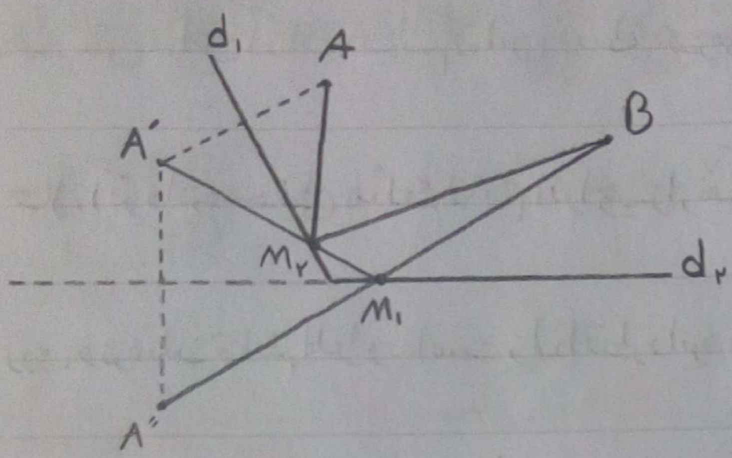
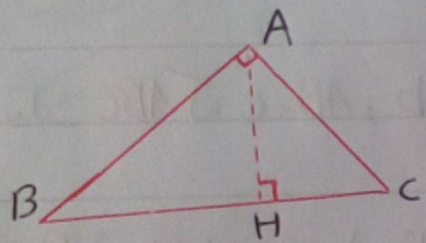
Subject: Year: Month: Date: / /



فصل سوم روابط طولی در مثلث

یادآوری: روابط طولی در مثلث قائم الزاویه که پارسال با آن ها آشنا شده ایم عبارتند از:



۱) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

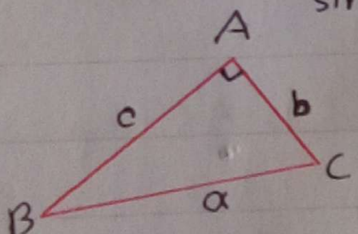
۲) $AB^2 = BC.BH$

۳) $AC^2 = BC.CH$

۴) $AH^2 = BH.CH$

۵) $AH.BC = AB.AC$

قضیه: در مثلث قائم الزاویه زیر ثابت کنید $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



اثبات) $\sin B = \frac{b}{a} \longrightarrow \frac{b}{\sin B} = a$ ①

$\sin C = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{c}{\sin C} = a$ ②

$\sin A = \sin 90 = 1 \longrightarrow \frac{a}{\sin A} = a$ ③

$\xrightarrow{①,②,③} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

یادآوری: در هندسه دهم ثابت کردیم که عمود منصف های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرسند.

Data Max

همچنین در این کتاب دیدیم که این نقطهٔ همرسی مرکز دایره محیطی مثلث است.

حال اگر دایره محیطی مثلث قائم الزاویه را رسم کنیم مشاهده می کنیم مرکز این دایره در روی وتر مثلث قائم الزاویه است و لذا قطر دایره برابر است با وتر مثلث.

نتیجه: با توجه به مطالب بالا (در مثلث قائم الزاویه) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

قضیه سینوس ها: می خواهیم رابطهٔ فوق را برای هر مثلث دلخواهی اثبات کنیم.

در هر مثلث ABC که $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ داریم: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

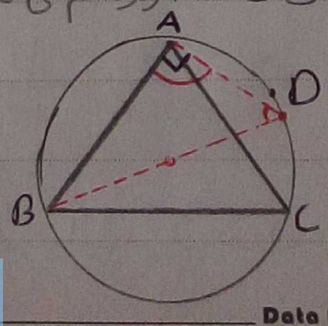
که در آن R شعاع دایره محیطی مثلث $A\hat{B}C$ است.

اثبات) مثلث ABC را در حالتهای مختلف زیر بررسی می کنیم:

حالت اول: $A = 90$ (رابطه فوق برای این حالت اثبات شده است)

حالت دوم: $A < 90$ دایرهٔ محیطی

مثلث ABC را رسم می کنیم. سپس قطر BD را مطابق شکل رسم کرده و D را به A وصل می کنیم.



$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ محاطی , $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ $\Longrightarrow \hat{D} = \hat{C}$ ①

$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{180}{2} = 90$ محاطی $\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{A\hat{B}D}$ قائم الزاویه

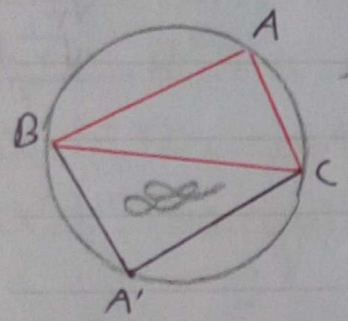
$\overset{\triangle}{ABD}$ قائم‌الزاویه $\Longrightarrow \sin D = \frac{AB}{BD} \xrightarrow[BD=2R]{AB=c} \sin D = \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$

به طریق مشابه با رسم قطرهای AD' و CD'' ثابت می‌شود که

$\frac{a}{\sin A} = 2R$

$\frac{b}{\sin B} = 2R$

قضیه سینوس‌ها $(A>90)$: در هر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ثابت کنید $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



A' نقطه‌ای دلخواه روی دایره در نظر می‌گیریم

زاویه‌ی محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BA'C}}{2}$

زاویه محاطی $\hat{A'} = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2}$

$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{A'} = \frac{\overset{\frown}{BA'C} + \overset{\frown}{BAC}}{2} = \frac{360}{2} = 180 \longrightarrow A + A' = \pi$

پس A و A' مکمل هم هستند، و چون $A>90$ لذا $A'<90$.

