پیشامدهای مستقل و وابسته :

دو پیشامد مستقل از هم هستند هرگاه هیچ تأثیری روی یکدیگر نداشته باشند. به عبارت دیگر A مستقل از B است هرگاه آگاهی از وقوع B در احتمال رخ دادن A بی تأثیر باشد یعنی $P(A|B)=P(A)$ ، همچنین وقوع A نیز روی B تأثیری نداشته باشد یعنی $P(B|A)=P(B)$ باشد. در غیر این صورت دو پیشامد وابسته اند.

به طور مثال جنسیت فرزند اول یک خانواده تأثیری در جنسیت فرزند دوم آن ندارد، اگر فرزند اول پسر باشد، فرزند دوم ممکن است پسر یا دختر باشد لذا جنسیت فرزند اول و جنسیت فرزند دوم دو پیشامد مستقلند.

مثال: یک تاس را دو مرتبه به طور پی در پی پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۵ در مرتبه ی اول و B پیشامد آن که حاصلضرب دو عدد ظاهر شده ۱۰ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$A=\{(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶)\} \Rightarrow n(A)=۶ \xrightarrow{n(S)=۳۶} P(A)=\frac{۱}{۶}$

$B=\{(۲,۵),(۵,۲)\} \Rightarrow n(B)=۲ \xrightarrow{n(S)=۳۶} P(B)=\frac{۱}{۱۸}$

$A\cap B=\{(۵,۲)\} \Rightarrow n(A\cap B)=۱ \xrightarrow{n(S)=۳۶} P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$

$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳۶}}{\frac{۱}{۱۸}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(A|B)\neq P(A) \Rightarrow$ A و B وابسته اند

نکته مهم : دو پیشامد A و B مستقلند اگر و تنها اگر $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

مثال : اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $A=\{a,b\}$ و $B=\{b,c\}$ ، آیا دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند؟

$P(A)=\frac{۱}{۲}$, $P(B)=\frac{۱}{۲}$ و $A\cap B=\{b\} \longrightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow$ A و B مستقلند

مثال : احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ٪۹۰ و احتمال قبولی ریحانه در این درس ٪۷۰ است.

الف) احتمال اینکه هردو در این درس قبول شوند چقدر است؟

قبول شدن هرکدام مستقل از دیگری است. اگر پیشامد قبولی زهرا را با Z و ریحانه را با R نمایش دهیم، آنگاه احتمال قبول شدن هردو همان $P(Z\cap R)$ است :

$P(Z\cap R)=P(Z)\times P(R)=\frac{۹۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=۰/۶۳$

ب) با چه احتمالی حداقل یکی از آنها در این درس قبول می‌شوند؟

احتمال قبولی حداقل یکی از آنها همان $P(Z\cup R)$ است:

$$P(Z\cup R)=P(Z)+P(R)-P(Z\cap R)=\frac{90}{100}+\frac{70}{100}-\frac{63}{3}=0.97$$

مثال: یک سکه و یک تاس را به طور هم زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد. آیا دو پیشامد A و B مستقلند؟

$$S=\{(\text{ر},1),(\text{ر},2),(\text{ر},3),(\text{ر},4),(\text{ر},5),(\text{ر},6),(\text{پ},1),(\text{پ},2),(\text{پ},3),(\text{پ},4),(\text{پ},5),(\text{پ},6)\}$$

$$A=\{(\text{ر},6),(\text{پ},6)\}\Longrightarrow P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$B=\{(\text{ر},1),(\text{ر},2),(\text{ر},3),(\text{ر},4),(\text{ر},5),(\text{ر},6)\}\Rightarrow P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$A\cap B=\{(\text{ر},6)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\longrightarrow$ A, B مستقلند

مثال: در پرتاب یک تاس، A پیشامد رو آمدن عدد زوج و B پیشامد رو آمدن عدد اول است. آیا دو پیشامد A و B مستقلند؟

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}\Rightarrow n(S)=6$$

$A=\{2,4,6\}\Rightarrow n(A)=3\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$ و $B=\{2,3,5\}\Rightarrow n(B)=3\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\{2\}\Rightarrow n(A\cap B)=1\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}\Longrightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)\Rightarrow$ A و B وابسته‌اند

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A\cap B)=0.1$ و $P(A\cap B')=0.4$، حاصل $P(A\cup B')$ را به دست آورید.

