

فصل سیم: تابع؛

مفهوم زوج مرتب؛ با هر دوشی یا دو عدد که با ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند زوج مرتب می گوئیم که آنرا به صورت (a, b) نمایش می دهیم و با a مؤلفه اول و با b مؤلفه دوم می گوئیم



(a, b)
مؤلفه دوم \rightarrow a مؤلفه اول

نکته: در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$

نکته: دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) هنگامی با هم مساوی هستند که: $a=c, b=d$

مثال: اگر زوج مرتب های $(3, m-1)$ و $(n+2, 5)$ با هم مساوی باشند مقدارهای n, m را بدست آورید.

جواب: چون این دو زوج مرتب با هم مساویند پس باید مؤلفه های اول آنها با هم و مؤلفه های دوم آنها نیز با هم مساوی باشند یعنی:

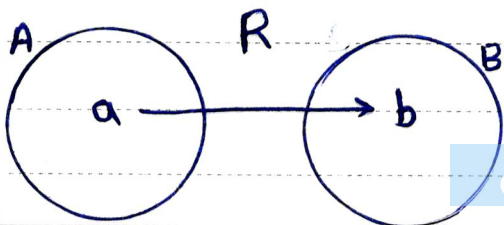
$$n+2=3, \quad m-1=5$$

$$n=3-2, \quad m=5+1$$

$$n=1, \quad m=6$$

سؤال امتحانی: اگر زوج مرتب های $(x+3y, 3)$ و $(1, y-x)$ با هم مساوی باشند مقدارهای x و y را بدست آورید

مفهوم رابطه: یک رابطه مثل R عضوهای یک مجموعه مثل A را به عضوهای یک مجموعه دیگر مثل B مربوط می کند، یعنی اگر عضوهای رابطه را به صورت زوج مرتب های (a, b) نمایش دهیم آنگاه $a \in A, b \in B$ خواهد بود.



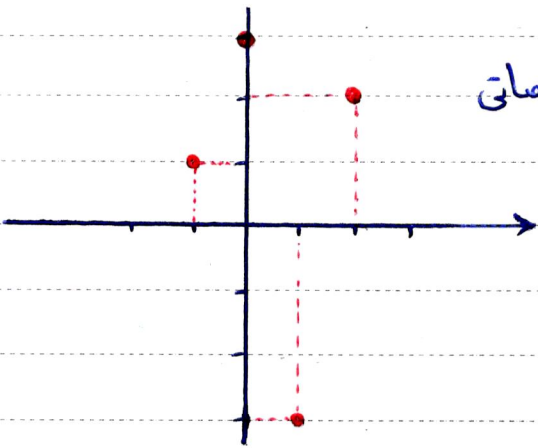


همه ی مثالهای زیر یک رابطه را مشخص می کنند.

(ب) نمایش زوج مرتبی

$$R = \{(-1, +1), (0, 3), (+2, 2), (+1, -3)\}$$

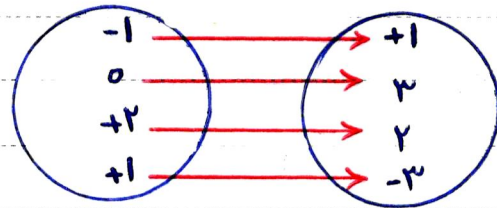
(د) نمودار مختصاتی



(الف) نمایش جدولی

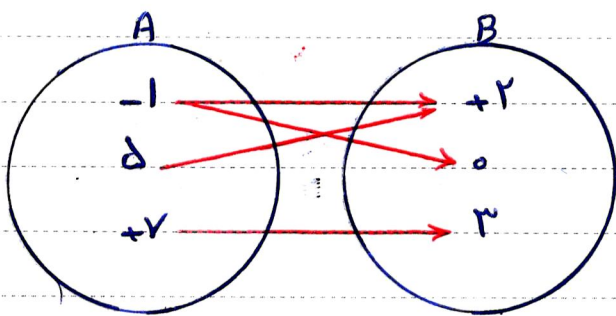
x	-1	0	+2	+1
y	+1	3	2	-3

(ج) نمودار وین (پیکانی)