$A = \pi - A'$ ①

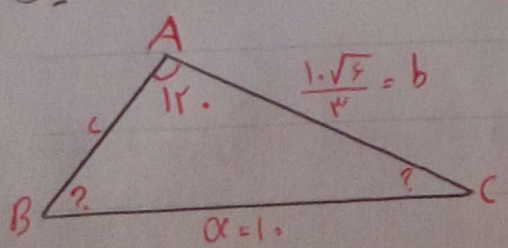
$\xrightarrow{①} \sin A = \sin(\pi - A') = \sin A' \Longrightarrow \sin A = \sin A' \xrightarrow{A'<90} \frac{a}{\sin A'} = 2R \xrightarrow{\sin A' = \sin A}$

$\longrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$

به طریق مشابه $\frac{b}{\sin B} = 2R$ و $\frac{c}{\sin C} = 2R$ و بنابراین:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

مثال: در مثلث ABC، $BC = 10$، $\hat{A} = 120$، $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازهٔ زاویه‌های B و C را بدست آورید.



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \longrightarrow \frac{10}{\sin 120}=2R \longrightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \longrightarrow \frac{20}{\sqrt{3}}=2R$$

$\longrightarrow R=\frac{10}{\sqrt{3}}$ شعاع

$$\frac{b}{\sin B}=2R \longrightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B}=\frac{20}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{20}{\sqrt{3}}\cdot\sin B=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

$$\longrightarrow \sin B=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{18}}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{6}\longrightarrow B=45 \qquad A+B+C=180 \longrightarrow \hat{C}=15$$

$$\frac{c}{\sin C}=2R \longrightarrow \frac{c}{\sin 15}=\frac{20}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \frac{c}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{20}{\sqrt{3}} \Longrightarrow c=AB=\frac{20}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} ✓$$

$$\sin 120=\sin(\pi-60)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 15=\sin(\underbrace{45-30}_{\alpha-\beta})=\sin\alpha.\cos\beta-\sin\beta.\cos\alpha=\sin 45.\cos 30-\sin 30$$

$$\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

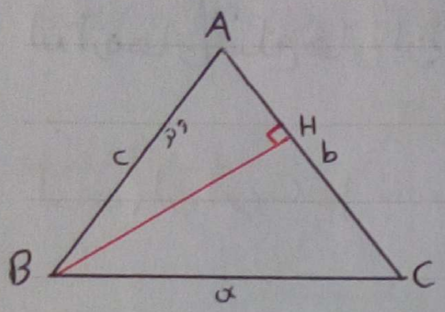
درس دو

قضیه کسینوس ها

قضیه کسینوس ها: حالت اول $(A=90)$ در این حالت مثلث ABC قائم الزاویه است و لذا قضیه فیثاغورس را داریم. $a^2=b^2+c^2$. و چون $\cos 90=0$ لذا حکم بدست می آید.

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

حالت دوم $(A<90)$



$\overset{\triangle}{ABH}: \cos A = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AH}{AB} = \frac{b-CH}{c}$ ۱

$\sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{c}$ ۲

۱ $\longrightarrow CH = b - AH \xrightarrow{AH=c.\cos A} CH = b - c.\cos A$ (1)

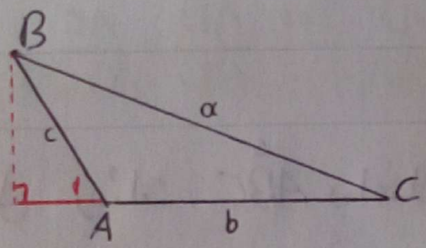
۲ $\longrightarrow BH = c.\sin A$ (2)

فیثاغورس $\overset{\triangle}{BCH}: a^2 = CH^2 + BH^2 \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} (b - c.\cos A)^2 + (c.\sin A)^2$

$a^2 = b^2 - 2b.c.\cos A + c^2.\cos^2 A + c^2.\sin^2 A$

$a^2 = b^2 - 2bc.\cos A + c^2(\underbrace{\cos^2 A + \sin^2 A}_{1}) \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

حالت سوم $(A<90)$



$\overset{\triangle}{ABH}: \sin A_1 = \frac{BH}{c} \longrightarrow BH = c.\sin A_1$ (1)

$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \longrightarrow AH = c.\cos A_1$ (2)

قائم الزاویه $\overset{\triangle}{BCH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BH^2 + CH^2 = BC^2 \xrightarrow{(1),(2)} BH^2 + (AH + b)^2 = BC^2$