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.4=P(A)-0.1\Rightarrow P(A)=0.5$$

مستقلند $A,B\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow 0.1=0.5\times P(B)\Rightarrow P(B)=0.2\Rightarrow P(B')=1-0.2=0.8$

$$\Longrightarrow P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=0.5+0.8-0.4=0.9$$

تست (سراسری ۹۱) : دو پیشامد A و B مستقل و $P(A-B)=\frac{1}{3}$ و $P(B-A)=\frac{1}{6}$ هستند. $P(A\cup B)$ کدام است؟

$\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{6}$ $\qquad$ 1

می‌گیریم $P(A\cap B)=x$ پس :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{1}{3}=P(A)-x \Rightarrow P(A)=x+\frac{1}{3}$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{1}{6}=P(B)-x \Rightarrow P(B)=x+\frac{1}{6}$$

A و B مستقلند $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow x=(x+\frac{1}{3})(x+\frac{1}{6}) \Rightarrow 18x^2-9x+1=0$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{3} \quad , \quad x=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=x+\frac{1}{3}+x+\frac{1}{6}-x=x+\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{3} \longrightarrow P(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

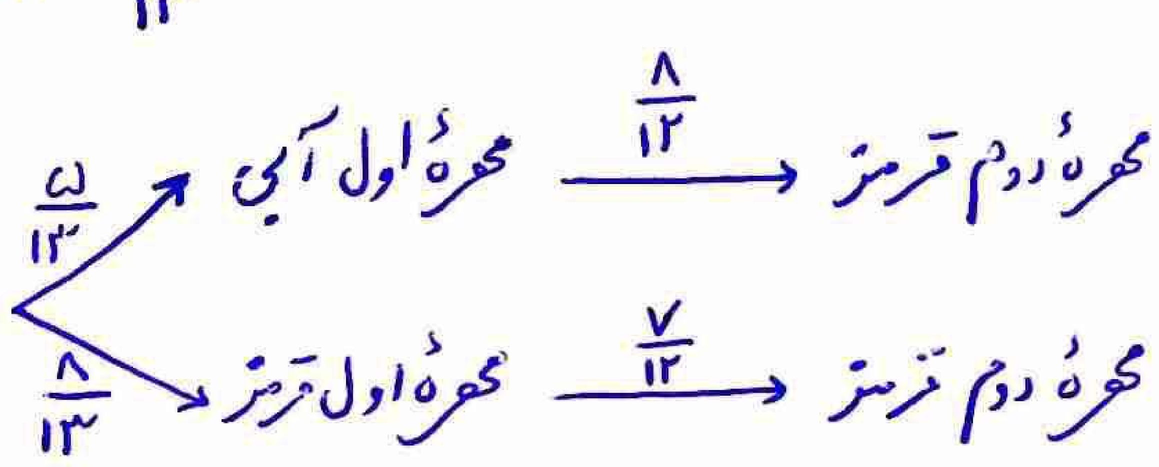
$$x=\frac{1}{6} \longrightarrow P(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

بین گزینه‌ها، گزینهٔ ۱ صحیح است.

مثال : از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است، دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهرهٔ اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد،

الف) احتمال رخداد پیشامدهای A و B را حساب کنید.

$P(A)=\frac{5}{13}$



$$\Rightarrow P(B)=\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}+\frac{8}{13}\times\frac{7}{12}=\frac{8}{13}$$

ب) احتمال اینکه هردو پیشامد رخ دهند را حساب کنید.

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}=\frac{10}{39}$$

پ) پیشامدهای A , B مستقلند یا وابسته؟

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B) \Longrightarrow$ A و B وابسته‌اند

نکته : در حالت کلی انتخاب هایی که با جایگذاری انجام می‌شوند، مستقل هستند

مثال: ظرفی شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. دو مهره پی در پی و با جایگذاری بیرون می‌آوریم.

مطلوبست احتمال آن که:

الف) مهرهٔ اول سفید و مهرهٔ دوم سیاه باشد.

$P(\text{اول سفید} \cap \text{دومی سیاه}) = P(\text{اول سفید}) \times P(\text{دومی سیاه}) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۶}{۲۵}$

ب) هر دو مهره سفید باشند.

