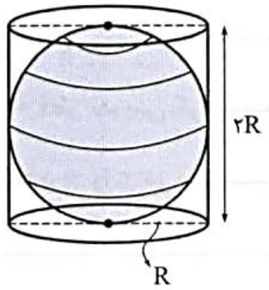
بسم الله الرحمن الرحیم

## درس اول: حجم و مساحت کره

یک توپ فوتبال، یک کره‌ی جغرافیایی و یک پرتقال، نمونه‌هایی از حجم‌های کروی هستند. به طورکلی، کره به مجموعه‌ی نقطه‌هایی از فضا گفته می‌شود که همه‌ی آن نقطه‌ها از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز کره، به یک فاصله‌ی ثابت باشند. به این فاصله‌ی ثابت شعاع کره می‌گوییم.




اگر مانند شکل مقابل، کره‌ای به شعاع R را در داخل استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع ۲R قرار دهیم، کره در داخل استوانه محاط می‌شود یعنی نقطه‌های بالایی، پایینی و اطراف کره بر استوانه مماس می‌شود. در این حالت فضای خالی بین استوانه و کره، برابر حجم نصف کره است. بنابراین:

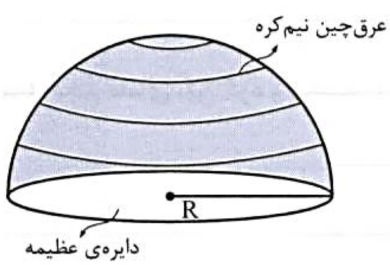
$$\text{حجم استوانه} = \frac{3}{2} \times \text{حجم کره} \Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{2}{3}\,\text{حجم استوانه} \Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{2}{3} \times \underbrace{\pi R^2 h}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{2}{3} \times \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

پس حجم کره‌ای به شعاع R، برابر است با: $\frac{4}{3}\pi R^3$

و حجم نیم‌کره‌ای به شعاع R، برابر است با: $\frac{2}{3}\pi R^3$

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{1}{2} \times V_{\text{کره}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

- اگر یک کره‌ی چوبی توپُر را به طور دقیق به دو نیم‌کره تبدیل کنیم، سطح مقطع این نیم‌کره‌ها به شکل یک دایره است که شعاع این دایره، با شعاع کره برابر است. به این دایره، دایره‌ی عظیمه‌ی کره می‌گویند و رویه‌ی گنبدی‌شکل نیم‌کره را عرق‌چین نیم‌کره می‌گویند.



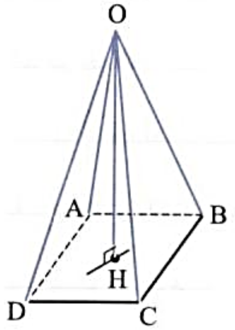

- مساحت کره چهار برابر مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی آن است.

$$S_{\text{دایره‌ی عظیمه}} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \Rightarrow S_{\text{عرق‌چین نیم‌کره}} = \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = 2\pi R^2$$

و مساحت کل نیم‌کره‌ی توپُر برابر است با:

$$S_{\text{کل نیم‌کره‌ی توپُر}} = \underbrace{2\pi R^2}_{\text{مساحت عرق‌چین نیم‌کره}} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{مساحت دایره‌ی عظیمه}} = 3\pi R^2$$

## درس دوم: حجم هرم و مخروط




● هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده‌ی هرم به شکل چندضلعی است.

در شکل مقابل هرم OABCD را مشاهده می‌کنید. چهارضلعی ABCD قاعده‌ی هرم است. وجه‌های جانبی هرم به شکل مثلث هستند که همگی در یک نقطه به نام رأس هرم مشترک‌اند.

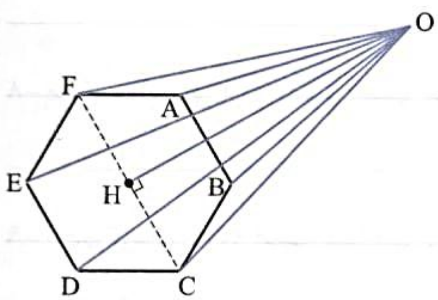
در هرم شکل مقابل، نقطه‌ی O رأس هرم و مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$، $\overset{\Delta}{OBC}$، $\overset{\Delta}{OCD}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ وجه‌های جانبی هرم هستند.