$\xrightarrow{(1),(2)} a^2 = (c.\sin A_1)^2 + (c.\cos A_1 + b)^2 \Rightarrow a^2 = c^2.\sin^2 A + c^2.\cos^2 A + b^2 - 2bc\cos A$

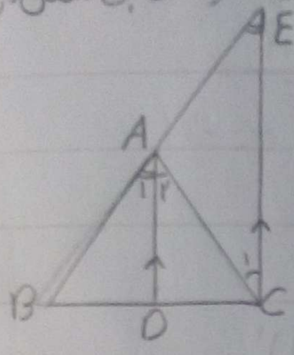
$a^2 = c^2(\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{1}) + b^2 - 2bc.\cos A \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

درس سه — قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث و محاسبهٔ طول نیمسازها

قضیه نیمسازها: در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت

اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.

اثبات) از رأس C خطی به موازات نیمساز AD رسم کرده سپس ضلع AB را مطابق شکل از رأس A امتداد می دهیم تا دو خط همدیگر را در نقطه E قطع کنند.



$AD \parallel CE \xrightarrow[\text{مورب}]{AC} C_1 = A_2$

$AD \parallel CE \xrightarrow[\text{مورب}]{BE} E = A_1$

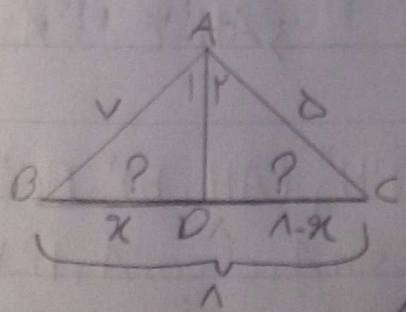
$\xrightarrow{A_1 = A_2} C_1 = E \longrightarrow A\hat{C}E \Longrightarrow AE = AC$ ①

متساوی الساقین

$AD \parallel CE \xrightarrow[\text{مورب}]{BE} E = A_1$ فرض: $A_1 = A_2$ حکم: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

$B\hat{C}E : AD \parallel CE \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{قضیه}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{①} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{ویژگی}} \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

مثال: در مثلث $A\hat{B}C$ با اضلاع ۸،۷،۵ طول دو قطعه‌ای را که روی ضلع بزرگتر ایجاد می شود را بدست آورید؟



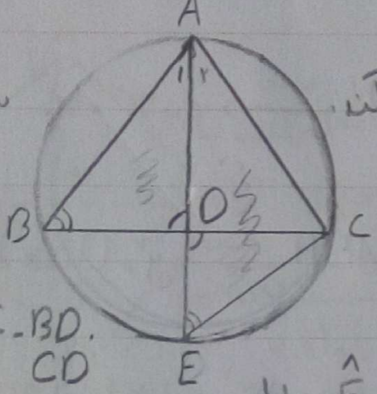
جواب: بنا به قضیه نیمساز: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \longrightarrow \frac{7}{x} = \frac{5}{8-x} \longrightarrow 5x = 56 - 7x$

$12x = 56 \longrightarrow x = \frac{56}{12} = \frac{14}{3} \Longrightarrow BD = \frac{14}{3}$, $CD = 8 - \frac{14}{3} = \frac{10}{3}$

تبصره: (طول نیمساز مثلث) در هر مثلث مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل

ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویه - حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند. AD را امتداد داده تا دایره را در E قطع کند.

فرض: AD نیمساز



حکم: $AD^2 = AB.AC - BD.CD$

سپس E را به C وصل می‌کنیم:

$\hat{E}$ محاطی $\Longrightarrow \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ $\longrightarrow B = E$ ①

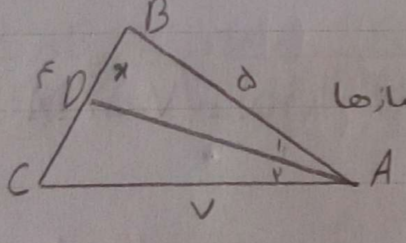
$\hat{B}$ محاطی $\Longrightarrow B = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\begin{cases} A_1 = A_2 & \text{نیمساز} \\ B = E \ ① \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{B}D \sim A\hat{C}E \xrightarrow[\text{متناسب}]{\text{اضلاع}} \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$

$AB.AC = AD.AE = AD.(AD+DE) = AD^2 + AD.DE \xrightarrow[AD.DE = BD.DC]{\text{رابطه طولی در دایره}} AB.AC = AD^2 + BD.DC$

$① \longrightarrow AD^2 = AB.AC - BD.DC$ حکم

مثال: در مثلث به اضلاع ۴، ۵، ۷ طول نیمساز کوچکترین زاویه را بدست آورید؟



بنا به قضیه نیمسازها: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \longrightarrow \frac{7}{x} = \frac{5}{8-x} \longrightarrow 5x = 56 - 7x$

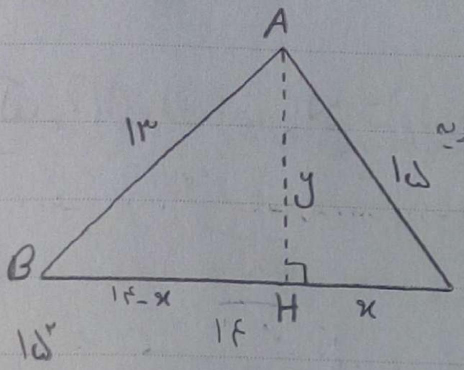
$\longrightarrow 12x = 56$

$\longrightarrow x = \frac{56}{12} = \frac{14}{3} \Longrightarrow BD$

قضیه هرون: مثال: در مثلث $A\hat{B}C$ با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH را رسم کنید.