$P(\text{اول سفید} \cap \text{دومی سفید}) = P(\text{اول سفید}) \times P(\text{دومی سفید}) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۲۵}$

مثال: مسئلهٔ مثال قبل را در حالت بدون جایگذاری حل کنید.

الف) $P(\text{اول سفید} \cap \text{دومی سیاه}) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۱۰}$

وقتی در مرحلهٔ اول یک مهرهٔ سفید برداشته شود تعداد مهره‌ها ۱ سفید و ۳ سیاه خواهد شد.

ب) $P(\text{اول سفید} \cap \text{دومی سفید}) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۰}$

تعمیم: سه پیشامد A، B و C را مستقل گوییم هرگاه دو به دو مستقل بوده و احتمال رخداد هر سه برابر با ضرب احتمال رخداد تک تک آنها باشد؛ به عبارت دیگر: $P(A\cap B\cap C) = P(A).P(B).P(C)$

به همین ترتیب می‌توان آن را برای n پیشامد تعمیم داد.

مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه و $A=\{a,b\}$ و $B=\{b,c\}$ و $C=\{b,d\}$، آنگاه تعیین کنید، کدام یک از پیشامدها مستقل از هم هستند؟ آیا می‌توان گفت هر سه پیشامد مستقل از یکدیگرند؟

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{۲}$

$A\cap B = \{b\} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{۴} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \Rightarrow$ A, B مستقل از یکدیگرند

$A\cap C = \{b\} \Rightarrow P(A\cap C) = \frac{1}{۴} \Rightarrow P(A\cap C) = P(A)\times P(C) \Rightarrow$ A, C مستقل از یکدیگرند

$B\cap C = \{b\} \Rightarrow P(B\cap C) = \frac{1}{۴} \Rightarrow P(B\cap C) = P(B)\times P(C) \Rightarrow$ B, C مستقل از یکدیگرند

$A\cap B\cap C = \{b\} \Rightarrow P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{۴} \Rightarrow P(A\cap B\cap C) \neq P(A)\times P(B)\times P(C) \Rightarrow$ A, B, C وابسته‌اند

مثال: خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. مطلوبست احتمال اینکه:

الف) ۴ فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان داریم:

$$P(\text{د، د، د، د}) = P(\text{د}) \times P(\text{د}) \times P(\text{د}) \times P(\text{د}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

ب) فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند.

$$P(\text{د، پ، پ، د}) = P(\text{د}) \times P(\text{پ}) \times P(\text{پ}) \times P(\text{د}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

پ) فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند.

در مورد دیگر فرزندان صحبتی نشده است پس بدون توجه به آنها احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{د، د}) = P(\text{د}) \times P(\text{د}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ت) دو فرزند این خانواده دختر باشند.

وجود دو دختر در این خانواده، به $6 = \binom{4}{2}$ حالت میسّر است. به طور مثال پ، پ، د، د یا به صورت پ، د، پ، د یا ... که همه دارای احتمال‌های یکسان هستند، لذا احتمال یکی را حساب کرده و در ۶ ضرب می‌کنیم:

$$P(\text{د، د، پ، پ}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\Longrightarrow P(\text{دو فرزند این خانواده دختر باشند}) = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

ث) فرزندان یکی در میان دختر و پسر باشند.

$$P(\text{د، پ، د، پ}) + P(\text{پ، د، پ، د}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ج) حداقل یکی از فرزندان دختر باشد.

$$P(\text{حداقل یک دختر}) = 1 - P(\text{پ، پ، پ، پ}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{16}$$

چ) حداکثر یکی از فرزندان دختر باشد.

$$P(\text{فقط یک دختر}) + P(\text{هیچ دختر}) = 4 \times P(\text{د، پ، پ، پ}) + P(\text{پ، پ، پ، پ})$$
$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

نکتهٔ مهم: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه هرکدام مستقل از متمم دیگری خواهد بود. به عبارت دیگر A و B′ مستقل، B و A′ نیز مستقل می‌باشند.

اثبات: کافیست با فرض $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ نشان دهیم $P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$:

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\times P(B)=P(A)\left(1-P(B)\right)=P(A)\times P(B')$$

نتیجهٔ مهم: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A′ و B′ نیز مستقلند.

