پ) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور yها قرینه شده و سپس یک واحد به پایین انتقال یافته است: $y=\sqrt{-x}-۱$

ت) نمودار $y=\sqrt{x}$، در راستای قائم با ضریب ۲ منبسط شده است: $y=۲\sqrt{x}$

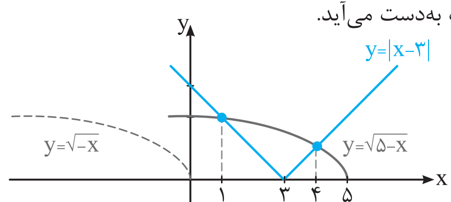
ث) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور xها و yها قرینه شده و سپس ۱ واحد به چپ انتقال یافته است:

$$y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{\text{۱ واحد به چپ}}y=-\sqrt{-(x+۱)}\Rightarrow y=-\sqrt{-x-۱}$$

ج) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور yها قرینه شده و با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط شده است:

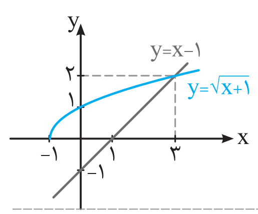
$$y=\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{ضریب ۲}]{\text{انبساط افقی با}}y=\sqrt{-\frac{۱}{۲}x}$$

۱۸ هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
نمودار $y=\sqrt{۵-x}=\sqrt{-(x-۵)}$ از انتقال $y=\sqrt{-x}$ به اندازهٔ ۵ واحد به راست به‌دست می‌آید و نمودار $y=|x-۳|$ از انتقال $y=|x|$ به اندازهٔ ۳ واحد به راست به‌دست می‌آید.



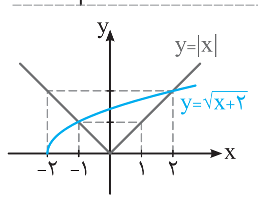
بنابراین این دو نمودار در نقاط به طول $x_1=۱$ و $x_2=۴$ یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا معادله دارای دو ریشهٔ $x=۱$ و $x=۴$ می‌باشد.

۱۹ $y=\sqrt{x+۱}$ از انتقال $y=\sqrt{x}$ به اندازهٔ ۱ واحد به چپ به‌دست می‌آید:



$\Rightarrow$ جواب معادله: $x=۳$

۲۰ **روش هندسی:** نمودار $y=\sqrt{۲+x}$ و $y=|x|$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ طول نقاط تقاطع = ریشه‌های معادله $=\{-۱,۲\}$

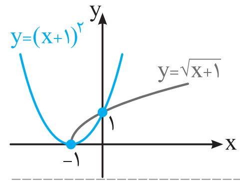
روش جبری:

$$\sqrt{۲+x}=|x|\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۲+x=x^۲\Rightarrow x^۲-x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=۲\end{cases}$$

۲۱ $\sqrt{x+۱}=x^۲+۲x+۱\Rightarrow\sqrt{x+۱}=(x+۱)^۲$

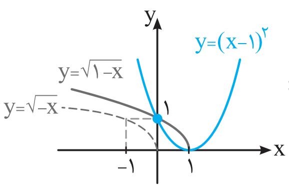
برای رسم $y=(x+۱)^۲$ نمودار $y=x^۲$ را ۱ واحد به چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم $y=\sqrt{x+۱}$ نمودار $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم:



$\Rightarrow$ ریشه‌های معادله: $x=۰$ ، $x=-۱$

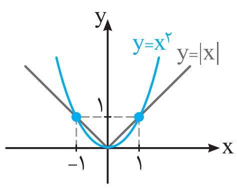
۲۲ $\sqrt{۱-x}-۱=x^۲-۲x$

$$\Rightarrow\sqrt{-x+۱}=x^۲-۲x+۱\Rightarrow\sqrt{-(x-۱)}=(x-۱)^۲$$



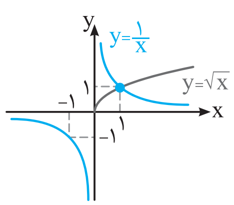
دارای جواب‌های $x=۰$ ، $x=۱$ است. $\Rightarrow$

۲۳ باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y=x^۲$ پایین یا روی $y=|x|$ قرار دارند:



$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{-۱\le x\le ۱\}$

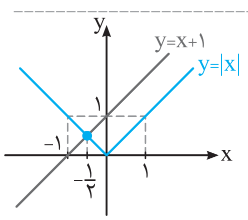
۲۴ باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y=\frac{۱}{x}$ بالای $y=\sqrt{x}$ قرار نداشته باشد، یعنی $y=\frac{۱}{x}$ پایین یا مساوی $y=\sqrt{x}$ باشد:



$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{x\ge ۱\}$

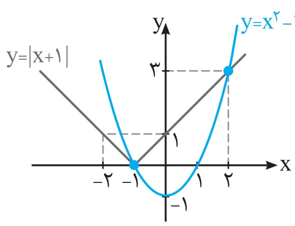
توجه کنید که برای $x<۰$، $y=\sqrt{x}$ وجود ندارد، پس مجموعه جواب را فقط برای $x\ge ۰$، یعنی دامنهٔ مشترک دو تابع می‌یابیم.