Subject: Year: Month: Date: / /

مطابق شکل مقادیر y و x را بدست آورید سپس مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را محاسبه کنید.



قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ACH} \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قضیه}} y^2+x^2=15^2$

قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABH} \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قضیه}} y^2+(14-x)^2=13^2 \longrightarrow$

$$\cancel{y^2}+196-28x+\cancel{x^2}=13^2 \longrightarrow 15^2+196-169-28x=13^2 \Longrightarrow 225+196-169=28x$$

$$\Rightarrow x=9 \;,\; y^2+9^2=225 \longrightarrow y^2=225-81 \longrightarrow y=12$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$$

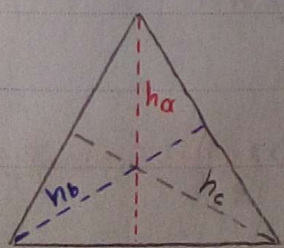
اگر همین روش مثال فوق را در حالت کلی در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ که در آن $BC=a$، $AC=b$ و $AB=c$ به کار ببریم آن گاه به قضیه‌ای به نام هرون می‌رسیم.

قضیه هرون: که در آن P نصف محیط است. $(P=\frac{a+b+c}{2})$ $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

مثال: مساحت مثلث AB با اضلاع ۱۵ و ۱۴، ۱۳ را بدست آورید. $P=\frac{13+14+15}{2}=21$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{7056}=84$$

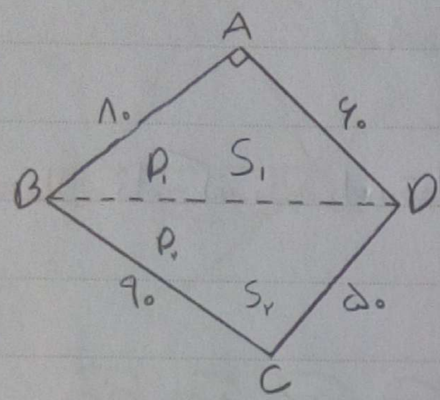
ارتفاع های مثلث



در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ مطابق شکل داریم:

$$h_a=\frac{2S}{a}\;,\; h_b=\frac{2S}{b}\;,\; h_c=\frac{2S}{c}$$

در شکل زیر مساحت چهارضلعی ABCD را بدست آورید.



$BD^2 = ۸۰^2 + ۶۰^2 = ۶۴۰۰ + ۳۶۰۰ = ۱۰۰۰۰ \longrightarrow BD = ۱۰۰$

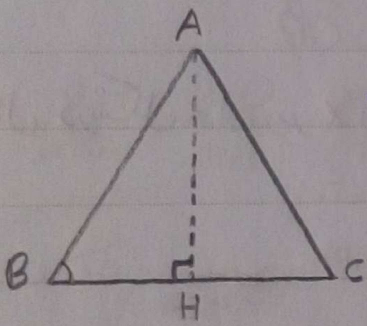
$P_1 = \frac{۶۰+۸۰+۱۰۰}{۲} = ۱۲۰ \longrightarrow S_1 = \sqrt{P_1(P_1-a)(P_1-b)(P_1-c)} =$

$\sqrt{۱۲۰(۱۲۰-۱۰۰)(۱۲۰-۸۰)(۱۲۰-۶۰)} = \sqrt{۱۲۰\times۲۰\times۴۰\times۶۰} = ۲۴۰۰$

$P_2 = \frac{۵۰+۹۰+۱۰۰}{۲} = ۱۲۰ \quad S_2 = \sqrt{P_2(P_2-a)(P_2-b)(P_2-c)} = \sqrt{۱۲۰(۱۲۰-۱۰۰)(۱۲۰-۹۰)(۱۲۰-۵۰)} =$

$\sqrt{۱۲۰\times۲۰\times۳۰\times۷۰} = ۶۰۰\sqrt{۱۴} \qquad S = ۲۴۰۰ + ۶۰۰\sqrt{۱۴}$

روشی دیگر برای محاسبهٔ مساحت مثلث

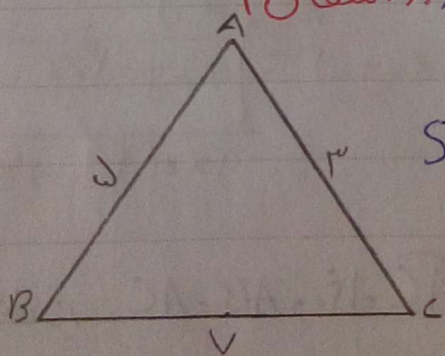


$S = \frac{1}{۲} BC.AH$ ①, $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = \sin B . AB$ ②

