فصل ۱ : بخش پذیری و هم نهشتی

درس ۲ : بخش پذیری در اعداد صحیح

عدد صحیح ناصفر a و عدد صحیح b را درنظر بگیرید، اگر b بر a بخش پذیر باشد گوییم a، عدد b را می شمارد (a عاد می کند عدد b را) و با نماد $a|b$ نمایش می دهیم.

توجه: b بر a بخش پذیر است یعنی وجود دارد عدد صحیح q به طوری که $b=aq$.

بنابراین: $b=aq \Longleftrightarrow a|b$

مثال: کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

الف) $-2|14$ ص

ب) $-2|-12$ ص

پ) $2|-24$ ص

ت) $2|5$ غ

ث) $5|5$ ص ← به طور قراردادی می پذیریم

مثال: جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7|63 \Longleftrightarrow 63 = 7 \times 9$

ب) $91 = 7 \times 13 \Longleftrightarrow 7|91$ و $13|91$

پ) $-6|54 \Longleftrightarrow 54 = -9 \times (-6)$

ت) $5 = 18 \times 5 \Longleftrightarrow 18|5$

* ث) $a|1 \Longrightarrow a=1$ یا $a=-1$

مثال: n را چنان بیابید که $(n-5)|2$.

$n-5=2 \Rightarrow n=7$ یا $n-5=1 \Rightarrow n=6$

$n-5=-2 \Rightarrow n=3$ یا $n-5=-1 \Rightarrow n=4$

مثال: ثابت کنید: $\forall m,n \in \mathbb{N}\ ,\ m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$

میدانیم: $a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{q=a^{n-m}} a^m | a^n$

مثال: اگر $ab=cd$ (a و b و c و d اعداد صحیح ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$a|cd$, $b|cd$, $c|ab$, $d|ab$, $ab|cd$

خواص رابطهٔ عاد کردن:

1. اگر عدد a، عدد b را بشمارد آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد.

به عبارت دیگر: $a|b \Rightarrow a|mb$

توجه: اگر $a|b$، آنگاه می‌توان گفت:

الف) $a|b^2$ (زیرا $a|mb$ و کافیست $m=b$ فرض شود)

ب) $a|b^3$ (" " " " " $m=b^2$ " ")

پ) $a|b^7$ (" " " " " $m=b^6$ " ")

مثال: درصورتی که $a|b$ و $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید $a|b^n$.

طبق خاصیت ۱ داریم $a|mb$، کافیست به جای m عدد b^{n-1} را جایگزین کنیم:

$$a|b^{n-1}\times b \Rightarrow a|b^n$$

سؤال: آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka|kb$؟ عکس آن چطور؟ $(k\neq 0)$

صحیح است زیرا: $a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$

عکس این موضوع نیز صحیح است یعنی از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$.

زیرا: $ka|kb \Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\div k} b=aq \Rightarrow a|b$

نتیجه: اگر $a|b$، آنگاه می‌توان دو طرف در هر عدد صحیح ناصفر ضرب یا بر آن تقسیم کرد.

سؤال: آیا از این که $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند. خیر به عنوان نمونه:

$$6|3\times 8 \not\Rightarrow 6|3 \text{ یا } 6|8$$

خلاصه: اگر m عدد طبیعی بیشتر از ۱ باشد و $a|b$، آنگاه کدام گزاره صحیح است؟

الف) $a|mb$ ص

ب) $ma|b$ غ

پ) $ma|mb$ ص

2. خاصیت تعدی : $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

اثبات :

$a|b \Rightarrow b = aq_1$ ①

$b|c \Rightarrow c = bq_2 \overset{①}{\Longrightarrow} c = b(aq_1) = a\underbrace{(bq_1)}_{q} \Rightarrow a|c$

مثال : با استفاده از خاصیت تعدی ، برای هر عدد طبیعی n ، نشان دهید :

$a|b \Longrightarrow a|b^n$

$a|b \wedge b|b^n \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$

3. هرگاه عددی ، دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

به عبارت دیگر : $a|b \wedge a|c \Longrightarrow a|b \pm c$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ a|c \Rightarrow c = aq_2 \end{array}\right\} \longrightarrow b \pm c = a\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q} \Rightarrow a|b \pm c$$

تست : اگر $a|16$ و $a|12$ ، کدام گزاره صحیح نیست ؟

$a|4$ $\quad a|28$ $\quad a|32$ $\quad a|14$

$16 + 12 = 28 \Rightarrow a|28$ $\qquad 16 - 12 = 4 \Rightarrow a|4$

$16 \times 2 = 32 \Rightarrow a|32$

بنابراین گزینه ۴ یعنی $a|14$ صحیح نیست

مثال: اگر $7|2a+b$ نشان دهید $7|3a+4b$.

$$\left.\begin{array}{l} 7|7(a+b) \Rightarrow 7|7a+7b \\ 7|2a+b \Rightarrow 7|2(2a+b) \Rightarrow 7|4a+2b \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 7|3a+4b$$

سؤال: آیا از اینکه $a|b\pm c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$ ؟

خیر به طور مثال $2|5\pm3$ ولی $2\nmid5$ و $2\nmid3$.

۴. اگر $a|b$ و $b\neq0$ آنگاه $|a|\leq|b|$.

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{b\neq0} q\neq0 \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} 1\leq|q|$$

$$\xrightarrow{\times|a|} |a|\leq|aq| \Rightarrow |a|\leq|b|$$

نتیجه مهم: اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a=\pm b$.

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow |a|\leq|b| \\ b|a \Rightarrow |b|\leq|a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

تست: به ازای چند مقدار صحیح m، داریم $2m|m^2+1$ و $m^2+1|2m$ ؟

هیچ مقدار — ۱ مقدار — ۲ مقدار — بیش از ۲ مقدار

$$m^2+1=\pm2m \Rightarrow m^2\mp2m+1=0 \Rightarrow (m\mp1)^2=0 \Rightarrow m\mp1=0$$

$$\Rightarrow m=\pm1 \longrightarrow$$ به ازای ۲ مقدار برای m

نکته: اگر $|b|<|a|$ و $a|b$ آنگاه $b=0$ است.

تست: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $a\leq b$ و $b|b-a$، آنگاه:

$a=1$ $\quad a=b$ $\quad b=1$ $\quad b=2$

طبق نکته فوق، چون b عدد کوچکتر خود یعنی $b-a$ را عاد کرده است، پس $b-a=0$ و در نتیجه $b=a$ است.

نکته: اگر $ab|c$ آنگاه $a|c$ و $b|c$.

به طور مثال اگر عددی بر ۶ بخش‌پذیر باشد آنگاه آن عدد بر ۲ و ۳ نیز بخش‌پذیر است.

تست: هرگاه $n\in\mathbb{Z}$ و $3n|n(n-1)$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

$3|n-1$ $\quad 3n|n^3-n^2$ $\quad n|n^2-n$ $\quad 3|n^2-n$

$$3n|n(n-1) \xrightarrow{\text{نکته فوق}} 3|n(n-1) \Rightarrow 3|n^2-n$$
$$3n|n(n-1) \xrightarrow{\text{〃}} n|n(n-1) \Rightarrow n|n^2-n$$
$$3n|n(n-1) \xrightarrow{\text{طرفین را در } n \text{ ضرب شود}} 3n|n^2(n-1) \Rightarrow 3n|n^3-n^2$$

لذا گزینه ۴ یعنی $3|n-1$ نادرست است زیرا به ازای $n=0$ داریم:

$3|-1$ که نادرست است.

حل چند نمونه سؤال مهم:

۱- m را چنان بیابید که برای هر عدد صحیح n داشته باشیم $n|m^2+m-2$.

می‌دانیم به ازای هر عدد صحیح n داریم $n|0$. پس:

$m^2+m-2=0 \Rightarrow m=1$ و $m=-2$

۲- اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $7m+6$ و $6m+5$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm 1$.

$$a|7m+6 \xrightarrow{\text{طرفین را } \times 6} a|42m+36$$
$$a|6m+5 \xrightarrow{\text{طرفین را } \times 7} a|42m+35$$
$$\xrightarrow{-} a|1 \Rightarrow |a|\leq 1$$
$$\Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۳ـ a چند مقدار طبیعی مختلف می‌تواند باشد تا به ازای حداقل یک عدد صحیح n داشته باشیم $a|2n+1$ و $a|5n-2$ ؟

$$\left.\begin{array}{l} a|2n+1 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 5} a|10n+5 \\ a|5n-2 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 2} a|10n-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} a|9 \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 9$$

سه مقدار طبیعی برای a وجود دارد

۴ـ اگر $a|b$ ثابت کنید:

الف) $a|-b$

$$a|b \xrightarrow{\text{طرف راست } \times(-1)} a|-b$$

ب) $-a|b$

میدانیم: $-a|a \ \wedge \ a|b \xrightarrow{\text{تعدی}} -a|b$

پ) $-a|-b$

$$a|b \xrightarrow{\times(-1)} -a|-b$$

۵ـ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a+c|b+d$؟

خیر به طور مثال $2|8$ و $3|6$ ولی $2+3 \nmid 6+8$ یعنی $5 \nmid 14$

۶ـ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ c|d \Rightarrow d=cq_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} bd = ac\underbrace{(q_1q_2)}_{q} \Rightarrow ac|bd$$

۷ـ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$. (توجه: عکس این موضوع نیز صحیح است، یعنی می‌توان از دو طرف ریشه‌ی nام گرفت)

$$a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n=(aq)^n \Rightarrow b^n=a^n\underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow a^n|b^n$$

۸- اگر k ای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم، $5 \mid 4k+1$ ثابت کنید:

$$25 \mid 16k^2+28k+6$$

$$5 \mid 4k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25 \mid 16k^2+8k+1$$

$$\xrightarrow{\times 5} 25 \mid 20k+5$$

$$\xrightarrow{+} 25 \mid 16k^2+28k+6$$

۹- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) $a \mid b-c \iff a \mid c-b$ درست، (کافی است طرف راست در (-1) ضرب شود)

ب) $a \mid b-c \iff a \mid b+c$ نادرست، به طور مثال

$3 \mid 10-1$ ولی $3 \nmid 10+1$

پ) $a \mid b \iff a \mid |b|$ درست، زیرا اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid -b$

یعنی $a \mid \pm b$ و $a \mid |b|$.