اثبات: طبق نکته‌ی قبل هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه هرکدام با متمم دیگری مستقل است بنابراین:

A,B مستقل $\Rightarrow$ A,B′ مستقل $\Rightarrow$ B′ هم با متمم A یعنی A′ مستقل است

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.7$ مطلوبست $P(A\cup B')$.

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=0.2\times(1-0.7)=0.06$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=0.2+(1-0.7)-0.06=0.54$$

مثال: احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود ۰٫۵ و احتمال اینکه در آزمون رانندگی قبول شود ۰٫۶ است.

الف) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود و در رانندگی قبول نشود چقدر است؟

پیشامد قبولی در کنکور را با K و پیشامد قبولی در آزمون رانندگی را با R نمایش می‌دهیم بنابراین:

$$P(K\cap R')=P(K)\times P(R')=0.5\times(1-0.6)=0.2$$

ب) احتمال اینکه فقط در یکی قبول شود چقدر است؟

$$P(K\cap R')+P(K'\cap R)=P(K)\times P(R')+P(K')\times P(R)$$

$$=0.5\times(1-0.6)+(1-0.5)\times 0.6=0.2+0.3=0.5$$

پ) احتمال اینکه حداقل در یکی قبول شود چقدر است؟

$$P(K\cup R)=P(K)+P(R)-P(K\cap R)=0.5+0.6-0.5\times 0.6=0.8$$

مسائل پایانی :

۱- سه تاس پرتاب می کنیم با چه احتمالی فقط تاس دوم ۶ می آید؟

$$P(\text{فقط تاس دوم ۶ بیاید}) = P(\text{تاس اول ۶ نیاید}) \times P(\text{تاس دوم ۶ بیاید}) \times P(\text{تاس سوم ۶ نیاید})$$

$$= \left(1-\frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$$

۲- در پرتاب ۵ سکه با چه احتمالی فقط دو سکه رو می آید؟

قرار گرفتن دو رو در پرتاب ۵ سکه به $\binom{5}{2}=10$ حالت امکان پذیر است. که همگی دارای احتمال های یکسانی هستند به طور مثال:

$$P(\text{ر، ر، پ، پ، پ}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow P(\text{فقط دو رو}) = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

۳- سه دستگاه مستقل از یکدیگر به ترتیب با احتمال های $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{6}$ کار می کنند. با چه احتمالی دست کم یکی از دستگاه ها کار می کنند؟

دستگاه ها را به ترتیب A، B و C می نامیم بنابراین:

$$P(A)=\frac{3}{4} \quad , \quad P(B)=\frac{4}{5} \quad \text{و} \quad P(C)=\frac{5}{6}$$

$$P(\text{دست کم یکی کار کنند}) = P(A\cup B\cup C) = 1 - P((A\cup B\cup C)')$$

$$= 1 - P(A'\cap B'\cap C')$$

$$= 1 - P(A')\times P(B')\times P(C')$$

$$= 1 - \left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{5}{6}\right) = \frac{119}{120}$$

۴- احتمال آنکه احسان، بهرام و سلمان بتوانند یک پرتاب را از پشت منطقه‌ی ۳ امتیازی در بسکتبال تبدیل به گل کنند به ترتیب برابر ۰٫۳، ۰٫۲ و ۰٫۵ است. با چه احتمالی فقط یکی از آنها پرتاب خود را گل می کنند؟

پیشامدهای گل شدن توپ توسط سه نفر مستقل از هم هستند. اگر احتمال گل کردن احسان، بهرام و سلمان را به ترتیب $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.2$ و $P(C)=0.5$ در نظر بگیریم، داریم:

$$P(\text{فقط یکی گل کنند}) = P(A\cap B'\cap C') + P(A'\cap B\cap C') + P(A'\cap B'\cap C)$$

$$= 0.3\times(1-0.2)(1-0.5) + (1-0.3)\times 0.2\times(1-0.5) + (1-0.3)\times(1-0.2)\times 0.5 = 0.47$$

۵ - یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر «رو» بیاید آنگاه تاس می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم، با کدام احتمال حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ است؟ (سراسری ۹۴)

حالت اول: بار اول سکه رو بیاید ($\frac{1}{2}$) و تاس مضرب ۳ یعنی ۳ یا ۶ بیاید ($\frac{2}{6}$) ، احتمال آن $\frac{1}{6}$ است. $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