$\xrightarrow{①,②} S = \frac{1}{۲} BC.AB.\sin B$

$S = \frac{1}{۲} AB.AC.\sin A = \frac{1}{۲} BC.AC.\text{sic}C =$ به طریق مشابه و در حالت کلی

مثال: در مثلث زیر اندازهٔ زاویه A را بدست آورید. (امتحان)



$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} =$

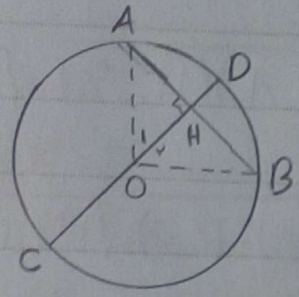
$۷/۵\times\underbrace{(۷/۵-۷)}_{۰/۵}\underbrace{(۷/۵-۳)}_{۴/۵}\underbrace{(۷/۵-۵)}_{۲/۵} =$

$\sqrt{۷/۵\times۰/۵\times۴/۵\times۲/۵} \simeq ۶/۵$ ①

$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}5\times 3.\sin A=7/5\sin A$ ②

$7/5\sin A=6/5 \Rightarrow \sin A=\frac{6/5}{7/5} \Rightarrow A=\sin^{-1}\left(\frac{65}{75}\right) \xrightarrow[A=120]{A=60} A=120$

سوال: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند؟



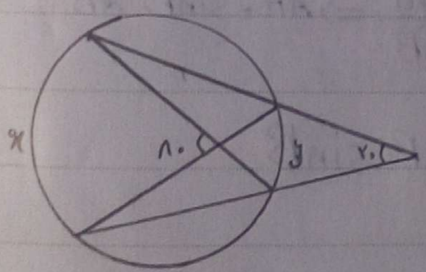
فرض: $CD\perp AB$

حکم: $AH=BH, \widehat{AD}=\widehat{BD}, \widehat{AC}=\widehat{BC}$

$\begin{cases} OA=OB= \text{شعاع} \\ OH=OH= \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} AH=BH \\ O_1=O_2 \xrightarrow{\text{مرکزی}} \widehat{AD}=\widehat{BD} \end{cases}$

قطر دایره $CD \Rightarrow \widehat{CAD}=\widehat{CBD} \Rightarrow \widehat{CA}+\cancel{\widehat{AD}}=\widehat{CB}+\cancel{\widehat{BD}} \Rightarrow \widehat{CA}=\widehat{CB}$

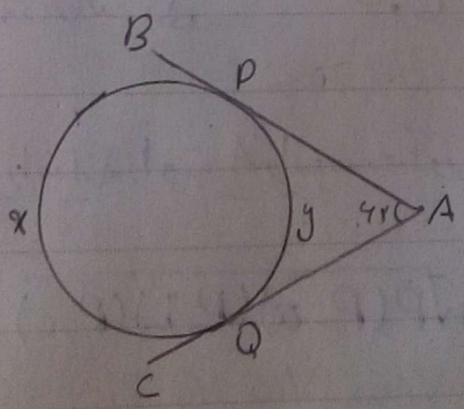
سوال: در شکل های زیر x و y را بدست آورید؟



$20=\frac{x-y}{2} \longrightarrow x-y=40$

$80=\frac{x+y}{2} \longrightarrow x+y=160$

$2x=200 \rightarrow x=100, y=60$

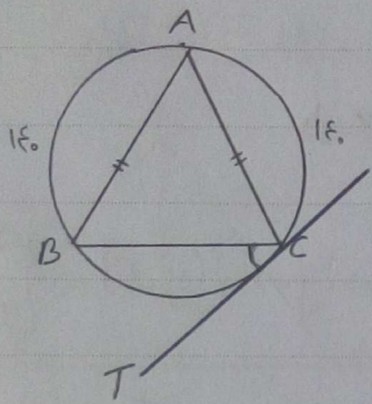


$62=\frac{x-y}{2} \quad x-y=124$

$x+y=360 \quad x+y=360$

$2x=484 \rightarrow x=242, y=118$

سوال: در شکل زیر $\widehat{AC}=140, AB=AC$. اندازهٔ زاویه $B\hat{C}T$ را بدست آورید.