ت) اگر p عددی اول باشد و a عدد طبیعی به طوری که $a \mid p$، آنگاه $a=1$ یا $a=p$.

درست، زیرا در اعداد طبیعی هر عدد اول فقط بر خودش و 1 بخش پذیر است.

توجه داشته باشیم که اگر $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه از $a \mid p$ می توان نتیجه گرفت:

$a=1$ یا $a=-1$ یا $a=p$ یا $a=-p$

۱۰- اگر $a>1$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

$$a \mid 5k+3 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 9} a \mid 45k+27$$

$$a \mid 9k+4 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 5} a \mid 45k+20$$

$$\xrightarrow{-} a \mid 7 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=7$$

اما با توجه به $a>1$، باید $a=7$ باشد پس a عددی اول است.

۱۱- اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$ است.

$$a \mid 9k+7 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 7} a \mid 63k+49$$

$$a \mid 7k+6 \xrightarrow{\text{طرف راست } \times 9} a \mid 63k+54$$

$$\xrightarrow{-} a \mid 5 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=5$$

۱۲- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ نشان دهید $a \mid mb \pm nc$.

$$a \mid b \xrightarrow{\text{طرف راست } \times m} a \mid mb$$

$$a \mid c \xrightarrow{\text{طرف راست } \times n} a \mid nc$$

$$\xrightarrow{\pm} a \mid mb \pm nc$$

۱۳- اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید: $m\leq n\ ,\ a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$$a|b \xrightarrow{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\times b^{n-m}\ \text{طرف راست}} a^m|b^m\times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$$

۱۴- اگر $a^3|b^8$ نشان دهید:

الف) $a^6|b^{25}$

$$a^3|b^8 \xrightarrow{\text{سوال ۱۳}} (a^3)^2|(b^8)^3 \Rightarrow a^6|b^{24} \xrightarrow{\times b\ \text{طرف راست}} a^6|b^{25}$$

ب) $a^2|b^7$

$$\left.\begin{array}{l} a^2|a^3\ ,\ a^3|b^8 \Rightarrow a^2|b^8 \Rightarrow a|b^4 \\ a^3|b^8 \xrightarrow{\times b\ \text{طرف راست}} a^3|b^9 \Rightarrow a|b^3 \end{array}\right\} \rightarrow a^2|b^7$$

۱۵- m را چنان بیابید که به ازای هر عدد صحیح $n\neq 0$ داشته باشیم $m^2-3m+1|n$.

$$m^2-3m+1=\pm 1 \begin{cases} m^2-3m=0 \Rightarrow m=0 \ \vee\ m=3 \\ m^2-3m+2=0 \Rightarrow m=1 \ \vee\ m=2 \end{cases}$$

۱۶- اگر a، b و c اعداد صحیح باشند به طوری که $0\leq b\leq a<b+c$ و $c|a-b$ چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

$$c|a-b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \quad \text{و} \quad 0\leq a-b<c \xrightarrow{-b} \text{نامساوی مفروض}$$

۱۷- ثابت کنید:

الف) $a|b \Rightarrow a|b+ma$ (هر مضربی از a را می‌توان به طرف راست افزود)

$$\left.\begin{array}{l} a|b \\ a|ma \end{array}\right\} \xrightarrow{+} a|b+ma$$

ب) $11|3a-4b \Rightarrow 11|3a+7b$

$$11|3a-4b \xrightarrow{\text{راست}+11b} 11|3a+7b$$

ج) $7|a-4b \Rightarrow 7|6a-10b$

$$7|a-4b \xrightarrow{\text{راست}-7(a-2b)} 7|-6a+10b \xrightarrow{\text{راست}\times(-1)} 7|6a-10b$$

۱۸ـ اگر x ، y و z سه عدد طبیعی باشند به طوری که $xyz \mid xy+xz$.

نشان دهید $z=y$.

$$\xrightarrow{\div x} yz \mid y+z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \mid y+z \xrightarrow{\text{راست } -y} y \mid z \\ z \mid y+z \xrightarrow{\text{راست } -z} z \mid y \end{cases} \Rightarrow |y| = |z| \Rightarrow y = z$$

۱۹ـ ثابت کنید

الف) $a \mid a+b \Rightarrow a \mid b$

روش اول: $a \mid a+b \xrightarrow{\text{راست } -a} a \mid a+b-a \Rightarrow a \mid b$

روش دوم: $\left.\begin{matrix} a \mid a+b \\ a \mid a \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} a \mid b$

ب) $a+b \mid a \Rightarrow a+b \mid b$

$$\left.\begin{matrix} a+b \mid a \\ a+b \mid a+b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} a+b \mid b$$

پ) $a-b \mid b \Rightarrow a-b \mid a+b$

روش اول:

$$\left.\begin{matrix} a-b \mid b \quad ① \\ a-b \mid a-b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} a-b \mid a \quad ② \xrightarrow{①+②} a-b \mid a+b$$

روش دوم: $a-b \mid b \xrightarrow{\text{راست } \times 2} a-b \mid 2b \xrightarrow{\text{راست } +(a-b)} a-b \mid a+b$

۲۰ـ نشان دهید نتیجه‌گیری زیر صحیح نیست:

$$a+b \mid a-b \Rightarrow a+b \mid a$$

$a=1 , b=-3$: $-2 \mid 4 \not\Rightarrow -2 \mid 1$ مثال نقض

خلاصه‌ای از قواعد گفته شده :

تعریف : $a|b \Leftrightarrow b=aq$ و $0|0$

قواعد مختص به ر ا ست : $a|b \Rightarrow a|mb$ و $a|b+ma$ و $a|b^n \ (n>0)$

قواعد دو طرف : $a|b \xLeftrightarrow{m\neq 0} am|bm$ و $a|b \xLeftrightarrow{n>0} a^n|b^n$

خاصیت تعدی : $a|b \ , \ b|c \Rightarrow a|c$

خواص متفرقه :

1. $a|b \xrightarrow{b\neq 0} |a| \leq |b|$
2. $|a|>|b| \ , \ a|b \Rightarrow b=0$
3. $ab|c \Rightarrow a|c \wedge b|c$
4. $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$
5. $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) :

دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید. مقسوم علیه های این دو عدد عبارتند از :

۱۲ : ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶ و ۱۲

۱۸ : ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۸

مقسوم علیه های مشترک این دو عدد ۶ و ۳ و ۲ و ۱ می باشد بزرگترین آنها ۶ است، بنابراین گوییم ب.م.م دو عدد ۱۲ و ۱۸، برابر ۶ است و با نماد ریاضی به صورت $(۱۲,۱۸)=۶$ می نویسیم.

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی از آنها صفر نیست) گوییم، هرگاه d مقسوم علیه مشترک a و b باشد، a و b مقسوم علیه مشترک بزرگتر از d نداشته باشد. به عبارت دیگر $(a,b)=d$، اگر و تنها اگر :

الف) $d|a$ و $d|b$

ب) $\forall m>0 ; m|a \ , \ m|b \Rightarrow m\leq d$

مثال: حاصل هر یک را بنویسید.

الف) $(6,21)=3$ ب) $(0,5)=5$ پ) $(1,12)=1$

ت) $(3,4)=1$ ث) $(6,-4)=2$ ج) $(-8,-6)=2$

توجه: دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a,b)=1$.

تست: اگر $x|18$ و $x|12$ و برای هر $y\in Z$ که $y|18$ و $y|12$ داشته باشیم $y\leq x$ آنگاه: $x=18$ $x=12$ $x=6$ $x=3$

جواب: طبق تعریف x همان ب.م.م ۱۲ و ۱۸ است. یعنی $x=(12,18)=6$

تست: اگر $0\neq a\in\mathbb{Z}$، کدام گزینه صحیح نیست؟

$(a,-1)=1$ $(a,-a)=|a|$ $(a,2|a|)=|a|$ $(a,0)=0$

گزینه صحیح نیست زیرا طبق تعریف ب.م.م همواره مثبت است. در ضمن $(a,0)=|a|$.

نکته ۱: $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

اثبات:

شرط اول: $|a|\,|a \xrightarrow{a|b} |a|\,|b$

شرط دوم: $\forall m>0;\ m|a,\ m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m|\leq|a| \Rightarrow m\leq|a|$

با توجه به برقرار هر دو شرط، اثبات تمام است

مثال: حاصل $(10!,12!)$ چیست؟

$10!\,|\,12! \Rightarrow (10!,12!)=10!$

مثال: اگر $a^3|b^4$ مقدار (a,b^2) را بیابید.

$a^3|b^4 \xrightarrow{\text{طرفین } \times b^2} a^3|b^6 \xrightarrow{\text{رشیه سوم}} a|b^2 \xrightarrow{\text{نکته}} (a,b^2)=|a|$

نکته ۲ : $(a,b)=(a,b+ma)=(a+mb,b)$

(هر مضربی از a را می‌توان به b اضافه یا کم کرد، همچنین هر مضربی از b را می‌توان به a اضافه یا کم کرد.)

مثال : حاصل $(60,602)$ را بنویسید.

$$(60,602)=(60,3)=3$$
$$-10\times 60$$

مثال : اگر $(a,b)=d$ مقدار $(a,b+ab+3a^2)$ را بیابید.

$$(a,b+ab+3a^2)=(a,b)=d$$
$$-a(b+3a)$$

نکته ۳ : $(ka,kb)=|k|(a,b)$ و $(a^n,b^n)=(a,b)^n$

مثال : درصورتی که $(3a,3b)+(-2a,-2b)=20$ مقدار (a^3,b^3) را بیابید.

فرض : $3(a,b)+2(a,b)=20 \Rightarrow 5(a,b)=20 \Rightarrow (a,b)=4$

$$(a^3,b^3)=(a,b)^3=4^3=64$$

حل چند نمونه سؤال مهم :

۱ـ اگر p عدد اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$ ثابت کنید $(p,a)=1$.

$$(p,a)=d \Rightarrow \begin{cases} d\mid a \quad (1) \\ d\mid p \Rightarrow d=p \ \vee\ d=1 \end{cases}$$

اگر $d=p$ باشد پس طبق (1) داریم $p\mid a$ که با فرض تناقض دارد.

پس $d=1$ است یعنی $(p,a)=1$.

۲ـ با فرض $(a,b)+(-a,-b)+(6a+2b,2a)-(a^2,b^2)=4$ مقدار $(3a,3b-6a)$ را تعیین کنید.

$$-3(2a)$$

فرض : $(a,b)+(a,b)+\underbrace{(2b,2a)}_{2(a,b)}-(a,b)^2=4$

$$(a,b)=d \longrightarrow 4d-d^2=4 \Rightarrow d^2-4d+4=0 \Rightarrow d=2$$

$$(3a,3b-6a)=(3a,3b)=3(a,b)=3d=6$$
$$+3(3a)$$

۳ـ با فرض $n\in\mathbb{N}$، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $2n+3$ و $5n+6$ را تعیین کنید.

$$-2n$$

$$(2n+3,5n+6)=(2n+3,n)=(3,n)=1 \text{ یا } 3$$
$$-2(2n+3)$$

۴ـ اگر p یک عدد اول باشد و $(a,p^3)=p$ و $(b,p^4)=p^2$ ، حاصل (ab^2,p^5) را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l}(a,p^3)=p \Rightarrow p\mid a \\ (b,p^4)=p^2 \Rightarrow p^2\mid b \xrightarrow{\text{توان ۲}} p^4\mid b^2\end{array}\right\} \xrightarrow{\times} p^5 \mid ab^2$$

$$\Longrightarrow (ab^2,p^5)=p^5$$

۵ـ به ازای چه مقدار از a داریم $(a,15)=\frac{4}{a}$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{a}\in \mathbb{N} \Rightarrow a\mid 4 \\ \frac{4}{a}\mid 15 \xrightarrow{\times a} 4\mid 15a \Rightarrow 4\mid a\end{array}\right\} \Rightarrow |a|=4 \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=4$$

۶ـ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

برهان خلف: گیریم $d\neq 1$ و $(p,q)=d$ باشد آنگاه:

$$d\mid p \wedge d\mid q \xrightarrow{d\neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q$$ تناقض

۷ـ ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند.

روش اول: گیریم: $(n,n+1)=d \Rightarrow \begin{cases} d\mid n \\ d\mid n+1\end{cases} \longrightarrow d\mid 1 \Rightarrow d=1$

روش دوم: $(n,\underbrace{n+1}_{-n})=(n,1)=1$.

ب) هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اولند.

روش اول: گیریم: $(2n+1,2n+3)=d \Rightarrow \begin{cases} d\mid 2n+1 \\ d\mid 2n+3\end{cases} \longrightarrow d\mid 2 \xrightarrow{d \text{ زوج نیست}} d=1$

روش دوم:

$$(2n+1,\underbrace{2n+3}_{-(2n+1)})=(\overset{\text{فرد}}{2n+1},2)=1$$

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) :

دو عدد ۴ و ۶ را در نظر بگیرید، مضارب مثبت این دو عدد عبارتند از :

۴ : ۴ , ۸ , ۱۲ , ۱۶ , ۲۰ , ۲۴ , ۲۸ , ۳۲ , ۳۶ , ۴۰ , ...

۶ : ۶ , ۱۲ , ۱۸ , ۲۴ , ۳۰ , ۳۶ , ۴۲ , ۴۸ , ...

مضارب مشترک این دو عدد ... , ۲۴ , ۳۶ , ۱۲ می‌باشند که کوچکترین آنها ۱۲ است.

بنابراین ک.م.م دو عدد ۴ و ۶ ، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم : $[4,6]=12$

تعریف : عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح ناصفر a و b گوییم، هرگاه c مضرب مشترک a و b بوده و a و b مضرب مشترک کوچکتر از c نداشته باشند به عبارت دیگر $[a,b]=c$ اگر و تنها اگر :

الف) $a|c \ , \ b|c$

ب) $\forall m>0 ; \ a|m \wedge b|m \Rightarrow c\leq m$

مثال : حاصل هر یک را بنویسید.

شهادت حضرت امام موسی کاظم (ع) (۱۸۳ هـ.ق)

الف) $[6,10]=30$ ب) $[1,8]=8$

پ) $[-4,16]=16$ ت) $[-2,-3]=6$

توجه : $[-a,-b]=[-a,b]=[a,-b]=[a,b]$

توجه : برای تعیین ک.م.م دو عدد، ابتدا آنها را به عوامل اول تجزیه کرده، سپس از ضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان، ک.م.م را حساب کرد.

تست : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۳۶ , ۵۴ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۵۴ ۷۲ ۱۰۸ ۱۴۴

$36=2^2\times 3^2 \ , \ 54=2^1\times 3^3 \Rightarrow [36,54]=2^2\times 3^3=4\times 27=108$

نکته : $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

اثبات :

شرط اول : $b\,|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,|\,|b|$

شرط دوم : $\forall m>0 ; \ a|m \wedge b|m \Rightarrow |b|\leq|m| \Rightarrow |b|\leq m$

با توجه به برقراری هر دو شرط، اثبات تمام است.

تست : اگر $(a,b)=d$ آنگاه $[a,d]$ برابر است؟

$|ab|$ $|a|d$ $|a|$ d

$(a,b)=d \Rightarrow d|a \xrightarrow{\text{نکته ۱}} [a,d]=|a|$

مثال: اگر $a^2 | b^3$ ، مقدار $[a, b^2]$ را بیابید.

$$a^2 | b^3 \xrightarrow{\text{توان } 2 \times b} a^2 | b^4 \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} a | b^2 \Rightarrow [a, b^2] = |b^2| = b^2$$

نکته ۲: $[ka, kb] = |k| \times [a, b]$

تست: کوچکترین مضرب مشترک بین دو عدد صحیح $2a$ و $5a$ کدام است؟

$5|a|$ $\quad$ $|a|$ $\quad$ $2|a|$ $\quad$ $10|a|$

$$[2a, 5a] = |a| [2, 5] = |a| \times 10 = 10|a|$$

نکته ۳: $[a^n, b^n] = [a, b]^n$

مثال: در صورتی که $[2a, 2b] + [-a, -b] = 84$ باشد مقدار $[a^2, b^2]$ را محاسبه نمایید.

فرض $\Rightarrow 2[a, b] + [a, b] = 84 \Rightarrow 3[a, b] = 84 \Rightarrow [a, b] = 28$

$$[a^2, b^2] = [a, b]^2 = 28^2$$

سؤال: با یک مثال نقض نشان دهید تساوی $[a, b] = [a, b + ma]$ در حالت کلی صحیح نیست.

$$\left.\begin{array}{l} [2, 5] = 10 \\ [2, 5 + 1 \times 2] = [2, 7] = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow [2, 5] \neq [2, 5 + 1 \times 2]$$

سؤال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی، 11 و کوچکترین مضرب مشترک آنها 66 است. آن دو عدد را بیابید.

$$(a, b) = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 11a' \\ b = 11b' \end{cases}$$

$$[a, b] = [11a', 11b'] = 11[a', b'] = 66 \Rightarrow [a', b'] = 6$$

$$\begin{cases} a' = 1 \Rightarrow a = 11 \\ b' = 6 \Rightarrow b = 66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = 2 \Rightarrow a = 22 \\ b' = 3 \Rightarrow b = 33 \end{cases}$$

بنابراین آن دو عدد 11 و 66 یا آن دو عدد 22 و 33 می‌باشند.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 10 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

مقسوم — مقسوم علیه — خارج قسمت — باقیمانده

قضیه تقسیم: از تقسیم عدد ۱۳ بر عدد ۵ داریم:

در دوره ابتدایی آموختیم که برای تعیین صحت تقسیم

باید تساوی $13 = (5 \times 2) + 3$ برقرار باشد.

در حالت کلی می‌توان گفت:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت (با تقسیم a بر b)

اعداد صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که:

$$0 \le r < b \ , \quad a = bq + r$$ یعنی:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline \vdots & q \\ \hline r & \end{array}$$

همانطور که در بالا اشاره شد، a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده نامند.

مثال: اگر $a = 12q - 5$ و $a, q \in \mathbb{Z}$، باقیمانده تقسیم a بر ۱۲ را حساب کنید.

$$a = 12q - 5 = 12q - 12 + 7 = 12\underbrace{(q-1)}_{q'} + 7 \Rightarrow r = 7$$

مثال: اگر $a = 15k - 5$ باشد، باقیمانده a بر ۳ را حساب کنید.

$$a = 3(5k) - 5 = 3(5k) - 6 + 1 = 3\underbrace{(5k-2)}_{q} + 1 \Rightarrow r = 1$$

تست: باقیمانده تقسیم $99^{100} - 2$ بر ۴۹ کدام است؟

صفر ۱ ۳ ۴۸

سیاهم: $99 - 1 \mid 99^{100} - 1 \Rightarrow 98 \mid 99^{100} - 1 \Rightarrow 99^{100} - 1 = 98q$

$$\xrightarrow{-1} 99^{100} - 2 = 98q - 1 = 49(2q) - 1 = 49(2q) - 49 + 48$$

$$\Rightarrow 99^{100} - 2 = 49\underbrace{(2q-1)}_{q'} + 48 \Rightarrow r = 48$$

تست: باقیمانده تقسیم -26 بر ۱۵ کدام است؟ ۱ ۲ ۳ ۴

$$-26 = -30 + 4 = 15(-2) + 4 \rightarrow r = 4$$

تست: اگر $n|a+1$ و $n|b+3$ و $n>5$ ، باقیماندهٔ تقسیم ab بر n کدام است؟

۱ ۲ ۳ ۴

$$n|a+1 \Rightarrow a+1=nq_1 \Rightarrow a=nq_1-1$$

$$n|b+3 \Rightarrow b+3=nq_2 \Rightarrow b=nq_2-3$$

$$\Rightarrow ab=(nq_1-1)(nq_2-3)=n^2q_1q_2-3nq_1-nq_2+3$$

$$\Rightarrow ab=n\underbrace{(nq_1q_2-3q_1-q_2)}_{q}+3 \Rightarrow r=3$$

تست: باقیماندهٔ تقسیم a بر ۸ برابر ۷ است. باقیماندهٔ تقسیم $2a+1$ بر ۴ کدام است؟

صفر ۱ ۲ ۳

$$a=8k+7 \Rightarrow 2a+1=16k+15$$

$$\Rightarrow 2a+1=4(4k)+12+3=4\underbrace{(4k+3)}_{q}+3 \Rightarrow r=3$$

مثال: اگر باقیماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را بدست آورید.

$$m=17q_1+5 \quad , \quad n=17q_2+3$$

$$\Rightarrow 2m-5n=2\times 17q_1+10-5\times 17q_2-15$$

$$=17(2q_1-5q_2)-5$$

$$=17(2q_1-5q_2)-17+12$$

$$=17\underbrace{(2q_1-5q_2-1)}_{q}+12 \Rightarrow r=12$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم :

اگر عدد صحیحی مثل a را بر ۳ تقسیم کنیم یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد :

۱- a بر ۳ بخش‌پذیر باشد یعنی باقیمانده صفر شود در این صورت : $a=3k$

۲- a بر ۳ بخش‌پذیر نبوده و باقیماندهٔ آن ۱ شود، یعنی : $a=3k+1$

۳- a بر ۳ بخش‌پذیر نبوده و باقیماندهٔ آن ۲ شود پس : $a=3k+2$

به عبارت دیگر طبق قضیه تقسیم $a=3k+r$ و $0\le r<3$ می‌باشد یعنی :
$r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ است.

مسئله ۱ : اگر $m\in\mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

طبق قضیه تقسیم، اگر m را بر ۲ تقسیم کنیم داریم :

$$m=2k+r \quad , \quad 0\le r<2 \Longrightarrow \begin{cases} r=0 \Rightarrow m=2k \\ r=1 \Rightarrow m=2k+1 \end{cases}$$

$\therefore$ نشان دادیم هر عدد صحیح، یا زوج است و یا فرد.

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ نوشته می‌شود.

کافیست p را بر ۶ تقسیم کنیم، طبق قضیه تقسیم با ۶ حالت روبرو می‌شویم :

$p=6k+0 \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k$ اول نیست

$p=6k+1$

$p=6k+2=2(3k+1) \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k+2$ اول نیست

$p=6k+3=3(2k+1) \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k+3$ اول نیست

$p=6k+4=2(3k+2) \longrightarrow$ غیرقابل قبول، زیرا $6k+4$ اول نیست

$p=6k+5$

بنابراین برای p فقط دو حالت توانستیم بنویسیم که قابل قبول باشد :

$$p=6k+1 \quad \text{یا} \quad p=6k+5$$

مسئله ۳ : الف) ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود.

طبق قضیه تقسیم، از تقسیم a بر ۴ یکی از ۴ حالت زیر رخ می‌دهد:

$a=4k+0 \longrightarrow$ غیرقابل قبول زیرا $4k$ فرد نیست

$a=4k+1$

$a=4k+2=2(2k+1) \longrightarrow$ غیرقابل قبول زیرا $4k+2$ فرد نیست

$a=4k+3$

بنابراین برای a فقط دو حالت توانستیم بنویسیم: $4k+1$ یا $4k+3$

ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ است.

طبق الف، برای هر عدد فرد یکی از دو حالت زیر تعریف می‌شود:

$$a=4k+1 \xrightarrow{\text{مربع}} a^2=16k^2+8k+1=8\underbrace{(2k^2+k)}_{t}+1=8t+1$$

$$a=4k+3 \xrightarrow{\text{مربع}} a^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1$$
$$=8\underbrace{(2k^2+3k+1)}_{t'}+1=8t'+1$$

توجه:

در مسئله (۱) نشان دادیم هر عدد صحیح بصورت $2k$ یا $2k+1$ است یعنی مجموعه Z را می‌توان به دو مجموعه $A_1=\{2k \mid k\in Z\}$ و $A_2=\{2k+1 \mid k\in Z\}$ افراز کرد.

حال با توجه به این که برای هر عدد صحیح a یکی از چهار حالت $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$ تعریف می‌شود، می‌توان گفت: مجموعه Z به ۴ مجموعه زیر افراز می‌شود:

$B_1=\{4k \mid k\in Z\}$ ، $B_2=\{4k+1 \mid k\in Z\}$ ، $B_3=\{4k+2 \mid k\in Z\}$

$B_4=\{4k+3 \mid k\in Z\}$

مثال: مجموعه Z را به ۳ مجموعه افراز کنید.

$A_1=\{3k \mid k\in Z\}$ ، $A_2=\{3k+1 \mid k\in Z\}$ ، $A_3=\{3k+2 \mid k\in Z\}$

حل چند نمونه سؤال :

۱- اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر اعداد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵۶ بیابید.

$$a = 7q_1 + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q_1 + 40$$

$$a = 8q_2 + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q_2 + 49$$

$$\xrightarrow{-} a = 56(q_1 - q_2) - 9$$

$$-56 + 47$$

$$\Longrightarrow a = 56(q_1 - q_2 - 1) + 47 \longrightarrow r = 47$$

۲- اگر a عدد صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) را بر ۸ بیابید.

a عدد صحیح فرد است $\Rightarrow a = 2n+1 \xrightarrow{b \mid a+2} b \mid 2n+3$

$\Longrightarrow$ b فرد است $\Rightarrow b = 2m+1$

$$a^2+b^2+3 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 + 3 = 4n^2 + 4n + 4m^2 + 4m + 5$$

$$= 4\underbrace{n(n+1)}_{2k} + 4\underbrace{m(m+1)}_{2k'} + 5$$

ضرب دو عدد متوالی عددی زوج است

$$= 8k + 8k' + 5 = 8(k+k') + 5 \Longrightarrow r = 5$$

۳- اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$

می‌دانیم : $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

برای عدد صحیح n سه حالت بررسی می‌شود :

اگر $n = 3k \Rightarrow n^3 - n = 3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

اگر $n = 3k+1 \Rightarrow n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2) = 3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q'} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

اگر $n = 3k+2 \Rightarrow n^3 - n = (3k+2)(3k+1)\overbrace{(3k+3)}^{3(k+1)} = 3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q''} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

بنابراین حکم ثابت است

۴ـ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline \vdots & q \\ r & \end{array} \Rightarrow a = bq + r \xrightarrow{a=nk,\ b=nk'}$$

$$nk = nk'q + r \Rightarrow r = n\underbrace{(k - k'q)}_{Q} \Rightarrow r \text{ بر } n \text{ بخش پذیر}$$

۱۳۹۷

۵ـ اگر a عدد صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

برای هر عدد صحیح دلخواه a سه حالت قابل بررسی است:

اگر $a = 3k \rightarrow$ a بر ۳ بخش پذیر است

اگر $a = 3k+1 \Rightarrow a+2 = 3k+3 = 3(k+1) \Rightarrow$ $a+2$ بر ۳ بخش پذیر است

اگر $a = 3k+2 \Rightarrow a+4 = 3k+6 = 3(k+2) \Rightarrow$ $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است

۶ـ ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

دو عدد صحیح و متوالی k و $k+1$ را در نظر می گیریم:

$$(k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} = 3\underbrace{k(k+1)}_{2n} + 1$$

$$= 2\underbrace{(3n)}_{m} + 1 = 2m+1 \longrightarrow \text{فرد است}$$

راه دیگر:

گیریم آن دو عدد صحیح متوالی $2k$ و $2k+1$ باشند:

$$(2k+1)^3 - (2k)^3 = \cancel{8k^3} + 12k^2 + 6k + 1 - \cancel{8k^3}$$

$$= 2\underbrace{(6k^2 + 3k)}_{n} + 1 = 2n+1 \longrightarrow \text{فرد است}$$

۷- ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر ۳! بخش پذیر است.

گیریم آن سه عدد صحیح متوالی $n-1$ ، n ، $n+1$ باشند، حاصلضرب آنها n^3-n است.

طبق مسئله‌ای از قبل (سؤال ۳) می‌دانیم $3 \mid n^3-n$.

از طرفی حاصلضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است پس $2 \mid n^3-n$.

بنابراین $6 \mid n^3-n$ یعنی n^3-n بر ۳! بخش پذیر است.

۱۳۹۷ چند نمونه تست:

۱- عدد $xy(x-y)+1$ بر کدام یک از اعداد زیر ممکن است بخش پذیر باشد؟

① ۴ ② ۳ ③ ۶ ④ ۱۰

درصورتی که حداقل یکی از اعداد x یا y زوج باشند، عدد $xy(x-y)+1$ فرد است

اما در حالتی که x و y هر دو فرد باشند $x-y$ زوج بود و در نتیجه $xy(x-y)+1$ فرد است

پس در هر حالت، عدد $xy(x-y)+1$ عددی فرد است پس نمی‌تواند بر ۴ یا ۶ یا ۱۰ بخش پذیر باشد و ممکن است بر ۳ بخش پذیر باشد.

لذا گزینه ② صحیح است.

۲- اگر عدد صحیح n بر ۳ بخش پذیر نباشد، n^2 به کدام صورت است؟

① $3k-1$ ② $9k-2$ ③ $3k+1$ ④ $9k^2+1$

$$\text{اگر}: n=3q+1 \Rightarrow n^2=9q^2+6q+1=3\underbrace{(3q^2+2q)}_{k}+1=3k+1$$

$$\text{اگر}: n=3q+2 \Rightarrow n^2=9q^2+12q+4=9q^2+12q+3+1=3\underbrace{(3q^2+4q+1)}_{k'}+1=3k'+1$$

$\rightarrow$ گزینه ③

۳- اجتماع دو مجموعه $A=\{4k+1 \mid k\in Z\}$ ، $B=\{4k+3 \mid k\in Z\}$ کدام است؟

① $\{4k \mid k\in Z\}$ ② $\{2k+1 \mid k\in Z\}$ ③ $\{8k+1 \mid k\in Z\}$ ④ $\{4k+3 \mid k\in Z\}$

با توجه به باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۴، می‌توان اعداد صحیح را به صورت اعداد $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ ، $4k+3$ افراز کرد.

که $4k+1$ و $4k+3$ فرد می‌باشند و تمام اعداد صحیح فرد را با اجتماع آنها بدست می‌آوریم. گزینه ③

۴۰ـ چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی $3y-x^3+x+1=0$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) دو ۳) سه ۴) بیش از ۳

گزینه ۱ ⇐ تساوی هیچگاه برقرار نیست ⇐ $\underbrace{3y+1}_{\text{مضرب ۳ نیست}}=\underbrace{x^3-x}_{\text{سمت راست مضرب ۳}}$

۵۱ـ چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی $y=\frac{x^2-1}{8}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) بی‌شمار

اگر x فرد باشد مربع آن $x^2=8k+1$ است. پس $y=\frac{8k+1-1}{8}=k$

پس بی‌شمار نقطه بی‌شمار نقطه صحیح وجود دارد.

گزینه ۴

همنهشتی: برای هر عدد طبیعی m و هر دو عدد صحیح a و b، اگر $m|a-b$

گوییم a همنهشت با b به پیمانهٔ (سنج) m است و می‌نویسیم: $a \overset{m}{\equiv} b$

به عبارت دیگر: $\forall a,b \in \mathbb{Z},\ a \overset{m}{\equiv} b \Longleftrightarrow m|a-b \quad (m \in \mathbb{N})$

به طور مثال: $21 \overset{4}{\equiv} 1$ زیرا $21-1=20$ و $4|20$.

مثال: نشان دهید: $(a+b)^2 \overset{ab}{\equiv} a^2+b^2$

$(a+b)^2-(a^2+b^2)=a^2+b^2+2ab-a^2-b^2=2ab \quad , \quad ab|2ab$

$\Longrightarrow (a+b)^2 \overset{ab}{\equiv} a^2+b^2$

ویژگی‌ها همنهشتی:

① $a \overset{m}{\equiv} b \Longrightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

اثبات:

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$

همچنین: $m|a-b \Rightarrow m|(a-c)-(b-c) \Rightarrow a-c \overset{m}{\equiv} b-c$

② $a \overset{m}{\equiv} b \Longrightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

اثبات:

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc$

$\Longrightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

تذکر: عکس ویژگی ② برقرار نیست یعنی از $ac \overset{m}{\equiv} bc$ نمی‌توان نتیجه گرفت: $a \overset{m}{\equiv} b$.

③ $a \overset{m}{\equiv} b \Longrightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

اثبات:

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$

$\Rightarrow m|a^n-b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

تذکر: عکس ویژگی ③ برقرار نیست یعنی از $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a \overset{m}{\equiv} b$.

④ $a \overset{m}{\equiv} b,\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m\mid a-b \xrightarrow{\times c} m\mid ac-bc \\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m\mid c-d \xrightarrow{\times b} m\mid bc-bd \end{array}\right\} \xrightarrow{+} m\mid ac-bd \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$$

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m\mid a-b \\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow m\mid c-d \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{+} m\mid (a+c)-(b+d) \Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+d \\ \xrightarrow{-} m\mid (a-c)-(b-d) \Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-d \end{array}$$

مثال: ثابت کنید $۹۷^۳+۱۴۴^۲\overset{۵}{\equiv}۴$

$$\left.\begin{array}{l} ۹۷\overset{۵}{\equiv}۲ \xrightarrow{\text{توان ۳}} ۹۷^۳\overset{۵}{\equiv}۸\overset{۵}{\equiv}۳ \\ ۱۴۴\overset{۵}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۴۴^۲\overset{۵}{\equiv}۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۹۷^۳+۱۴۴^۲\overset{۵}{\equiv}۴$$

تذکر: هرگاه بخواهیم همنهشت عدد a را به پیمانه m تعیین کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده (r) را بدست آوریم که: $a\overset{m}{\equiv}r$

اثبات: $a=mq+r \Rightarrow m\mid a-r \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$

نتیجه: اگر a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، باقیمانده یکسان داشته باشند آنگاه:

$$a\overset{m}{\equiv}b$$

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $A=۲۷^۷+۱۹$ را بر ۱۳ بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{توان ۷}} ۲۷^۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \\ ۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A\overset{۱۳}{\equiv}۷ \Rightarrow \text{باقیمانده ۷ است}$$

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ را بر ۷ بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۳}} (۱۰۰۰)^{۱۳}\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\times ۱۲} (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲\overset{۷}{\equiv}-۱۲\overset{۷}{\equiv}۲ \\ ۱۰\overset{۷}{\equiv}۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$$A\overset{۷}{\equiv}۵ \Rightarrow r=۵$$

⑤ $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \\ mt\overset{m}{\equiv}mk \end{array}\right\} \xrightarrow{\pm} a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$$

⑥ $ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{(m,c)=d} a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

مثال: $۹۰\overset{۱۲}{\equiv}۵۴ \xrightarrow[(۱۲,۱۸)=۶]{\div ۱۸} ۵\overset{۲}{\equiv}۳$

نتیجه مهم: اگر $(m,c)=1$ آنگاه:

$$ac\overset{m}{\equiv}bc \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

مثال: اگر رقم یکان اعداد $5a+2$ و $2a+6$ یکسان باشد، رقم یکان عدد $7a-3$ را بیابید.

$$5a+2 \overset{10}{\equiv} 2a+6 \Rightarrow 3a \overset{10}{\equiv} 4 \xrightarrow{\text{راست } +(-10)}$$

$$3a \overset{10}{\equiv} -6 \xrightarrow{\div 3} a \overset{10}{\equiv} -2$$

$$\xrightarrow{\times 7} 7a \overset{10}{\equiv} -14 \xrightarrow{\text{راست } +(20)} 7a \overset{10}{\equiv} 6 \xrightarrow{-3}$$

$$7a-3 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow$$ رقم یکان ۳ می‌باشد

حل چندنمونه سؤال:

۱- اگر باقیماندهٔ عدد A بر ۳۷ برابر ۲۳ باشد و $2A-3 \overset{37}{\equiv} x$، آنگاه مقدار x برابر است با:

۲۶ ۲۰ ۱۷ ۶

$$A \overset{37}{\equiv} 23 \xrightarrow{\times 2} 2A \overset{37}{\equiv} 46 \xrightarrow{-3} 2A-3 \overset{37}{\equiv} 43 \overset{37}{\equiv} 6$$

$x=6$

۲- اگر باقیمانده a و b بر ۷ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقیماندهٔ عدد $2a+ab+2b$ بر ۷ کدام است؟

۳ ۱ ۷ ۵

$$a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 2} 2a \overset{7}{\equiv} 6$$
$$b \overset{7}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 2} 2b \overset{7}{\equiv} 8$$
$$ab \overset{7}{\equiv} 12$$
$$\xrightarrow{+} 2a+ab+2b \overset{7}{\equiv} 26 \overset{7}{\equiv} 5$$

گزینه ۱

۳- باقیماندهٔ تقسیم 2^{23} بر ۱۷ کدام است؟

۹ ۴ ۱۳ ۱۶

$$2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{توان } 5} 2^{20} \overset{17}{\equiv} -1$$
$$\xrightarrow{\times 2^3} 2^{23} \overset{17}{\equiv} -8 \overset{17}{\equiv} 9$$

گزینهٔ ۴ جواب است

۴ - اگر a مضرب ۱۶ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم

$$(17a+1)^2+(17a+2)^2+(17a+3)^2+(17a+4)^2+(17a+5)^2$$

بر ۴ کدام است؟ ۲ صفر ۱ ۳

a مضرب ۱۶ است پس a بر ۴ بخش‌پذیر است پس: $17a \overset{4}{\equiv} 0 \Leftarrow a \overset{4}{\equiv} 0$

عدد مورد سؤال $\overset{4}{\equiv} (0+1)^2+(0+2)^2+(0+(-1))^2+(0+0)^2+(0+1)^2$

$\overset{4}{\equiv} 1+4+1+0+1$

$\overset{4}{\equiv} 7 \overset{4}{\equiv} 3 \longrightarrow$ گزینه ۴

۵ - رقم سمت راست عدد $k=(1!+3!+5!+\dots+1397!)(2!+4!+6!+\dots+1398!)$ کدام است؟ صفر ۲ ۴ ۱

$5! \overset{10}{\equiv} 0$ و $4! \overset{10}{\equiv} 4$ و $3! \overset{10}{\equiv} 6$ و $2! \overset{10}{\equiv} 2$ و $1! \overset{10}{\equiv} 1$ بقیه $\overset{10}{\equiv} 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2!+4!+6!+\dots+1398! \overset{10}{\equiv} 2+4+0+\dots+0 \overset{10}{\equiv} 6 \\ 1!+3!+5!+\dots+1397! \overset{10}{\equiv} 1+6+0+\dots+0 \overset{10}{\equiv} 7 \end{cases} \xrightarrow{\times} k \overset{10}{\equiv} 42 \overset{10}{\equiv} 2$$

گزینه ۲

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $A=1358$ را بر عدد ۹ بیابید.

$$A=1\times 10^3+3\times 10^2+5\times 10+8$$

میدانیم: $10 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 10^n \overset{9}{\equiv} 1$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1+3+5+8 \overset{9}{\equiv} 17 \overset{9}{\equiv} 8$$

طبق این مثال حدس می‌زنیم: برای محاسبه باقیمانده عدد A بر ۹ کافی است باقیمانده مجموع ارقام عدد A را بر ۹ حساب کرد.

نکته: باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر عدد ۹، برابر است با باقیمانده مجموع ارقام آن عدد در تقسیم بر عدد ۹.

اثبات: عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0}$ را در نظر می‌گیریم:

$$A=a_{n-1}\times 10^{n-1}+a_{n-2}\times 10^{n-2}+\dots+a_1\times 10^1+a_0$$

میدانیم: $\forall n\in N: 10^n \overset{9}{\equiv} 1$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}\times 1+a_{n-2}\times 1+\dots+a_1\times 1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_1+a_0$$

سؤال: ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$ بر ۳ برابر است با باقیماندهٔ تقسیم مجموع ارقام A بر ۳.

$$A=a_{n-1}\times 10^{n-1}+a_{n-2}\times 10^{n-2}+\cdots+a_1\times 10^1+a_0$$

میدانیم: $10\overset{3}{\equiv}1 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: 10^n\overset{3}{\equiv}1$

$$\Rightarrow A\overset{3}{\equiv}a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0$$

سؤال: باقیماندهٔ تقسیم عدد $A=498532\overline{7}$ را بر ۱۱ حساب کنید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+5\times10^3+3\times10^2+2\times10^1+7$$

میدانیم: $10\overset{11}{\equiv}-1 \Longrightarrow \overset{\text{زوج}}{10^n}\overset{11}{\equiv}1$ و $\overset{\text{فرد}}{10^n}\overset{11}{\equiv}-1$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times1+9\times(-1)+8\times1+5\times(-1)+3\times1+2\times(-1)+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4-9+8-5+3-2+7 \Rightarrow A\overset{11}{\equiv}6 \Rightarrow$$ باقیمانده ۶ است

نکته: باقیماندهٔ تقسیم عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$ بر هریک از اعداد ۲ یا ۵ یا ۱۰ برابر است با باقیماندهٔ رقم یکان A (یعنی a_0) بر هرکدام از این اعداد.

اثبات:

$$A=a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots+a_1\times10^1+a_0$$

میدانیم: $10\overset{2}{\equiv}0$ و $10\overset{5}{\equiv}0$ و $10\overset{10}{\equiv}0 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: 10^n\overset{2}{\equiv}0,\ 10^n\overset{5}{\equiv}0,\ 10^n\overset{10}{\equiv}0$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}a_{n-1}\times0+a_{n-2}\times0+\cdots+a_1\times0+a_0 \Rightarrow A\overset{2}{\equiv}a_0$$

و $A\overset{5}{\equiv}a_0$ و $A\overset{10}{\equiv}a_0$

نتیجه: عدد A وقتی بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن (یعنی a_0) بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ بخش‌پذیر باشد.

به عبارت دیگر عدد A وقتی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد

و عدد A ~ ~ ~ ~ ~ ۵ ~ ~ ۵ یا ۰ باشد

و ~ A ~ ~ ~ ~ ~ ۱۰ ~ ~ صفر باشد

قرارداد: مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیحی که با پیمانه‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر r می‌باشد را کلاس یا دسته‌ی همنهشتی r به پیمانه‌ی m گوییم:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$$

مثال: عدد ۱۴۹۸ به کدام دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۹ تعلق دارد؟

$$\begin{array}{r|l} 1498 & 9 \\ \hline \vdots & 154 \\ 3 & \end{array} \Rightarrow 1498 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow [3]_9 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 9k + 3\}$$

تست: عدد ۲۰۹- به کدام دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۱۲ تعلق دارد؟

[-۹] [-۷] [۷] [۹]

$$\begin{array}{r|l} 209 & 12 \\ \hline \vdots & 17 \\ 5 & \end{array} \Rightarrow -209 \overset{12}{\equiv} -5 \overset{12}{\equiv} 7 \Rightarrow [7]_{12} \rightarrow$$ گزینه‌ی ۲

مثال: امروز ۱۸ مرداد ماه، پنجشنبه می‌باشد، ۲۹ شهریور ماه چند شنبه است؟

مرداد: ۳۱ − ۱۸ = ۱۳
شهریور: ۲۹
$\xrightarrow{+}$ ۴۲ روز $\Rightarrow 42 \overset{7}{\equiv} 0$ → پنجشنبه می‌باشد

پ	ج	ش	ی	د	س	چ
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مثال: اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

مهر: ۳۰ − ۱ = ۲۹
دی + آذر + آبان: ۳ × ۳۰ = ۹۰
بهمن: ۱۲
$\xrightarrow{+}$ ۱۳۱ $\Rightarrow 131 \overset{7}{\equiv} 5$ → پنجشنبه می‌باشد

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مثال: اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

دی + آذر + آبان + مهر + شهریور: ۳۱ + ۴ × ۳۰ = ۱۵۱
بهمن: ۱۲
$\xrightarrow{+}$ ۱۶۳

$163 \overset{7}{\equiv} 2$

س	د	ی	ش	ج	پ	ج
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

چهارشنبه است

تست: بیست و هفتم اردیبهشت روز سه شنبه است؛ سومین شنبه در ماه اردیبهشت کدام روز ماه است؟

۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰

طبق فرض ۲۴ اردیبهشت شنبه است پس شنبه‌ها عبارتند از:

$۳ \xrightarrow{-۷} ۱۰ \xrightarrow{-۷} ۱۷ \xrightarrow{-۷} ۲۴ \xrightarrow{+۷} ۳۱$

اولین شنبه — دومین شنبه — سومین شنبه

جواب ۱۷ است.