به فاصله‌ی رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در هرم شکل بالا، OH ارتفاع هرم است.

● اگر چندضلعی قاعده‌ی هرم، یک چندضلعی منتظم (مانند مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع) باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های همنهشت باشند، آن‌گاه هرم را منتظم می‌گویند.

● اگر قاعده‌ی هرم، مرکز تقارن داشته باشد (مانند مربع یا شش‌ضلعی منتظم)، در این صورت، پای ارتفاع هرم (نقطه‌ی برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن قاعده قرار می‌گیرد.

قاعده‌ی هرم شکل زیر، شش‌ضلعی منتظم است و نقطه‌ی H مرکز تقارن شش‌ضلعی است. OH ارتفاع هرم است.




● اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آن‌ها با هم برابر است.

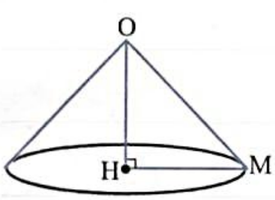
**حجم هرم:** حجم هرم از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}\underbrace{S}_{\text{مساحت قاعده}}.\underbrace{h}_{\text{ارتفاع هرم}}$$

هرمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر و ارتفاع هرم ۷ سانتی‌متر است. حجم هرم را حساب کنید.

$$V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \overset{۲}{\cancel{۶}} \times ۶ \times ۷ = ۸۴\ cm^۳$$

**مخروط:** مخروط شکلی فضایی مانند هرم منتظم است با این تفاوت که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی، دایره است. مرکز این دایره، پای ارتفاع مخروط است.




برای مثال در مخروط شکل مقابل نقطه‌ی O رأس مخروط، OH ارتفاع مخروط، نقطه‌ی H پای ارتفاع و مرکز قاعده‌ی مخروط و HM شعاع قاعده‌ی مخروط است.

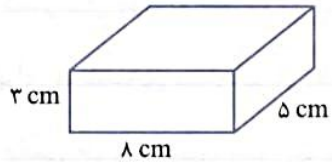
● حجم مخروط از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود: ( R شعاع قاعده‌ی مخروط است)

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}S.h = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

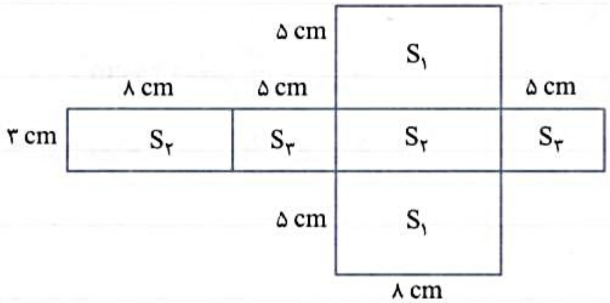
حجم مخروطی را حساب کنید که شعاع قاعده‌ی آن ۵ cm و ارتفاع آن ۶ cm باشد.

$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۵^۲ \times ۶^۲ = ۵۰ \times ۳/۱۴ = ۱۵/۷\ cm^۳$$

به مکعب‌مستطیل شکل مقابل دقت کنید.



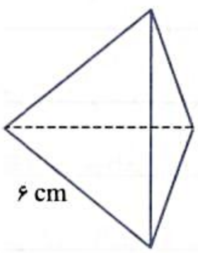

می‌خواهیم شکل گسترده‌ی این مکعب‌مستطیل را رسم کنیم و سپس با استفاده از آن، مساحت کل مکعب‌مستطیل را به دست آوریم. گسترده‌ی مکعب‌مستطیل به صورت زیر است:



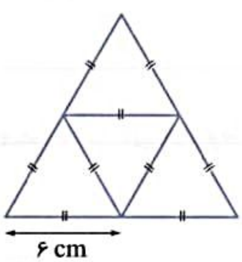

اگر مساحت‌های سه وجه مختلف مکعب‌مستطیل را با $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ نمایش دهیم، مساحت کل مکعب‌مستطیل برابر است با:

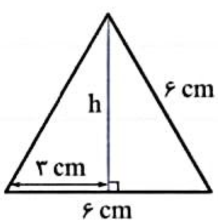
$$S_{\text{کل}} = ۲S_۱ + ۲S_۲ + ۲S_۳ = ۲(S_۱ + S_۲ + S_۳) = ۲ \times (۸ \times ۵ + ۸ \times ۳ + ۵ \times ۳) \Rightarrow S_{\text{کل}} = ۱۵۸\ \text{cm}^۲$$

● هرم منتظم شکل مقابل از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌اندازه تشکیل شده است. به این هرم، چهاروجهی منتظم نیز می‌گویند. گسترده‌ی این هرم از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به شکل زیر تشکیل شده است.




برای محاسبه‌ی مساحت کل این هرم، باید مساحت یک وجه آن را حساب کنیم و سپس آن را چهار برابر کنیم. پس ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ سانتی‌متر را حساب می‌کنیم.




$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\cancel{۶} \times ۳\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = ۹\sqrt{۳}\ \text{cm}^۲$$

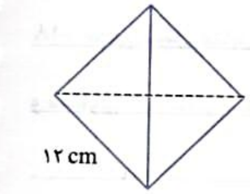
$$h^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \Rightarrow h = \sqrt{۲۷} = ۳\sqrt{۳}\ \text{cm}$$

بنابراین مساحت کل هرم بالا برابر است با:

$$S_{\text{کل هرم}} = ۴ \times S_{\text{یک مثلث}} = ۴ \times ۹\sqrt{۳} = ۳۶\sqrt{۳}\ \text{cm}^۲$$

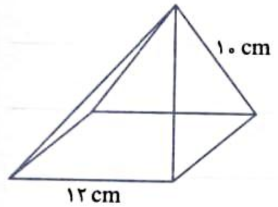
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می‌آید.

مساحت کل هرم منتظم چهاروجهی (چهاروجهی منتظم) به ضلع a، از رابطه‌ی $a^۲\sqrt{۳}$ به دست می‌آید.

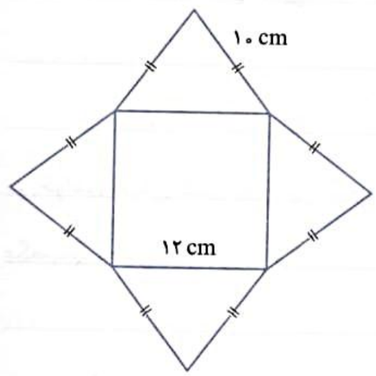



مساحت کل چهاروجهی منتظم شکل مقابل را حساب کنید.

$$S_{\text{کل}} = a^۲\sqrt{۳} = ۱۲^۲ \times \sqrt{۳} = ۱۴۴\sqrt{۳}$$



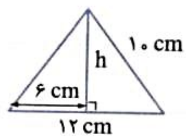

- قاعده‌ی هرم منتظم شکل مقابل، یک مربع است. شکل گسترده‌ی آن را رسم کنید و سپس مساحت کل آن را حساب کنید.




گسترده‌ی هرم به صورت زیر است:

برای محاسبه‌ی مساحت کل هرم باید مساحت مربع قاعده را با مجموع مساحت‌های مثلث‌های چهار وجه جانبی حساب کنیم. مساحت یک مثلث به صورت زیر حساب می‌شود:

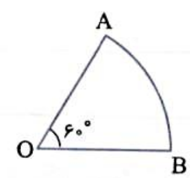
$$h^۲ = ۱۰^۲ - ۶^۲ = ۶۴ \Rightarrow h = ۸\ \text{cm}$$



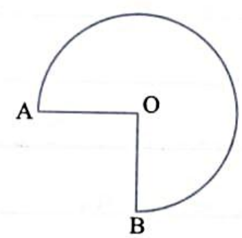

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\overset{۶}{\cancel{۱۲}} \times ۸}{\cancel{۲}} = ۴۸\ \text{cm}^۲$$

$$S_{\text{کل هرم}} = S_{\text{مربع}} + ۴ \times S_{\text{یک مثلث}} = ۱۲ \times ۱۲ + ۴ \times ۴۸ = ۳۳۶\ \text{cm}^۲$$

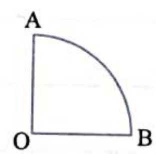
- به شکل‌های زیر توجه کنید.



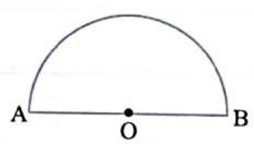

$\frac{۱}{۶}$ دایره $\left(\frac{۱}{۶} = \frac{۶۰°}{۳۶۰°}\right)$




$\frac{۳}{۴}$ دایره



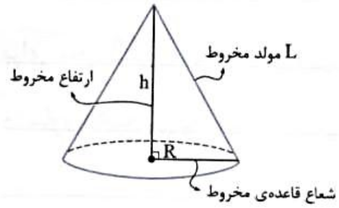

ربع دایره ($\frac{۱}{۴}$ دایره)




نیم‌دایره ($\frac{۱}{۲}$ دایره)

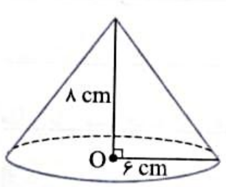
هر یک از شکل‌های بالا، کسری یا قسمتی از دایره هستند که به آن‌ها قطاع دایره می‌گوییم. در تمامی شکل‌ها، O مرکز دایره است.

- با هر قطاعی از دایره، می‌توان یک مخروط درست کرد که قسمت منحنی شکل قطاع ($\overset{\frown}{AB}$) محیط قاعده‌ی مخروط و شعاع دایره، مولد مخروط می‌شود. البته توجه کنید که این مخروط‌ها فقط سطح جانبی دارند، (قاعده ندارند).




- مساحت جانبی مخروط از رابطه‌ی روبه‌رو حساب می‌شود: $S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL$

و مساحت کل مخروط برابر است با: $S_{\text{کل مخروط}} = \underbrace{\pi RL}_{S\,\text{جانبی}} + \underbrace{\pi R^۲}_{S\,\text{قاعده}}$




مساحت جانبی و مساحت کل مخروط شکل مقابل را حساب کنید.

ابتدا طول مولد مخروط را حساب می‌کنیم.

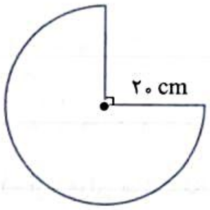
$$L^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow L = ۱۰$$

$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL = ۳/۱۴ \times \ldots ۳۶ = ۳۰۱/۴۴\ \text{cm}^۲$$

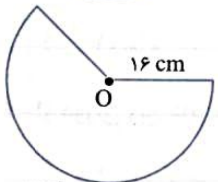
اگر با قطاعی از دایره به شعاع R، بخواهیم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r بسازیم، اندازه‌ی شعاع قاعده‌ی مخروط از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. (اندازه‌ی $\widehat{AB}$ باید برحسب درجه باشد).

$$r = \frac{\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ} \times R$$

می‌خواهیم با $\frac{۳}{۴}$ دایره‌ای به شعاع ۲۰ cm یک سطح مخروطی درست کنیم. شعاع قاعده‌ی این مخروط را حساب کنید.




$$\frac{۳}{\cancel{۴}} \times \overset{۵}{\cancel{۲۰}} = ۱۵ \text{ cm}$$




می‌خواهیم با قطاع دایره‌ی مقابل، مخروطی بسازیم. شعاع قاعده‌ی مخروط را حساب کنید.

$$r = \frac{\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ} \times R = \frac{۲۲۵^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۱۶ = \frac{۵}{\underset{۱}{\cancel{۸}}} \times \overset{۲}{\cancel{۱۶}} = ۱۰ \text{ cm}$$

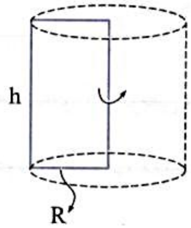
توجه داشته باشید که مساحت قطاع دایره با مساحت جانبی مخروط برابر است. یعنی اگر در شکل بالا، بخواهیم مساحت جانبی مخروطی را که ساخته‌ایم حساب کنیم، فقط کافی است که مساحت قطاع را حساب کنیم.