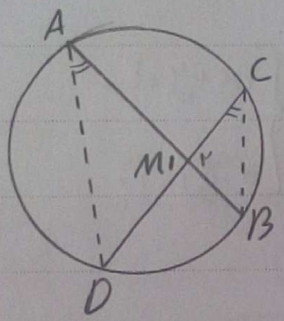
$AB = AC \Longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \longrightarrow \overset{\frown}{AB} = 140$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360 \Longrightarrow 140 + 140 + \overset{\frown}{BC} = 360$

$\longrightarrow \overset{\frown}{BC} = 80 \Longrightarrow \underset{\text{ظلی}}{B\hat{C}T} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40$

سوال: هرگاه دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M همدیگر را قطع کنند (داخل دایره)

آنگاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. کلید حل: تشابه مثلث ها



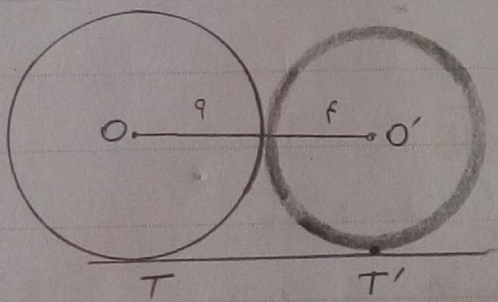
$\hat{A}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$, $\hat{C}_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \longrightarrow \hat{A} = \hat{C}$ ①

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} & ① \\ M_1 = M_2 & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{M}D \sim B\hat{M}C$

$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC} \Longrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

سوال: دو دایره به شعاع های ۹ و ۴ مماس خارج هستند. اندازهٔ طول مماس مشترک خارجی

آنها را بدست آورید؟



$TT' = ?$

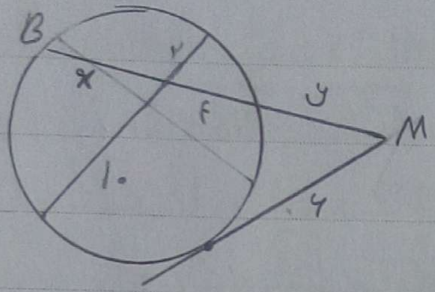
خط المرکزین $= OO' = d = 9 + 4 = 13$

$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

$TT' = \sqrt{13^2 - (9-4)^2} = \sqrt{169 - 25}$

$TT' = \sqrt{144} = TT' = 12$

سوال: در شکل زیر مقادیر x و y را بدست آورید؟



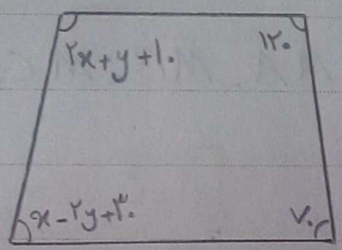
$x \times 4 = 2 \times 10 \longrightarrow x = 5$

$y \times (y+9) = 6 \times 6$

$y^2 + 9y - 36 = 0 \longrightarrow (y+12)(y-3) \longrightarrow \begin{cases} y = -12 & \text{غ ق} \\ y = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$

سوال: در شکل زیر چهارضلعی ABCD محاطی است. x و y را بدست آورید؟

در داخل دایره محاط شده است.



ویژگی چهارضلعی محاطی: زاویه های روبرو مکمل اند.

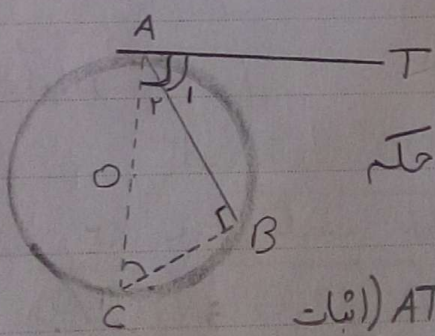
$2x + y + 10 + 70 = 180 \longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 100 \\ x - 2y = 30 \end{cases}$

$x - 2y + 30 + 120 = 180$

$\begin{cases} 2x + y = 100 \\ -2x + 4y = -60 \end{cases}$

$5y = 40 \longrightarrow y = 8 , x = 46$

مثال: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبروی آن.



حکم: $T\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

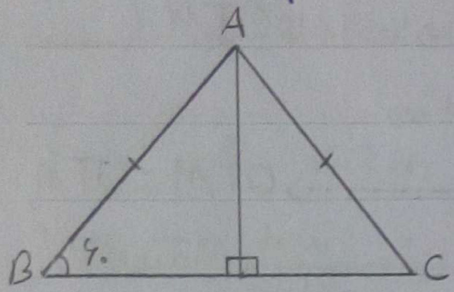
اثبات) $AT \perp AC \longrightarrow A_1 + A_2 = 90$ ①

محاطی $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{180}{2} = 90$

$ABC: \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \xrightarrow{B=90} A_2 + C = 90$ ②

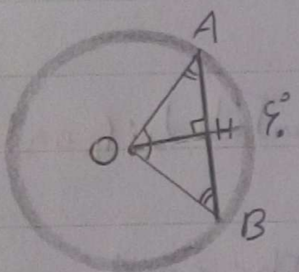
$A_2 + C = A_1 + A_2 \longrightarrow A_1 = C \ *$ محاطی $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \xrightarrow{*} A_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Longrightarrow T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

نکته: فرض کنیم ABC مثلث متساوی الاضلاع باشد آنگاه: $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.



مثال: در دایره $C(O,R)$ وتر AB برابر ۱۰ و $\widehat{AB}=60^\circ$ است. فاصلهٔ O از وتر AB را بدست آورید.

نکته: (یادآوری) قطر (شعاع) عمود بر وتر آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



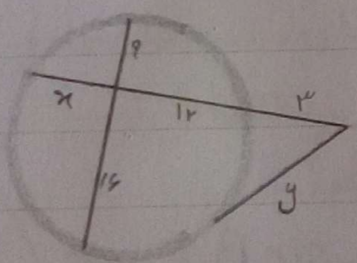
جواب) $OA=OB=R \rightarrow \hat{A}=\hat{B}$

مرکزی $A\hat{O}B=\widehat{AB}=60 \rightarrow A+B+\underbrace{AOB}_{60}=180 \rightarrow A+B=120 \rightarrow$

$A=B=60$

متساوی الاضلاع: $O\hat{A}B \xrightarrow[\text{ارتفاع}]{OH} OH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}$

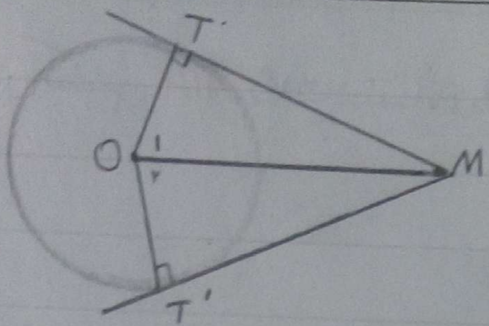
مثال: در شکل زیر y و x را بیابید.



$x.12=9\times 16 \rightarrow x=12$

$y^2=3\times(3+12+x)=81 \rightarrow y=9$

قضیه: ثابت کنید اندازهٔ مماس های رسم شده از نقطه M خارج دایره با هم برابرند.



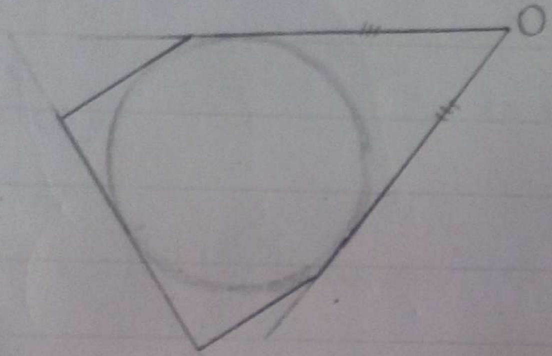
$OT \perp MT \longrightarrow$ قائم الزاویه $\overset{\triangle}{OTM}$

$OT' \perp MT' \longrightarrow$ قائم الزاویه $\overset{\triangle}{OT'M}$

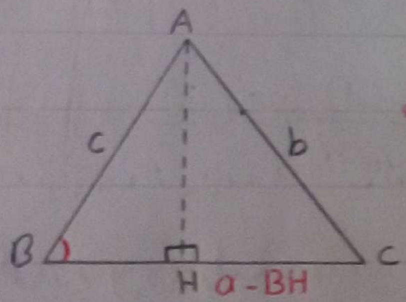
$$\begin{cases} OM = OM = \text{وتر مثلث} \\ OT = OT' = R \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OTM} \cong \overset{\triangle}{OT'M}$$

$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} MT = MT'$$

مثال: در شکل زیر ثابت کنید $GO + LY = OL + GY$.



مثال (خیلی مهم): رابطه کسینوس ها را برای مثلثی که همه زاویه های آن حاده باشند را به دست آورید.



یادآوری: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

✓ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ (1) ← رابطه کسینوس

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ (2)

$$\cos B = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow \cos B = \frac{BH}{c} \longrightarrow BH = c.\cos B \quad (1)$$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow \sin B = \frac{AH}{c} \longrightarrow AH = c.\sin B \quad (2)$$

$$\overset{\triangle}{ACH}: CH^2 + AH^2 = b^2 \longrightarrow b^2 = (a - BH)^2 + AH^2 = a^2 - 2a.BH + BH^2 + AH^2$$

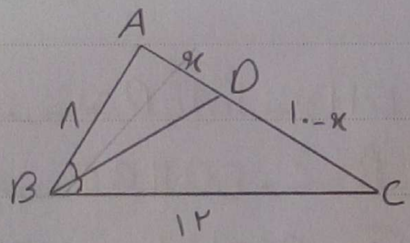
$\xrightarrow{①,②} b^2=a^2-2ac.\cos B+(c.\cos B)^2+(c.\sin B)^2$

$\longrightarrow b^2=a^2-2ac.\cos B+\underbrace{c^2.\cos^2B+c^2\sin^2B}_{c^2(\underbrace{\cos^2B+\sin^2B}_{1})} \rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$

مثال: در یک مثلث طول اضلاع ۸، ۱۰ و ۱۲ می باشد. اندازهٔ نیمساز زاویهٔ متوسط

چقدر است؟ (با اینطور مثال عددی می آید یا خود قضیه)

ب) اندازه قطعات ایجاد شده را روی ضلع متوسط بدست آورید؟



ب) بنا به قضیه نیمسازها: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow \frac{8}{12}=\frac{x}{10-x}$