تست: ۱۷ شهریور سالی شنبه است. ۲۲ بهمن این سال چه روزی از هفته است؟

یکشنبه — دوشنبه — جمعه — شنبه

مثال‌های آخر قبل را می‌توانیم برای سبک حساب کنیم.

: بهمن + دی + آذر + آبان + مهر + شهریور

$۱۴ + ۴\times۳۰ + ۲۲ \overset{۷}{\equiv} ۰ + ۴\times۲ + ۱ = ۹ \overset{۷}{\equiv} ۲$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

دوشنبه

تست: از انتهای کمان ۱۳۵° روی دایره مثلثاتی به اندازه ۴۰۰° در خلاف جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت می‌کنیم، انتهای کمان حاصل کدام است؟

۱۸۰ — ۹۰ — ۱۳۵ — ۴۵

$۴۰۰° \overset{۳۶۰}{\equiv} ۴۰$

حال اگر از ۱۳۵ به اندازه ۴۰ خلاف جهت دایره مثلثاتی حرکت کنیم به $۱۳۵-۴۰=۹۰$ می‌رسیم.

معادله‌ی همنهشتی:

می‌خواهیم اعدادی را بیابیم که به پیمانه ۲، همنهشت با ۱ باشند، پس آن اعداد را با x نمایش می‌دهیم، در این صورت:

$x \overset{۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} ۲ \mid x-۱ \Rightarrow x-۱=۲k \quad , k\in Z$

$\Longrightarrow x=۲k+1 \quad , k\in Z$

حال با نسبت دادن مقادیر مختلف صحیح به k می‌توان اعداد متمایزی برای x یافت:

k	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
x	...	-۳	-۱	۱	۳	۵	۷	...

13

توجه: $x=۲k+1$ را جواب عمومی معادله‌ی همنهشتی گویند.

مثال: معادله‌ی همنهشتی $4x \overset{5}{\equiv} 17$ را حل کرده و جواب‌های طبیعی کمتر از ۲۰ را بیابید.

$$4x \overset{5}{\equiv} 17-5 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 12 \xrightarrow[(4,5)=1]{\div 4} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x=5k+3$$

جواب عمومی معادله

k	0	1	2	3	~~4~~
x	3	8	13	18	~~23~~

$\Rightarrow$ جواب‌های مورد نظر ۳، ۸، ۱۳ و ۱۸ می‌باشند

مثال: همهٔ اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

$$7 \mid 3x-13 \Rightarrow 3x-13 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13$$

$$\Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-7 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[(3,7)=1]{\div 3} x \overset{7}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow x=7k+2 \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

قضیه: معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$.

نتیجه: اگر $(a,m)=1$ بدیهی است که معادله همواره دارای جواب است.

مثال: معادلات زیر را در صورت امکان حل کنید.

الف) $6x \overset{9}{\equiv} 11$

$(6,9)=3 \ , \ 3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

ب) $4x \overset{6}{\equiv} 18$

$(4,6)=2 \ , \ 2 \mid 18 \Rightarrow$ معادله دارای جواب است

$$4x \overset{6}{\equiv} 18-6 \Rightarrow 4x \overset{6}{\equiv} 12 \xrightarrow[(4,6)=2]{\div 4} x \overset{\frac{6}{2}}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 3 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 3-3 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x=3k$$

مثال: اعداد صحیح x را پیدا کنید که در تقسیم بر اعداد ۸ و ۱۲ به ترتیب باقیمانده‌های ۲ و ۱۰ داشته باشند.

$$x \overset{8}{\equiv} 2 \Rightarrow x=8k+2 \xrightarrow{x \overset{12}{\equiv} 10} 8k+2 \overset{12}{\equiv} 10$$

$$\Rightarrow 8k \overset{12}{\equiv} 8 \xrightarrow[(8,12)=4]{\div 8} k \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow k=3n+1$$

$$\xrightarrow{x=8k+2} x=24n+10 \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

حل معادلهٔ سیاله و کاربردهای آن :

اگر a ، b و c اعداد صحیح ثابت فرض شوند، معادلهٔ $ax+by=c$ را معادلهٔ سیاله گوییم به طوری که $x,y\in\mathbb{Z}$ باشند.

برای حل باید معادله را به یک معادلهٔ همنهشتی برحسب x یا برحسب y تبدیل کرد.

به طور مثال معادلهٔ سیالهٔ $4x+5y=9$ را در نظر بگیرید، ابتدا آن را به یک معادلهٔ همنهشتی برحسب x تبدیل می‌کنیم:

$$4x=-5y+9$$

$$\Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}9 \longrightarrow 4x\overset{5}{\equiv}9-5=4 \xrightarrow{\div 4} x\overset{5}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=5k+1}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{4x+5y=9} 20k+4+5y=9 \Rightarrow \boxed{y=-4k+1}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

مثال: معادلهٔ سیالهٔ $4x+3y=19$ را برحسب y به یک معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و حل کنید.

$$3y=-4x+19$$

$$\Rightarrow 3y\overset{4}{\equiv}19 \longrightarrow 3y\overset{4}{\equiv}19-4=15 \xrightarrow{\div 3} y\overset{4}{\equiv}5$$

$$\Rightarrow \boxed{y=4k+5}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{4x+3y=19} 4x+12k+15=19 \Rightarrow \boxed{x=-3k+1}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

x = تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و y = تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x+5000y=17000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=17$$

$$\Rightarrow 2x=17-5y$$

$$\Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}17 \longrightarrow 2x\overset{5}{\equiv}17-5=12 \xrightarrow{\div 2} x\overset{5}{\equiv}6$$

$$\Rightarrow x=5k+6\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{2x+5y=17} 10k+12+5y=17 \Rightarrow y=-2k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

k	-1	0	1
x	1	6	11
y	3	1	-1

$\Rightarrow$ به دو حالت می‌توان خُرد کرد

حالت اول: یک دو هزار تومانی و ۳ پنج هزار تومانی

حالت دوم: ۶ دو هزار تومانی و ۱ 〃 〃

مثال: در یک رستوران فقط دو نوع غذای قورمه سبزی و قیمه وجود دارد اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند. (هر نفر فقط یک پرس غذا میل کند.)

$x+y=5 \Longrightarrow x=-y+5$

$x \overset{1}{\equiv} 5 \Rightarrow x=k+5$

$\xrightarrow{x+y=5} k+5+y=5 \Rightarrow y=-k$

k	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
x = قورمه سبزی	۵	۴	۳	۲	۱	۰
y = قیمه	۰	۱	۲	۳	۴	۵

پس به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا دهند

مثال: تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم مرکز تیر اندازی می‌کند، اگر به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همهٔ تیرها داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیر اندازی می‌تواند ثبت شود؟

x = تعداد تیرهای ۵ امتیازی و y = تعداد تیرهای ۳ امتیازی

$5x+3y=42 \Rightarrow 5x=-3y+42$

$5x \overset{3}{\equiv} 42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42+3=45 \xrightarrow{\div 5} x \overset{3}{\equiv} 9$

$\Longrightarrow x=3k+9$

$\xrightarrow{5x+3y=42} 15k+45+3y=42 \Rightarrow y=-5k-1$

k	-۱	-۲	-۳
x = تیرهای ۵	۶	۳	۰
y = تیرهای ۳	۴	۹	۱۴

مشاهده می‌شود که سه حالت وجود دارد و مجموع تیراندازها در هر حالت کمتر از ۱۵ است.

تست: معادله‌ی سیاله‌ی $15x+14y=150$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ ۱۳۹۴

۲ ۳ ۴ ۵

$15x=-14y+150$

$\Rightarrow 15x \overset{14}{\equiv} 150 \xrightarrow{\div 15} x \overset{14}{\equiv} 70 \Rightarrow x=14k+70$

$\xrightarrow{15x+14y=150} 210k+150+14y=150 \Rightarrow y=-15k$

$\Rightarrow \begin{cases} 14k+70>0 \Rightarrow k>-5 \\ -15k>0 \Rightarrow k<0 \end{cases} \Rightarrow -5<k<0 \Rightarrow k=-4,-3,-2,-1$

۴ جواب طبیعی دارد.