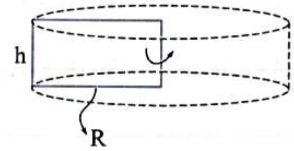
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۲۲۵^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۱۶^۲ \times \pi = \frac{۵}{\underset{۱}{\cancel{۸}}} \times \overset{۲}{\cancel{۱۶}} \times ۱۶\pi = ۱۶۰\pi$$

و اگر بخواهیم با استفاده از فرمول مساحت جانبی مخروط، سطح جانبی مخروط حاصل را حساب کنیم، داریم:

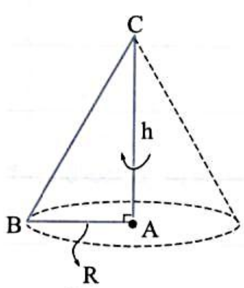
$$S_{\text{جانبی مخروط}} = \pi RL = \pi \times ۱۰ \times ۱۶ = ۱۶۰\pi$$ (شعاع قطاع، مولد مخروط است.)

- پیش از این آموختید که از دوران یک مستطیل، حول یک ضلع آن، یک استوانه حاصل می‌شود.

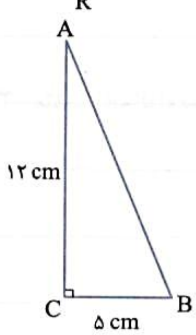



- از دوران مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائم آن، یک مخروط حاصل می‌شود. ضلعی که مثلث را حول آن دوران می‌دهیم، ارتفاع مخروط و ضلع قائم دیگر شعاع قاعده‌ی مخروط می‌شود. در مخروط شکل مقابل، مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع AC دوران داده شده است. AC ارتفاع مخروط و AB شعاع قاعده‌ی مخروط است.




مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل را حول ضلع AC دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کل شکل حاصل را حساب کنید.



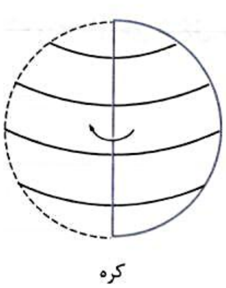

$$AB^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow AB = ۱۳ \Rightarrow L_{\text{مولد مخروط}} = ۱۳ \text{ cm}$$

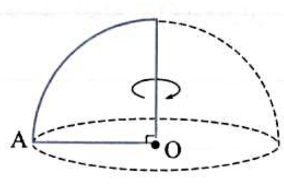
$$R = ۵ \qquad h = ۱۲ \text{ cm}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \pi \times ۵^۲ \times \overset{۴}{\cancel{۱۲}} = ۱۰۰\pi$$

$$S_{\text{کل مخروط}} = \pi RL + \pi R^۲ = \pi \times ۵ \times ۱۳ + ۲۵\pi = ۶۵\pi + ۲۵\pi = ۹۰\pi$$

- از دوران نیم‌دایره یا دایره حول قطر آن، یک کره حاصل می‌شود.
- از دوران ربع دایره، حول شعاعش، یک نیم‌کره حاصل می‌شود.


کره



ربع دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی‌متر را حول شعاعش دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کل شکل حاصل را حساب کنید.

شکل حاصل نیم‌کره است.

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\times\pi\times 9^3 = \frac{2}{\cancel{3}}\times\pi\times \overset{3}{\cancel{9}}\times 9^2 = 486\pi$$

$$S_{\text{کل نیم‌کره}} = 3\pi R^2 = 3\pi\times 9^2 = 243\pi$$