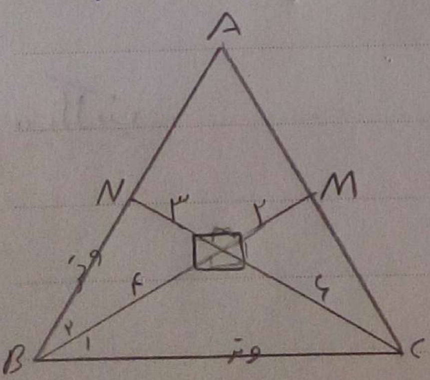
$\longrightarrow 12x=80-8x \longrightarrow 20x=80 \longrightarrow x=4$

$\Rightarrow AD=4,\ DC=6$

الف) $BD^2=AB.BC-AD.DC$ بنا به قضیه نیمسازها

$\longrightarrow BD^2=8\times12-4\times6=96-24=72 \rightarrow BD=\sqrt{72}$

۴مثال (خیلی خیلی مهم): در مثلث $A\hat{B}C$ میانه های نظیر ~~~~ راٌس های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ برهم عمودند.



اگر $m_c=9$ و $m_b=6$ باشد، مقدار $\tan B$ را پیدا کنید.

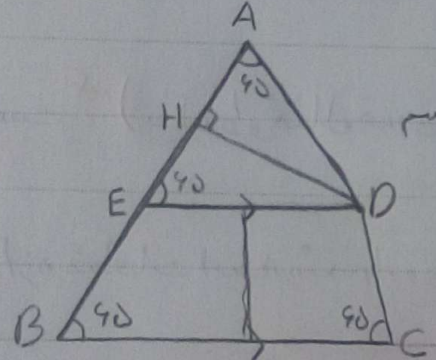
بنا به قضیه همرسی میانه ها داریم: $BD=2DM$

$CD=2DN$

$\tan B_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\tan B_2 = \frac{3}{4}$ $\tan B = \tan(B_1 + B_2) = \frac{\tan B_1 + \tan B_2}{1 - \tan B_1 \cdot \tan B_2} =$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{1}{2}} = -18$$

مثال: با دوبار استفاده از بازتاب چهار ضلعی شکل مقابل را به دو بخش با مساحت مساوی

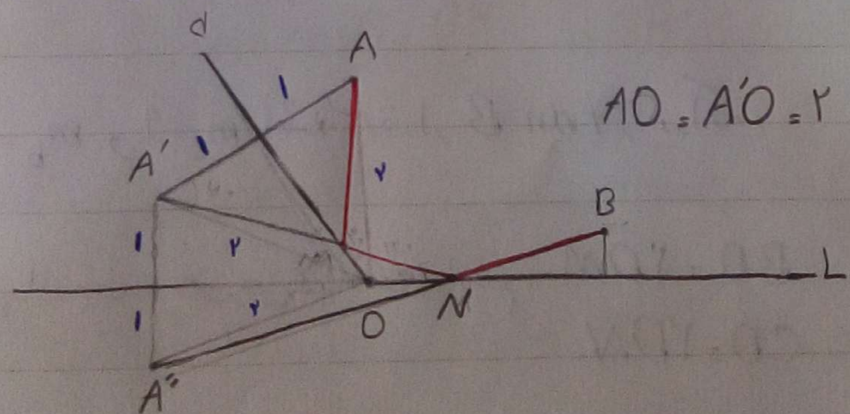


تقسیم کنید؟ از نقطهٔ D خطی موازی BC مطابق شکل رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ E قطع کند. لذا:

$BC \parallel ED \xrightarrow[\text{مورب}]{AB} \hat{B} = \hat{E} = 65 \xrightarrow[\text{الساقین}]{A = 65 \text{ متساوی}}$ مثلث $A\hat{E}D$

در نتیجه در مثلث $A\hat{E}D$، ارتفاع DH، مثلث را به دو قسمت همنهشت تقسیم می‌کند.
از طرفی چون $ED \parallel BC$ و $\hat{B} = \hat{C}$ پس EDCB ذوزنقهٔ متساوی الساقین است و کافیست وسط ضلع ED را به وسط ضلع BC وصل کنیم، ذوزنقه به دو قسمت همنهشت تقسیم شود.

* مثال: در شکل زیر دو خط همدیگر را در نقطه O و زاویهٔ ۱۲۰ قطع کرده اند. اگر فاصلهٔ A از خط d برابر یک و فاصلهٔ B از خط L برابر نیم و $A\hat{O}D = 30$ باشد کوتاهترین مسیر از A به d سپس به خط L و سرانجام به نقطهٔ B را رسم کنیم و با توجه به شکل طول این مسیر را پیدا کنید.



$AO = A'O = 2$

Subject: Year: Month: Date: / /

ابتدا بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم. سپس بازتاب نقطهٔ A' نسبت به امتداد خط L را بدست می‌آوریم و آن را A'' می‌نامیم. از A'' به نقطهٔ B وصل کرده و محل برخورد آن را با خط L، N می‌نامیم. حال از نقطهٔ A' به نقطهٔ N وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ M قطع کند. کوتاهترین مسیر خط شکستهٔ $AMNB$ خواهد بود.

Data Max