تست: کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۵۰ و ۹۰ ریالی کدام است؟

۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱

$50x+90y=850 \xrightarrow{\div 10} 5x+9y=85 \Rightarrow 5x=-9y+85$

$\Rightarrow 5x \overset{9}{\equiv} 85 \xrightarrow{\div 5} x \overset{9}{\equiv} 17 \Rightarrow x=9k+17$

$\xrightarrow{5x+9y=85} 45k+85+9y=85 \Rightarrow y=-5k$

k	0	-1	-2
x	17	8	-1
y	0	5	10

$\Rightarrow \min(x+y)=8+5=13$

تست: مجموع ارقام بزرگترین عدد سه رقمی y که در رابطه‌ی $14x+18y=10$ صدق می‌کند کدام است؟

۲۳ ۲۵ ۲۱ ۱۹

$\xrightarrow{\div 2} 7x+9y=5 \Rightarrow 9y=-7x+5$

$\Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 5-14=-9 \overset{\div 9}{\Rightarrow} y \overset{7}{\equiv} -1$

$\Rightarrow y=7k-1 \xrightarrow{y \text{ سه رقمی}} 7k-1<1000 \Rightarrow 7k<1001$

$\Rightarrow k<\frac{1001}{7} \Rightarrow k<143 \xrightarrow{k=142} \max(y)=7\times 142-1=993$

مجموع ارقام y $=9+9+3=21$

حل تمرین های صفحات ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی:

۲- اگر $k\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید، فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است:

$k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

(به عبارت دیگر $k\in[0]_3$ یا $k\in[1]_3$ یا $k\in[2]_3$)

باقیماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر ۳ یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد، پس $3|k-0$ یا $3|k-1$ یا $3|k-2$ و طبق تعریف همنهشتی $k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

۳- اگر $a \overset{m}{\equiv} b$, $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{n|m} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۴- فرض کنید $a \overset{m}{\equiv} b$ ، $b \overset{n}{\equiv} c$ ، $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[\text{طبق تمرین ۳}]{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c$$

۵- ثابت کنید: اگر باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشد آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

گیریم باقیمانده تقسیم r باشد بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} r \\ b \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array}\right\} \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow m \mid a - b$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} a \overset{m}{\equiv} b$$

۶- عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه باقیمانده تقسیم دو عدد a و b بر m یکسان است.

اثبات:

گیریم باقیمانده تقسیم a بر m برابر r_1 و باقیمانده تقسیم b بر m برابر r_2 باشد پس:

$$\left.\begin{array}{l} a = mq + r_1 \\ b = mq' + r_2 \end{array}\right\} \rightarrow a - b = m(q - q') + (r_1 - r_2)$$

از طرفی: $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a - b = mq''$

$$mq'' = m(q - q') + (r_1 - r_2) \xrightarrow{0 \le r_1, r_2 < m} r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

۷- با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\times a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

ثابت کنید، برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$

$$\binom{n}{0}a^n=a^n\overset{ab}{\equiv}a^n$$
$$\binom{n}{1}a^{n-1}b\overset{ab}{\equiv}0$$
$$\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\overset{ab}{\equiv}0$$
$$\vdots$$
$$\binom{n}{n-1}ab^{n-1}\overset{ab}{\equiv}0$$
$$\binom{n}{n}b^n=b^n\overset{ab}{\equiv}b^n$$

$\xrightarrow{+}(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$

۸- با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $23^{51}-12^{51}-11^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

$$23^{51}=(11+12)^{51}\overset{11\times12}{\equiv}11^{51}+12^{51}$$

$$\xrightarrow{-11^{51}-12^{51}}23^{51}-11^{51}-12^{51}\overset{132}{\equiv}0$$

پس حکم برقرار است.

۹- باقیمانده تقسیم عدد $A=(2^{11}+7)\times9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$2^5\overset{23}{\equiv}9\xrightarrow{\text{توان ۲}}2^{10}\overset{23}{\equiv}81\xrightarrow{81\overset{23}{\equiv}12}2^{10}\overset{23}{\equiv}12$$

$$\xrightarrow{\times2}2^{11}\overset{23}{\equiv}24\xrightarrow{24\overset{23}{\equiv}1}2^{11}\overset{23}{\equiv}1\xrightarrow{+7}2^{11}+7\overset{23}{\equiv}8$$

$$\xrightarrow{\times9}(2^{11}+7)\times9\overset{23}{\equiv}72\xrightarrow{72\overset{23}{\equiv}3}A\overset{23}{\equiv}3\Rightarrow r=3$$

۱۰- اگر دو عدد $3a-5$ و $4a-7$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $9a+6$ را بدست آورید.

$$4a-7\overset{10}{\equiv}3a-5$$

$$\Rightarrow 4a-3a\overset{10}{\equiv}7-5\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}2\xrightarrow{\times9}9a\overset{10}{\equiv}18$$

$$\xrightarrow{+6}9a+6\overset{10}{\equiv}24\xrightarrow{24\overset{10}{\equiv}4}9a+6\overset{10}{\equiv}4\Rightarrow$$ رقم یکان ۴ است

۱۱- باقیمانده تقسیم عدد $A=1!+2!+3!+\dots+50!$ را بر ۱۰ بدست آورید.

$$1!\overset{10}{\equiv}1$$
$$2!\overset{10}{\equiv}2$$
$$3!\overset{10}{\equiv}6$$
$$4!=24\overset{10}{\equiv}4$$
$$5!\overset{10}{\equiv}0$$
$$\vdots$$
$$50!\overset{10}{\equiv}0$$

$$\xrightarrow{+}A\overset{10}{\equiv}1+2+6+4+0+\dots+0=13$$

$$\xrightarrow{13\overset{10}{\equiv}3}A\overset{10}{\equiv}3\Rightarrow$$ رقم یکان ۳ است

۱۲ـ جوابهای عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x+5y=11$ را بدست آورید.

$7x=-5y+11$

$\Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 21 \xrightarrow{\div 7} x \overset{5}{\equiv} 3$

$\Rightarrow x=5k+3 \ , k\in\mathbb{Z}$

$\xrightarrow{7x+5y=11} 35k+21+5y=11 \Rightarrow y=-7k-2 \ , k\in\mathbb{Z}$

۱۳ـ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

$2000x+5000y=29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x+5y=29$

$\Rightarrow 2x=-5y+29$

$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow x=5k+2, k\in\mathbb{Z}$

$\xrightarrow{2x+5y=29} 10k+4+5y=29 \Rightarrow y=-2k+5 \ , k\in\mathbb{Z}$

k	0	1	2
x = تعداد ۲۰۰۰ تومانی‌ها	2	7	12
y = تعداد ۵۰۰۰ تومانی‌ها	5	3	1

به سه طریق می‌توان خرد کرد.

۱۴ـ معادله‌های همنهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را بدست آورید.

الف) $429x \overset{11}{\equiv} 79$

$429x \overset{11}{\equiv} 79+11 \Rightarrow 429x \overset{11}{\equiv} 90 \xrightarrow{\div 9} 47x \overset{11}{\equiv} 10 \rightarrow 47x \overset{11}{\equiv} 10+29\times 11$

$\Rightarrow 47x \overset{11}{\equiv} 329 \xrightarrow{\div 47} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x=11k+7 \ , k\in\mathbb{Z}$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20 \xrightarrow{\div 4} 2x \overset{3}{\equiv} 5 \longrightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 5-6$

$\Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 2 \xrightarrow{\div 2} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x=3k+1 \ , k\in\mathbb{Z}$

پ) $15x \overset{6}{\equiv} 11 \qquad (15,6)=3 \ , \ 3\nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱۵ـ اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همان سال چه روز از هفته است؟

مهر + آبان + آذر + دی + بهمن + اسفند = $(30-1)+4\times 30+7 \overset{7}{\equiv} 2$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
0	1	2	3	4	5	6

سه‌شنبه است

۱۷ـ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+4\times 11$

$\Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow{\div 5} a \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow a=11k+7 \quad , k\in \mathbb{Z}$

۱۸ـ به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۴ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$3x+5y=24 \Rightarrow 3x=-5y+24 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 24 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 3\times 8-4\times 5$

$\Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 3 \xrightarrow{\div 3} x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow x=5k+1$

$\xrightarrow{3x+5y=24} 15k+3+5y=24 \Rightarrow y=-3k+4$

k	0	1
x (وزنه ۳ کیلویی)	1	6
y (وزنه ۵ کیلویی)	4	1

به دو طریق می‌توان وزن کرد.

۱۹ـ به چند طریق می‌توان از بین دو تا یک دسته‌گل شامل ۹ شاخه گل به دلخواه انتخاب کرد؟

$x+y=9 \Rightarrow x=-y+9$

$\Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \Rightarrow x=k+9$

$\xrightarrow{x+y=9} k+9+y=9 \Rightarrow y=-k$

k	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
x	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

به ده طریق می‌توان انتخاب کرد.

۲۰ـ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده و به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده است و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت‌هایی می‌توانسته این امتیاز را به دست آورده باشد؟

$7x+9y=73$

$\Rightarrow 7x=-9y+73 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 73$

$\Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 7\times 3-5\times 9 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 28 \xrightarrow{\div 7} x \overset{9}{\equiv} 4$

$\Rightarrow x=9k+4$

$\xrightarrow{7x+9y=73} 63k+28+9y=73 \Rightarrow y=-7k+5$

k	0
x	4
y	5

$\Rightarrow$ فقط به یک صورت می‌تواند ۷۳ امتیاز کسب کرد.