۲۵ باید مجموعه نقاطی را که نمودار $y=x+۱$ پایین نمودار $y=|x|$ قرار دارد، بیابیم:



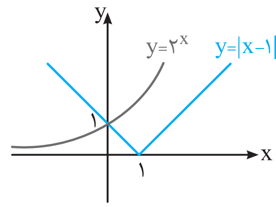
$\Rightarrow$ جواب نامعادله $=\{x<-\frac{۱}{۲}\}$

۲۶ باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y=|x+۱|$ پایین نمودار $y=x^۲-۱$ قرار دارد.



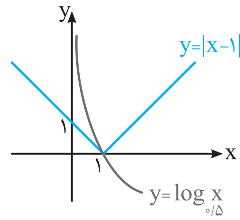
$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{x<-۱$ یا $x>۲\}=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

۲۷ باید طول نقاطی را که نمودار $y=|x-۱|$ پایین‌تر یا مساوی نمودار $y=۲^x$ می‌باشد، بیابیم:



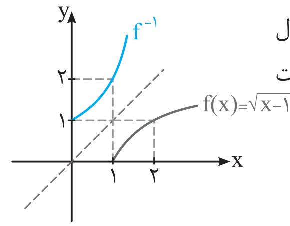
$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{x\geq ۰\}$

۲۸ طول نقاطی را که نمودار $y=|x-۱|$ پایین‌تر یا مساوی نمودار $y=\log_{۰/۵} x$ می‌باشد، می‌یابیم:



$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{۰<x\leq ۱\}=(۰,۱]$

۲۹ نمودار $y=\sqrt{x-۱}$ را با انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ به اندازهٔ ۱ واحد به راست رسم می‌کنیم:



هر خط موازی محور xها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است و ضابطهٔ وارون آن عبارت است از:

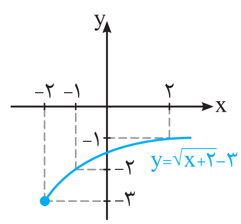
$$y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow y^۲=x-۱\Rightarrow x=y^۲+۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲+۱\ (x\geq ۰)$$

توجه کنید که دامنهٔ $f^{-۱}$ با برد f برابر است.

۳۰ نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

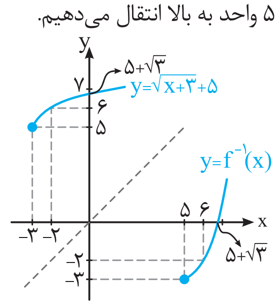
$\Rightarrow$ یک‌به‌یک $\Rightarrow$ وارون‌پذیر



$$y=\sqrt{x+۲}-۳\Rightarrow \sqrt{x+۲}=y+۳\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+۲=(y+۳)^۲$$

$$\Rightarrow x=(y+۳)^۲-۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۳)^۲-۲\ ;\ (x\geq -۳)$$

۳۱ نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۳ واحد به چپ و ۵ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

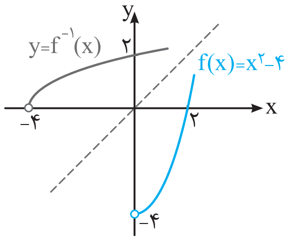


$\Rightarrow$ یک‌به‌یک $\Rightarrow$ وارون‌پذیر

$$y=\sqrt{x+۳}+۵\Rightarrow \sqrt{x+۳}=y-۵\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+۳=(y-۵)^۲$$

$$\Rightarrow x=(y-۵)^۲-۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۵)^۲-۳\ ;\ (x\geq ۵)$$

۳۲ نمودار $y=x^۲$ را ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم، با شرط $x>۰$ داریم:

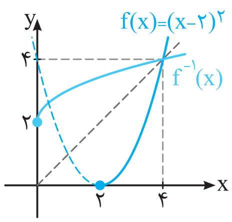


$\Rightarrow$ یک‌به‌یک $\Rightarrow$ وارون‌پذیر

$$y=x^۲-۴\Rightarrow x^۲=y+۴\xrightarrow{x>۰} x=\sqrt{y+۴}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}\ ;\ (x\geq -۴)$$

۳۳ نمودار $y=x^۲$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم و با شرط $x\geq ۲$ داریم:

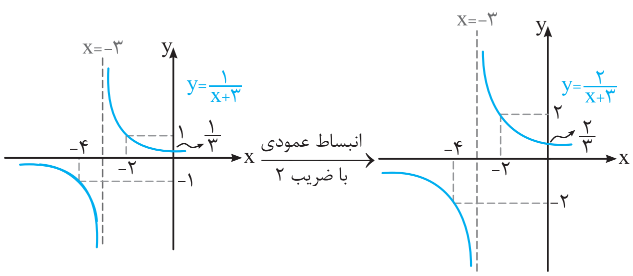


$\Rightarrow$ یک‌به‌یک $\Rightarrow$ وارون‌پذیر

$$y=(x-۲)^۲\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{y}\xrightarrow{x\geq ۲} x-۲=\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x=۲+\sqrt{y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x}\ ;\ (x\geq ۰)$$