حالت دوم: سکه اول پشت ($\frac{1}{2}$)، سکه دوم رو ($\frac{1}{2}$) و تاس مضرب ۳ ($\frac{2}{6}$) $\Leftarrow$ $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$

حالت سوم: سکه‌ها اول و دوم پشت ($\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$)، سکه سوم رو ($\frac{1}{2}$) و تاس مضرب ۳ ($\frac{2}{6}$) $\Leftarrow$ $P_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{24}$

$$\Longrightarrow P=P_1+P_2+P_3=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$$

۶ - در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آنها معیوب هستند. به تصادف و متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ‌ها سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟ (سراسری ۹۵)

چون لامپ معیوب در سومین بار بیرون آمده یعنی در دو بار قبلی سالم و بار سوم معیوب است بنابراین:

$P=$ اول سالم $\times$ دوم سالم $\times$ سوم معیوب $=\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{28}$

۷ - اگر دو پیشامد A و B چهار عضوی و اشتراک این دو، ۲ عضوی باشد و بدانیم A و B مستقلند، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

گیریم فضای نمونه‌ای دارای n عضو باشد بنابراین: $P(A)=P(B)=\frac{4}{n}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{n}$

مستقلند $A,B \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow \frac{2}{n}=\frac{4}{n}\times\frac{4}{n} \Rightarrow 1=\frac{8}{n} \Rightarrow n=8$

۹ - دو شخص A و B به ترتیب هریک ۲ سکه پرتاب می‌کنند. اولین شخصی که در پرتاب دو سکه هر دو را رو ظاهر کند، برنده است. چقدر احتمال دارد B برنده شود؟

اگر A هر دو سکه را رو بیاورد برنده است و نوبت به B نمی‌رسه، برای اینکه B برنده شود، A نباید هر دو سکه را رو بیاورد و B باید هر دو را رو بیاورد. بنابراین:

$P=$ احتمال اینکه A هر دو رو نیاورد $\times$ احتمال اینکه B هر دو رو آورد $=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

۱۰- در تاس ناهمگن احتمال آمدن هر عدد زوج سه برابر عدد فرد است. و در سکه‌ای ناهمگن احتمال آمدن رو دو برابر پشت است. تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم اگر ۵ بیاید سکه را یک بار به هوا می‌اندازیم، در غیر این صورت سکه را دو بار به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال مشاهده‌ی رو در این آزمایش چقدر است؟

$P(1)=P(3)=P(5)=x$

$P(2)=P(4)=P(6)=3x$

$$\xrightarrow{P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1} 12x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{12} \Rightarrow P(5)=\frac{1}{12}$$

$P(\text{پ})=y$ و $P(\text{ر})=2y$ $\xrightarrow{P(\text{پ})+P(\text{ر})=1} 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \Rightarrow P(\text{ر})=\frac{2}{3}$ و $P(\text{پ})=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{12}$ تاس عدد ۵ بیاید $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ سکه رو بیاید

$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ تاس عدد ۵ نیاید $\xrightarrow{1-\frac{1}{9}}$ سکه رو بیاید

$P(\text{حداقل یک رو})=1-P(\text{هر دو پشت})=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{12}\times\frac{2}{3}+\frac{11}{12}\times\frac{8}{9}=\frac{47}{54}$$ جواب

۱۱- چند پیشامد مانند B مستقل از پیشامد ۱۲ عضوی A در پرتاب دو تاس وجود دارد به طوری که $A\cap B=\{(6,6)\}$ باشد؟

$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$ $\xrightarrow{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$ $\frac{1}{36}=\frac{1}{3}\times P(B) \Rightarrow P(B)=\frac{3}{36}$

یعنی پیشامد B سه عضوی است و یک عضو آن (۶و۶) می‌باشد. پس دو عضو دیگر آن نباید در A باشند یعنی باید از $36-12=24$ عضو دیگر انتخاب شوند که تعداد حالات آن $\binom{24}{2}=276$ است.

۱۲- نشان دهید اگر دو پیشامد A و B مستقل و ناسازگار باشند، حداقل یکی از آن‌ها تهی است.

مستقلند $A,B \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ناسازگارند $A,B \Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0$

$\Rightarrow P(A)\times P(B)=0$

$$\Longrightarrow P(A)=0 \ \vee\ P(B)=0 \ \longrightarrow A=\varnothing \ \vee\ B=\varnothing$$