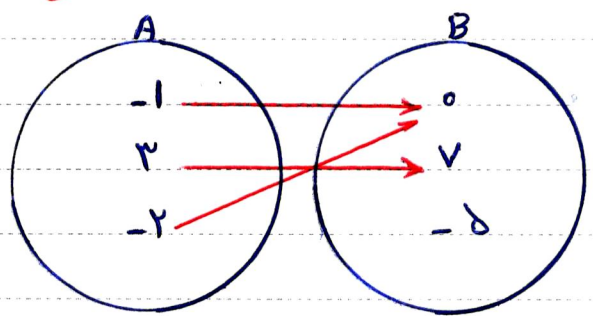
مفهوم تابع: رابطه ای از مجموعه A با مجموعه B است که با هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهد.

در واقع یک رابطه که با صورت نمودار وین (پیکانی) داده شده است. وقتی تابع است که: از هر عضو A فقط یک فلش خارج شده باشد (اگر از عضوی از A هیچ فلشی خارج نشود یا بیش از یک فلش خارج شود، تابع نیست).



تابع نیست

زیرا از عدد ۵ دو فلش خارج شده است



تابع است

نکته: نمایش زوج مرتبی مربوط با یک رابطه هنگامی نشان دهند، یک تابع است که، مؤلفه های اول هیچ کدام از زوج مرتب ها مثل هم نباشند. (ولی اگر مؤلفه های اول دو زوج مرتب با هم برابر بودند، باید مؤلفه های دوم آنها نیز با هم برابر باشند)

$$F = \{(2, 5), (3, 4), (1, 7)\}$$

تابع است. زیرا تمام مؤلفه های اول مختلف هستند

$$G = \{(2, 3), (-1, 4), (2, 5)\}$$

تابع نیست: زیرا در دو تا از زوج مرتب ها مؤلفه های اول می شود برابر

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۲۷۲۵۲۰۱۳۷۰۹

مثال: اگر مجموعه‌ای $f = \{(-1, 2b-4), (5, 7), (-1, 2), (5, a-3)\}$ یک تابع باشد، مقدار a, b چقدر است؟

$$(-1, 2b-4) = (-1, 2) \Rightarrow 2b-4 = 2$$

$$2b = 2+4 = 6$$

$$b = \frac{6}{2} = 3$$

$$(5, a-3) = (5, 7) \Rightarrow a-3 = 7$$

$$a = 7+3 = 10$$



مثال: مقدار a و b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی مقابل نشان دهنده‌ی یک تابع باشد.
 $f = \{(2, 3), (-3, a+b), (2, a-b), (-3, 5)\}$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases}$$

$$2a=8$$

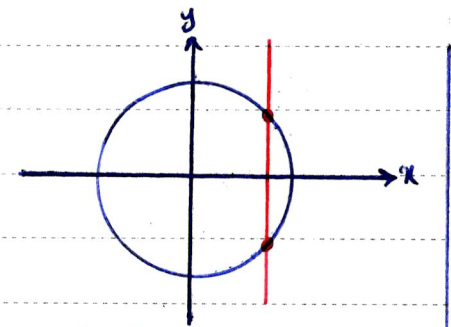
$$a=\frac{8}{2}=4$$

$$a+b=5$$

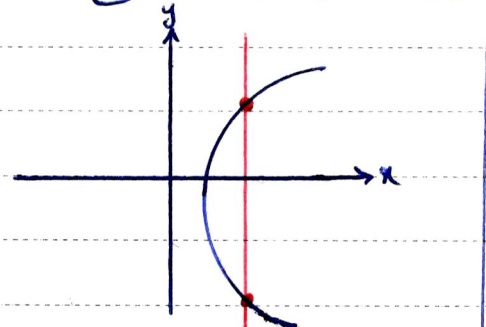
$$4+b=5$$

$$b=5-4=1$$

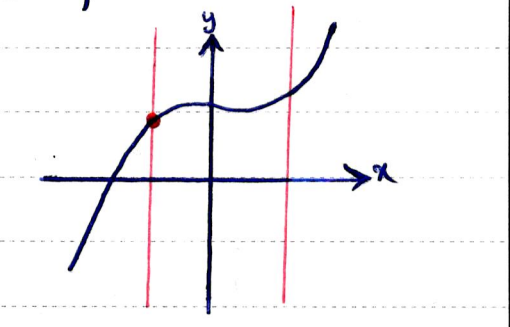
همواره مختصات یک رابطه؛ در صورتی تابع است، که اگر هر خط عمودی دلخواه (موازی محور y ها) رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند



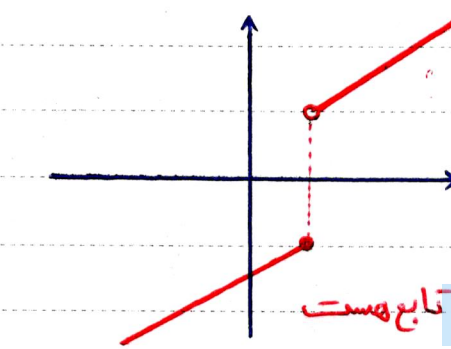
تابع نیست زیرا خط عمودی (موازی محور y ها) آن را در دو نقطه قطع کرده است.



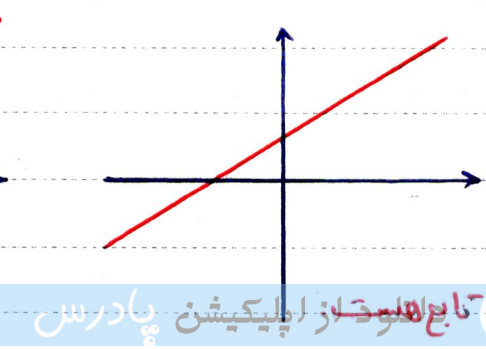
تابع نیست زیرا خط عمودی (موازی محور y ها) آن را در دو نقطه قطع کرده است.



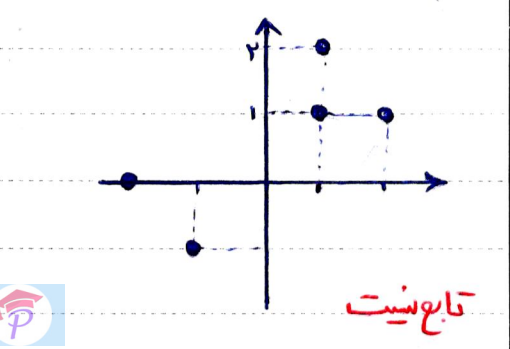
تابع است زیرا هر خط عمودی (موازی محور y ها) آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



تابع هست



تابع است



تابع نیست

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

همراه: ۰۲۷۲۵۲۰۲۷۳۷۰۹

مثال: تابع بودن یا نبودن هر کدام از مجموعه های زیر را مشخص کنید.

$$f = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$$

$$g = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$$

$$h = \{(2,3)\}$$

$$r = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$$

$$I = \{(2,3), (3,2)\}$$

$$m = \{(5,5)\}$$



مثال: کدام یک از روابط زیر نشان دهنده ی یک تابع است.
الف) رابطه ای که به هر شخص، طول قد او را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر شخص، برادرهای او را نسبت می دهد.

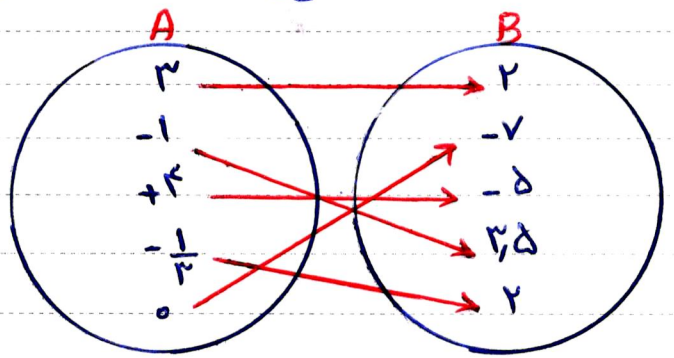
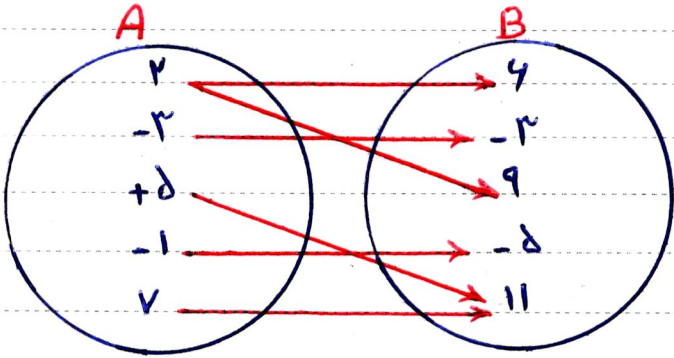
ج) رابطه ای که به هر شخص، کتابهای مورد علاقه ای او را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به هر شخص، گروه خون او را نسبت می دهد.

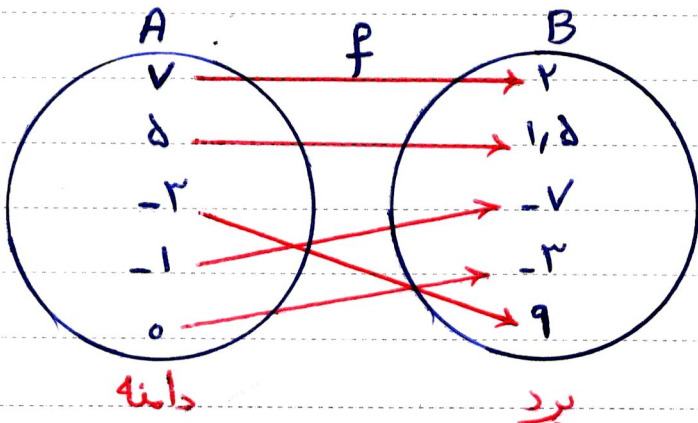
ه) رابطه ای که به هر شخص، درسهای مورد علاقه ای او را نسبت می دهد.

و) رابطه ای که به هر شخص، کلاس او را نسبت می دهد.

مثال: کدام یک از رابطه های زیر نشان دهنده یک تابع نیست؟ چرا؟



مثال: در رابطه های مقابل که نشان دهنده یک تابع است، دامنه و برد آن را مشخص کنید و سپس نمودار زوج مرتبی آن را بنویسید.

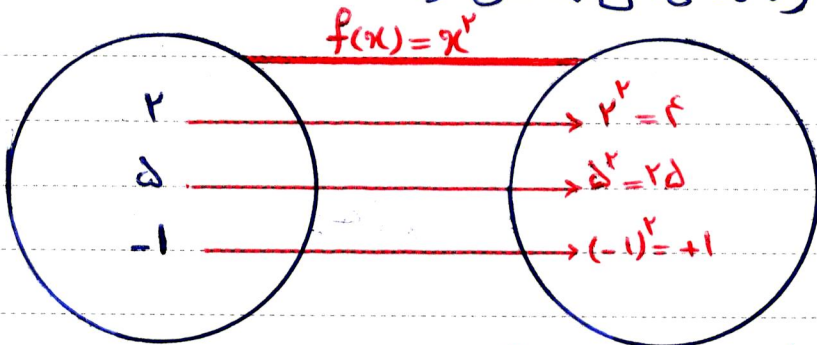


$$D_f = \{7, 5, -3, -1, 0\}$$

$$R_f = \{2, 1.5, -7, -3, 9\}$$

$$f = \{(7, 2), (5, 1.5), (-3, 9), (-1, -7), (0, 3)\}$$

مثال: برد تابع مقابل را با توجه به رابطه و دامنه ی آن مشخص کنید.



بنابراین برد تابع f عبارتست از $R_f = \{4, 25, 1\}$



مثال: اگر $f(x) = -3x + 4$ و $D_f = \{-2, +1, 0\}$ باشد، R_f را مشخص کنید.

$$\begin{matrix} -2 \\ +1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$f(x) = -3x + 4$$

$$\begin{aligned} -3 \times (-2) + 4 &= +6 + 4 = +10 \\ -3 \times (+1) + 4 &= -3 + 4 = +1 \\ -3 \times (0) + 4 &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

$$R_f = \{+10, +1, +4\}$$

مثال: برد هر کدام از توابع زیر را با توجه به دامنه و ضابطه ی آن مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$A = \{-3, +5, 0\}$$

$$\Rightarrow R_f = \{(-3)^2 + 1, (+5)^2 + 1, 0^2 + 1\} = \{+10, +26, +1\}$$



$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$A = \{1, 3, 0\}$$

$$\Rightarrow R_f = \{\sqrt{1+1}, \sqrt{3+1}, \sqrt{0+1}\} = \{2, \sqrt{2}, 1\}$$

نکته: فرم کلی هر تابع خطی به صورت $f(x) = mx + h$ می باشد

مثال: توابع زیر خطی هستند.

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(x) = -3x + 1$$

$$f(x) = -7x$$

$$f(x) = -2$$

نکته: برای رسم هر تابع خطی، ابتدا دو نقطه از تابع را در صفتهای مختلفات مشخص می کنیم و سپس آن دو نقطه را با خط کشی بهم وصل می کنیم.

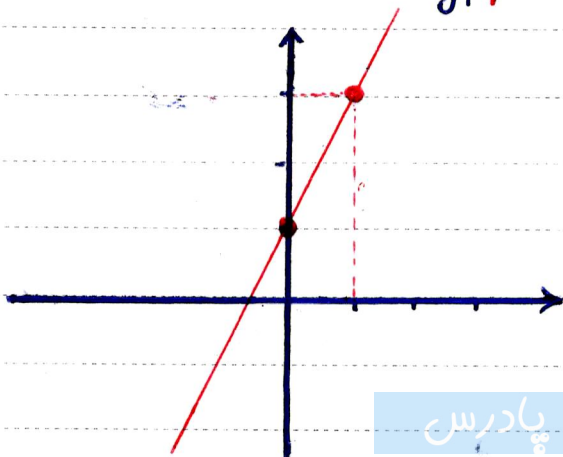
مثال: خطوط زیر را رسم کنید.

$$y = 2x + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = +1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

x	0	1
y	1	3

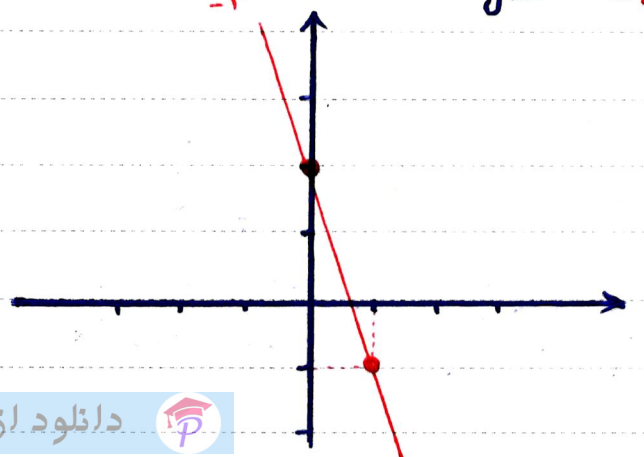


$$y = -3x + 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \cdot 0 + 2 = +2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -3 \cdot 1 + 2 = -1$$

x	0	1
y	2	-1



مثال هفتم: یک تابع خطی از نقاط $(1, 5)$ و $(-1, 1)$ عبور می کند. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = mx + h \quad (1, 5) \Rightarrow 5 = m \times 1 + h \quad (1)$$

$$f(x) = mx + h \quad (-1, 1) \Rightarrow 1 = m \times (-1) + h \quad (2)$$

اکنون با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} m + h = 5 \\ -m + h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &2h = 4 \\ &h = \frac{4}{2} = 2 \\ &m + 2 = 5 \\ &m = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$f(x) = 3x + 2$$



مثال هشتم: در یک تابع خطی $f(1) = -1$ و $f(4) = 8$ می باشد.

الف) ضابطه این تابع را مشخص کنید.

ب) $f(-3)$ را مشخص کنید.

جواب: وقتی $f(1) = -1$ می باشد یعنی آنرا به جای x عدد ۱ قرار دهیم، عدد -۱ بدست می آید.

$$f(x) = mx + h \Rightarrow -1 = m \times 1 + h \Rightarrow m + h = -1 \quad (1)$$

وقتی $f(4) = 8$ می باشد یعنی آنرا به جای x عدد ۴ قرار دهیم، عدد ۸ بدست می آید.

$$f(x) = mx + h \Rightarrow 8 = m \times 4 + h \Rightarrow 4m + h = 8 \quad (2)$$

اکنون با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} m + h = -1 \\ 4m + h = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &3m = 9 \\ &m = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

$$m = 3$$

$$m + h = -1$$

$$3 + h = -1$$

$$h = -1 - 3 = -4$$

بنابراین تابع $f(x) = mx + h$ به صورت $f(x) = 3x - 4$ می باشد که:

$$f(-3) = 3 \times (-3) - 4 = -9 - 4 = -13$$



دانلود از اپلیکیشن

نکته ی مهم: فرم کلی یک تابع درجه ی دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد که در آن $a \neq 0$ می باشد.

بنابراین هر تابع درجه ی دوم به صورت \cup یا \cap می باشد که به آن **اسهمی** می گویند.

نکته ی مهم: اگر در معادله ی سهمی $a > 0$ باشد، شکل آن به صورت \cup می باشد.

نکته ی مهم: اگر در معادله ی سهمی $a < 0$ باشد، شکل آن به صورت \cap می باشد.

برای رسم هر معادله ی درجه دوم، به این صورت عمل می کنیم.

الف) ابتدا نقطه ی $(-\frac{\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a})$ را که به آن **رأس سهمی** گفته می شود مشخص می کنیم.

ب) اگر $a > 0$ باشد نمودار را به صورت \cup و اگر $a < 0$ باشد، نمودار را به صورت \cap رسم می کنیم. **رأس سهمی**

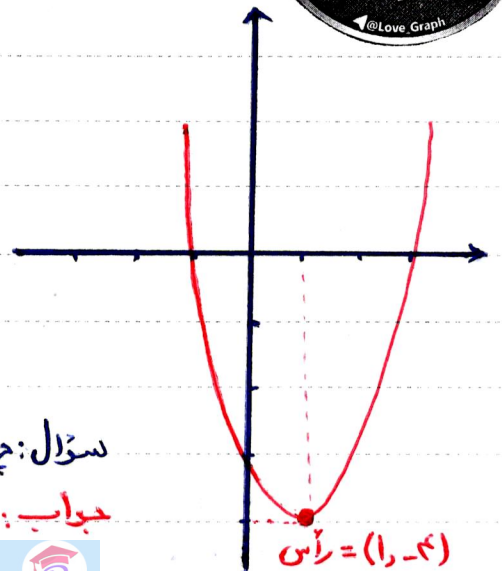
مثال: نمودار تابع درجه ی دوم $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید.

$y = 1x^2 - 2x - 3$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$

$\text{رأس سهمی} = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (1, -4)$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$ $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16)}{4 \times 1} = \frac{-16}{4} = -4$



سؤال: چرا نمودار رو به بالا و به شکل \cup رسم شد؟
 جواب: زیرا $a > 0$ می باشد.

مثال: نمودار سهمی $y = -x^2 + 2x - 2$ را رسم کنید.

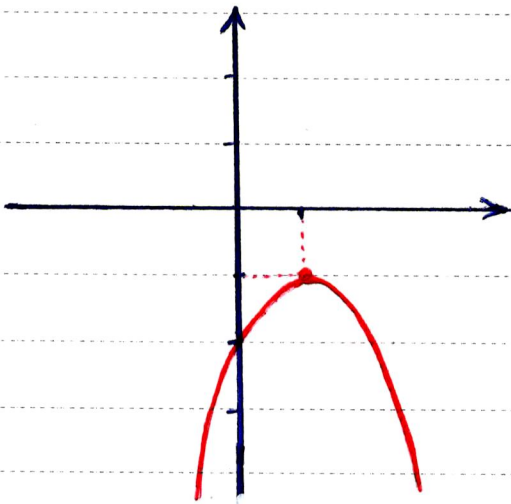
$$y = -x^2 + 2x - 2$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = +2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (+2)^2 - 4(-1)(-2) = +4 - 8 = -4$$

$$\text{رأس سهمی} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = (+1, -1)$$

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= \frac{-(+2)}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = +1 \\ \frac{-\Delta}{4a} &= \frac{-(-4)}{4 \times (-1)} = \frac{+4}{-4} = -1 \end{aligned}$$

بنابراین ابتدا نقطه $(+1, -1)$ را که رأس سهمی است مشخص می‌کنیم، سپس با توجه به این که $a = -1 < 0$ می‌باشد، شکل آن را به صورت \cap رسم می‌کنیم.



$$y = -x^2 + 1$$

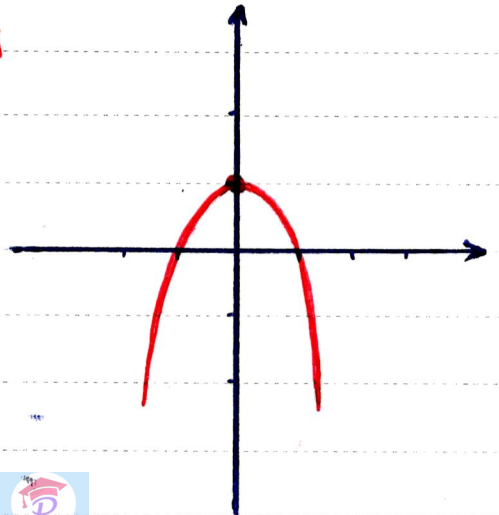
مثال: نمودار تابع $y = -x^2 + 1$ را رسم کنید.

$$a = -1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(-1)(+1) = 0 + 4 = +4$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = +1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= \frac{-0}{2 \times (-1)} = \frac{0}{-2} = 0 \\ \frac{-\Delta}{4a} &= \frac{-(+4)}{4 \times (-1)} = \frac{-4}{-4} = +1 \end{aligned}$$

$$\text{رأس سهمی} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = (0, +1)$$



نمونه سوالات امتحانی

۱. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g = \{(0, -1), (3, 4), (-1, 5), (2, 8)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$D_g =$$

$$R_g =$$

$$f(15) =$$

$$g(3) \times f(1) =$$

$$f(g(2)) =$$

$$g(f(1)) =$$



۲. مقدار a و b را چنان تعیین کنید که رابطه معادل یک تابع باشد

$$f = \{(2, -2), (-4, a+b), (2, a-b), (-4, 7)\}$$

۳. نمودار سهمی $y = x^2 + 2x$ را رسم کنید.

الف) مقدار m را چنان بیابید که حاصل جمع ریشه های معادله ی مقابل ۳ باشد. $m x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = m$ حاصل جمع ریشه ها = ۳
 $b = -2$ $-\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{-(-2)}{m} = 3 \Rightarrow \frac{2}{m} = 3 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$
 $c = +1$

ب) مقدار k چقدر باشد تا حاصل ضرب ریشه های $4x^2 - 12x + (k+1) = 0$ برابر ۱ باشد.

$a = 4$ حاصل ضرب ریشه ها = ۲
 $b = -12$ $\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \frac{k+1}{4} = 2 \Rightarrow k+1 = 8$
 $c = k+1$ $\Rightarrow k = 8 - 1 = 7$

۵) مقدار m و n را چنان تعیین کنید که رابطه ی مقابل بیاثر یک تابع باشد.

$f = \{(4, 2m-1), (m, 4), (4, 9), (5, 4n+2)\}$

جواب: بی دانی که مجموعه ای از زوج مرتب ها، هنگامی نشان دهنده ی یک تابع هستند که مؤلفه های اول هیچ کدام از آنها مثل هم نباشند ولی اگر مؤلفه های اول آنها با هم برابر بودند، مؤلفه های دوم نیز با هم برابر باشند.

مؤلفه های اول برابرند
 $(4, 2m-1), (4, 9) \Rightarrow 2m-1 = 9$
 $2m = 9 + 1 = 10$
 $m = \frac{10}{2} = 5$

باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند



اکنون اگر در رابطه ی f به جای m عدد ۵ قرار دهیم، با صورت تبدیل می شود.

مؤلفه های اول برابرند
 $f = \{(4, 9), (5, 4), (4, 9), (5, 4n+2)\}$ $\Rightarrow 4n+2 = 4$
 $4n = 4 - 2 = 2$
 $n = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

باید مؤلفه های دوم برابر باشند

$f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$
 $A = \{0, -1, 15\}$

۶) برد تابع مقابل را با توجه به منایطه و دامنه ی آن مشخص کنید

$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \\ f(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0 \\ f(15) = \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4 \end{cases} \Rightarrow B = \{1, 0, 4\}$

درواقع مجموعه ی A دامنه و مجموعه ی B برد تابع می باشد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

صفحه

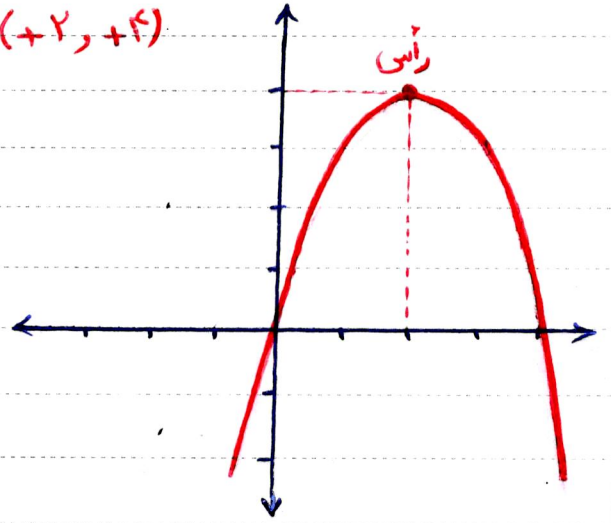
۴ سهمی $y = -x^2 + 4x + 0$ را رسم کنید.

$\begin{cases} a = -1 \\ b = +4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ رأس سهمی $= \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = (+2, +4)$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-(+4)}{2 \times (-1)} = \frac{-4}{-2} = +2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (+4)^2 - 4(-1) \times 0 = +16 - 0 = +16$

$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(+16)}{4 \times (-1)} = \frac{-16}{-4} = +4$



نکته: $a < 0$ می باشد پس نمودار رو به پایین رسم شد.

Δ اگر مجموعه ای $\{ (1, a - 4b), (3, 4), (1, 5), (3, b - a) \}$ یک تابع باشد حاصل a, b را بدست آورید.

$(1, a - 4b) = (1, 5) \Rightarrow \begin{cases} a - 4b = 5 \\ b - a = 4 \\ -3b = 9 \\ b = \frac{9}{-3} = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} a - 4b = 5 \\ a - 4(-3) = 5 \\ a + 12 = 5 \\ a = 5 - 12 = -7 \end{cases}$

$a \cdot b = -7 \times (-3) = +21$



سؤال: اگر $f(x) = 10x - 11$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ باشد حاصل $f(0) + 5g(1)$ چند است؟

$f(0) = 10 \times 0 - 11 = -11 = +1$

$f(0) + 5g(1) = +1 + 5 \times 2 = +1 + 10 = +11$

$g(1) = \sqrt{1^2 + 3 \times 1} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

الف) ۱۰

ب) ۱۱

ج) ۷-

د) ۱۰-

سؤال: در جای خالی کدام عدد را قرار دهیم قاربطه f به یک تابع تبدیل شود؟

$f = \{ (-3, 2), (\dots, 4), (+2, -4), (0, -3) \}$

الف) ۲+ ج) ۳-

ب) ۰ د) ۴-

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