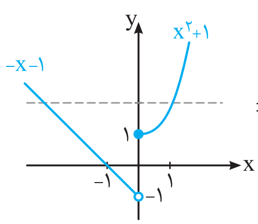
۳۴ برای رسم $g(x)=۲(\frac{۱}{x+۳})$، کافی است نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را ۳ واحد به چپ انتقال دهیم، سپس با ضریب ۲ انبساط عمودی دهیم:



بنابراین یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

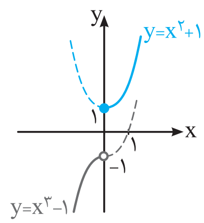
۳۵ هر کدام از ضابطه‌ها را روی دامنهٔ مربوط به خودش رسم می‌کنیم.

برای رسم $y=x^۲+۱$ نمودار $y=x^۲$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



$\Rightarrow$ f یک‌به‌یک نیست. $\Rightarrow$ وارون‌ناپذیر است.

۳۶ برای رسم $y=x^2+1$، نمودار $y=x^2$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم و برای رسم $y=x^3-1$ نمودار $y=x^3$ را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



$\Rightarrow$ f یک‌به‌یک است. $\Rightarrow$ f وارون‌پذیر می‌باشد.

$$y=x^2+1\Rightarrow x^2=y-1\xrightarrow{x\ge 0}x=\sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}\ (x\ge 1)$$
$$y=x^3-1\Rightarrow x^3=y+1\Rightarrow x=\sqrt[3]{y+1}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1},(x<-1)\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\ge 1\\ \sqrt[3]{x+1} & x<-1\end{cases}$$

۳۷ اگر نمودار f را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افقی منقبض کنیم و در نهایت نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودار g به‌دست می‌آید:

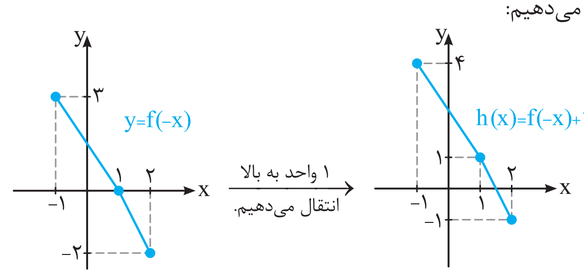
$$y=f(x)\xrightarrow[\text{ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض افقی با}}h(x)=f(2x)$$
$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}g(x)=-f(2x)$$
$$f(-3)=1\xrightarrow{\text{انقباض افقی}}h(-\frac{3}{2})=1\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}g(-\frac{3}{2})=-1$$

بنابراین این نقطه به نقطهٔ $(-\frac{3}{2},-1)$ متناظر می‌گردد.

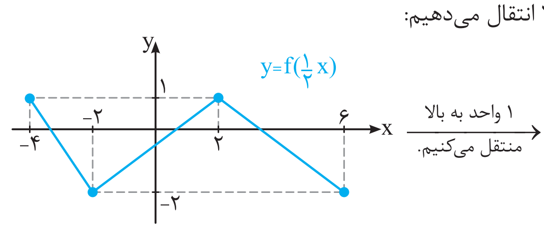
۳۸ آ) $D_f=[-2,1]$

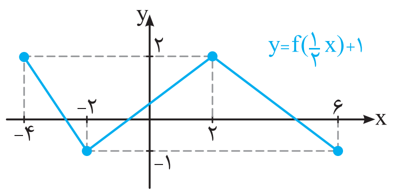
$$-2\le\frac{x}{2}\le 1\xrightarrow{\times 2}-4\le x\le 2\Rightarrow D_g=[-4,-2]$$

ب) نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



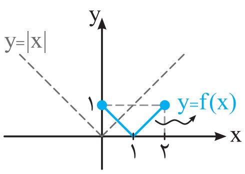
۳۹ نمودار f را در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



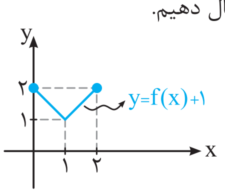


$$\Rightarrow\begin{cases}\text{دامنه}=[-4,6]\\ \text{برد}=[-1,2]\end{cases}$$

۴۰

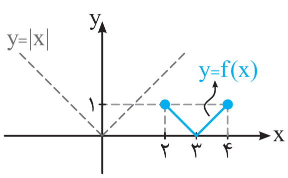


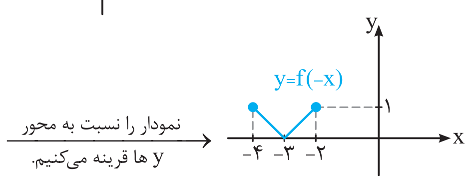
حال کافی است نمودار f را یک واحد به بالا انتقال دهیم.



$\Rightarrow$ برد $=[1,2]$

۴۱





۴۲ کافی است نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا نمودار $y=-\sqrt{x}$ به‌دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم: