توابع نمایی و لگاریتمی

آنتی لگاریتم $a>0$

$$\log_{b}^{a} = c \longrightarrow \text{جواب معادله} \qquad \longleftrightarrow \qquad b^c = a$$

مبنا باید $b>0$ و $b\neq 1$

تابع نمایی

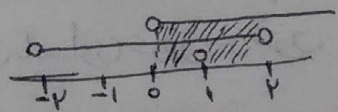
* عدد صفر و اعداد منفی فاقد لگاریتم هستند

* برای تعیین دامنه تابع لگاریتمی از $\begin{cases} b>0 \\ b\neq 1 \\ a>0 \end{cases}$ کمک می‌گیریم

مثال * $y=\log_{x}^{4-x^2}$ $\quad D_y = ?$

$$\begin{cases} b>0 \longrightarrow x>0 \\ b\neq 1 \longrightarrow x\neq 1 \\ a>0 \longrightarrow 4-x^2>0 \Longrightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2 \end{cases}$$

اشتراک



$D_y = (0,1) \cup (1,2)$

* تابع لگاریتمی معکوس یا وارون تابع نمایی می‌باشد.

* اگر مبنای لگاریتم برابر ۱۰ باشد می‌توان آن را ننوشت: $\log_{10}^{x} = \log^{x}$

* اگر مبنای لگاریتم برابر عدد نپر $(e=2/718\ldots)$ باشد داریم: Ln $\log_{e}^{x} = \ln x$

مثال: $\log_{2}^{8} = 3 \Longrightarrow 2^3 = 8$

* $\log_{16}^{x} = \frac{3}{2} \Longrightarrow x = 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(16)^3} = 4^3 = 64$

* قلق های تستی بدون نیاز به رسم نمودار:

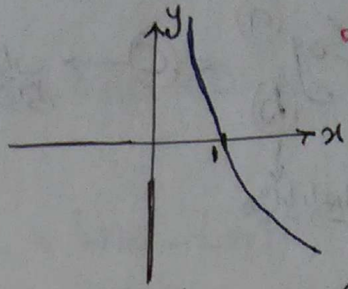
① $\log_{b}^{a}$
- مثبت است هرگاه a و b هر دو بزرگتر از یک و یا بین صفر و یک باشد ← a و b دارای وضعیت یکسانند
- منفی است اگر a و b یکی بزرگتر از یک و دیگری بین صفر و یک باشد ← a و b وضعیت غیریکسان دارند

مثال: * $\log_{3}^{5} > 0$ * $\log_{7}^{4} > 0$ * $\log_{0/3}^{0/2} > 0$ * $\log_{0/1}^{0/5} > 0$

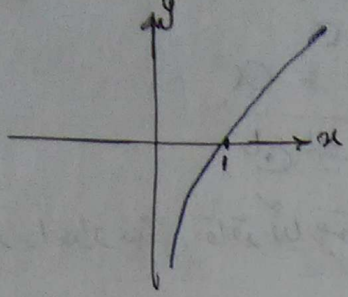
* $\log_{0/2}^{6} < 0$ * $\log_{7}^{0/3} < 0$

* نمودار توابع لگاریتمی $y=\log_{a}^{x}$

الف) $0<a<1$



ب) $a>1$



② x,y نقش آنتی لگاریتمی ایجاد می کند پس داریم: $x,y>0$

در چنین شرایطی:

حالت اول $\boxed{a>1}$: $\log_{a}^{x}>\log_{a}^{y} \longrightarrow x>y$

* وقتی مبنا بزرگتر از یک باشد با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض نمی شود

حالت دوم $\boxed{0<a<1}$ $\log_{a}^{x}>\log_{a}^{y} \longrightarrow y>x$

* وقتی مبنا بین صفر و یک باشد با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض می شود.

نتیجه گیری: اگر مبنا بزرگتر از یک باشد با رشد آنتی لگاریتم حاصل لگاریتم نیز افزایش می یابد ولی اگر مبنا بین صفر و یک باشد با رشد آنتی لگاریتم حاصل لگاریتم کاهش می یابد

مثال: if $5>3$
$$\begin{cases} a=6 \longrightarrow \log_{6}^{5}>\log_{6}^{3} \\ a=0/2 \longrightarrow \log_{0/2}^{5}<\log_{0/2}^{3} \end{cases}$$

ویژگی های لگاریتم:

① $\log_{a}^{1}=0 \longrightarrow$ وقتی آنتی برابر ۱ هست حاصل لگاریتم صفر است

② $\log_{a}^{a}=1 \longrightarrow$ وقتی آنتی و مبنا باهم برابرند حاصل لگاریتم ۱ می باشد

مثال: $\log_{0/2}^{0/2}=1 \quad \log_{5}^{5}=1$

③ $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_{b}^{a}$

مثال: if $\log_{2}^{3}=A \longrightarrow$ حاصل $\log_{4}^{27}=?$

$$\log_{4}^{27}=\log_{2^2}^{3^3}=\frac{3}{2}\log_{2}^{3}=\frac{3}{2}A$$

مثال: $\log_{16}^{32} = \log_{2^4}^{2^5} = \frac{5}{4}\log_2^2 = \frac{5}{4}$ $\quad * \log_9^{81} = \log_{3^2}^{3^4} = \frac{4}{2}\log_3^3 = 2$

④ $\log_m^{ab} = \log_m^a + \log_m^b$ یا $\ln ab = \ln a + \ln b$

⑤ $\log_m^{\frac{a}{b}} = \log_m^a - \log_m^b$ یا $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

⑥ $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \longrightarrow \begin{cases} \log_b^a = A \\ \log_a^b = \frac{1}{A} \end{cases}$

⑦ $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

حالت مهم: $a^{\log_a^b} = b$ یا $e^{\ln b} = b$

⑧ تغییر مبنا $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \longrightarrow$ if $c = 10 \Rightarrow \log_b^a = \frac{\log^a}{\log^b}$

⑨ $\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c \times \cdots \times \log_e^d = \log_e^a$

* در چنین شرایطی آنتی اولی و مبنای دومی به عنوان آنتی و مبنای لگاریتم موجود انتخاب خواهد شد

مثال: $\log_3^2 \times \log_4^3 \times \log_5^4 \times \cdots \times \log_{12}^{11} = ? \Rightarrow \log_{12}^2$

مثال: $\log_4^3 \times \log_5^4 \times \cdots \times \log_{27}^{26} = ? \Rightarrow \log_{27}^3 = \log_{3^3}^3 = \frac{1}{3}\log_3^3 = \frac{1}{3}$

* دو تکنیک تستی بسیار قشنگ و مهم:

① if $c = ab \longrightarrow \log_c^a = 1 - \log_c^b$

مثال: $\log_6^3 = 1 - \log_6^2$ $\quad * \log_{12}^4 = 1 - \log_{12}^3$

$* \log^5 \ldots 1 - \log^6$

۲) اگر با حاصلضرب چند عبارت لگاریتمی مواجه شدیم می‌توان جای آنتی‌ها و مبناها را به دلخواه عوض کرد

مثال: $\log_{6}^{25}\times\log_{125}^{8}\times\log_{4}^{36}=?$

بازنویسی: $\log_{125}^{25}\times\log_{4}^{8}\times\log_{6}^{36}\Rightarrow\log_{5^3}^{5^2}\times\log_{2^2}^{2^3}\times\log_{6}^{6^2}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times2=2$

مثال: $\log_{9}^{16}\times\log_{25}^{27}\times\log_{8}^{625}=?$

بازنویسی: $\log_{8}^{16}\times\log_{9}^{27}\times\log_{25}^{625}\Rightarrow\log_{2^3}^{2^4}\times\log_{3^2}^{3^3}\times\log_{5^2}^{5^4}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{2}=4$

تست‌ها:

۱) دامنه تابع $f(x)=\log_{1-x}^{4-x^2}$ کدام بازه است.

۱) $(-2,1)$
۲) $(-2,1)-\{0\}$
۳) $(-2,2)$
۴) $(-2,2)-\{0\}$

نکته: بهترین روش برای حل تست‌های مربوط به دامنه استفاده از رد گزینه است.

مبنا > ۰

مبنا $\neq 0 \longrightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\longrightarrow$ مبنا را صفر کند پس در دامنه نیست

مبنا $\neq 1 \longrightarrow 1-x=1\Rightarrow x=0\longrightarrow$ مبنا را یک می‌کند پس در دامنه نیست

۲) اگر $4^a=2\sqrt{2}$ باشد $\log_{4}^{4a+1}$ کدام است.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

$4^a=2\sqrt{2}\Rightarrow2^{2a}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow2a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\log_{4}^{4a+1}=\log_{4}^{4}=1$

۳) کدام گزینه صحیح است.

۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}>\log_{\frac{1}{2}}^{100}$
۲) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{3}^{2}$
۳) $\log_{5}^{3}>\log_{3}^{5}$
۴) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

حل گزینه ۱: $0<\frac{1}{2}<1\Rightarrow\frac{1}{100}<100$

این رابطه همیشه درست است

یادآوری: if $\boxed{a>1}$ $\longrightarrow$ با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض نمی‌شود

if $\boxed{0<a<1}$ $\longrightarrow$ با حذف لگاریتم جهت نامساوی

③ حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید.

* $\log_{\sqrt[3]{16}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log_{2^{\frac{4}{3}}}^{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{8}$

* $\log_{2\sqrt{2}}^{32} = \log_{2^{\frac{3}{2}}}^{2^{5}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$

* $\log_{\frac{1}{125}}^{\sqrt[3]{25}} = \log_{5^{-3}}^{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}}{-3} = -\frac{1}{3}$

* $\log_{\sqrt[5]{27^{6}}}^{\sqrt[7]{81^{8}}} = \log_{\sqrt[5]{3^{18}}}^{\sqrt[7]{3^{32}}} = \log_{3^{\frac{18}{5}}}^{3^{\frac{32}{7}}} = \frac{\frac{32}{7}}{\frac{18}{5}} = \frac{80}{63}$

* $\log_{x\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[3]{x^{2}\sqrt{x}}} = \log_{x\times x^{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{\sqrt{x^{4}\times x}}} = \log_{x^{\frac{4}{3}}}^{\sqrt[6]{x^{5}}} = \log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{5}{6}}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{8}$

* $(\sqrt{5})^{\log_{3\sqrt{3}}^{27}} = (\sqrt{5})^{\log_{3^{\frac{3}{2}}}^{3^{3}}} = (\sqrt{5})^{2} = 5$

* $\log_{6}^{30} + \log_{6}^{42} - \log_{6}^{35} =$

روش کار: در چنین حالت هایی که با حاصل جمع و تفریق چند لگاریتم مواجه هستیم برای تبدیل چند لگاریتم به یک لگاریتم داریم:
⊕ را به ضرب و ⊖ را به تقسیم تبدیل می کنیم.

$\log_{6}^{\frac{30\times 42}{35}} = \log_{6}^{36} = \log_{6}^{6^{2}} = 2$

* $2\log_{3}^{5} + \log_{3}^{18} - \log_{3}^{75} - \log_{3}^{6} = \log_{3}^{\frac{5^{2}\times 18}{75\times 6}} = \log_{3}^{1} =$ صفر

* $32^{\log_{8}^{7}} = 7^{\log_{8}^{32}} = 7^{\log_{2^{3}}^{2^{5}}} = 7^{\frac{5}{3}} = 7^{\frac{3}{3}}\times 7^{\frac{2}{3}} = 7\sqrt[3]{49}$

یادآوری: $a^{\log_{c}^{b}} = b^{\log_{c}^{a}}$

* $9^{2+3\log_{3}^{2}} = 9^{2}\times 9^{3\log_{3}^{2}} = 9^{2}\times 9^{\log_{3}^{8}} = 9^{2}\times 8^{\log_{3}^{9}} = 9^{2}\times 8^{2} = 5184$

* if $\log_{a}^{9} = -\frac{1}{2} \longrightarrow$ حاصل $\log_{3}^{\frac{3}{a}} = ?$

یادآوری: $\log_{b}^{a} = A$ ، $\log_{a}^{b} = \frac{1}{A}$

$\log_{3}^{\frac{3}{a}} = \log_{3}^{3} - \log_{3}^{a} \Rightarrow 1 - \log_{3}^{a} \Rightarrow 1-(-4) = 5$ جواب

$\log_{a} = \log_{a} - 2\log_{a} \ldots \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{a}^{3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \log_{3}^{a} = -4$

$* \ ۵^{(۲\log_۵^۲+۳\log_۵^۳)} = ۵^{(\log_۵^۴+\log_۵^{۲۷})} = ۵^{\log_۵^{۱۰۸}} = ۱۰۸^{\log_۵^۵} = ۱۰۸$

$* \ \log^۲+\log^{\frac{۳}{۲}}+\log^{\frac{۴}{۳}}+\dots+\log^{\frac{۱۰۰۰}{۹۹۹}} = \log^{(\cancel{۲}\times\cancel{\frac{۳}{۲}}\times\cancel{\frac{۴}{۳}}\times\dots\times\cancel{\frac{۱۰۰۰}{۹۹۹}})} = \log^{۱۰۰۰} = ۳$

نکته: $\log^{۱۰}=۱$ ، $\log^{۱۰۰}=۲$ ، $\log^{۱۰۰۰}=۳$ ، ...

$\log^{۰/۱}=-۱$ ، $\log^{۰/۰۱}=-۲$ ، $\log^{۰/۰۰۱}=-۳$

$* \ \log_n^{\frac{۱}{۲}}+\log_n^{\frac{۲}{۳}}+\log_n^{\frac{۳}{۴}}+\dots+\log_n^{\frac{n-1}{n}} = \log_n^{(\cancel{\frac{۱}{۲}}\times\cancel{\frac{۲}{۳}}\times\cancel{\frac{۳}{۴}}\times\dots\times\cancel{\frac{n-1}{n}})}$

$= \log_n^{\frac{۱}{n}} = \log_n^{n^{-1}} = -۱$

$* \ \log^۲+\log^{\frac{۳}{۲}}+\log^{\frac{۴}{۳}}+\log^{\frac{۵}{۴}} = ? \quad \text{if } \log^۲=a$

$\log^{(\cancel{۲}\times\cancel{\frac{۳}{۲}}\times\cancel{\frac{۴}{۳}}\times\frac{۵}{\cancel{۴}})} = \log^۵ = ۱-\log^۲ = ۱-a$

نکته: $\log^۵ = ۱-\log^۲$

$\log^۲ = ۱-\log^۵$

$* \ \log_۳^۲ = a \longrightarrow \log_{۲۴}^{۱۲} = ?$

روش حل: در چنین تست‌هایی از تغییر مبنا استفاده می‌کنیم.

$\log_{۲۴}^{۱۲} = \frac{\log_۳^{۱۲}}{\log_۳^{۲۴}} = \frac{\log_۳^۳+\log_۳^۴}{\log_۳^۳+\log_۳^۸} = \frac{۱-\log_۳^۲}{۱+۳\log_۳^۲} = \frac{۱+۲a}{۱+۳a}$

$* \ \log_۵^۳ = a \longrightarrow \log_{۴۵}^{۷۵} = ?$

$\log_{۴۵}^{۷۵} = \frac{\log_۵^{۷۵}}{\log_۵^{۴۵}} = \frac{\log_۵^{۲۵\times۳}}{\log_۵^{۵\times۹}} = \frac{\log_۵^{۲۵}+\log_۵^۳}{\log_۵^۵+\log_۵^۹} = \frac{۲+\log_۵^۳}{۱+۲\log_۵^۳} = \frac{۲+a}{۱+۲a}$

$* \ \log^۲ = k \longrightarrow \log^{(۶-۲\sqrt{۵})}+۲\log^{(۱+\sqrt{۵})} = ?$

$\log^{(۶-۲\sqrt{۵})}+\log^{(۱+\sqrt{۵})^۲} = \log^{۶-۲\sqrt{۲۵}}+\log^{۶+۲\sqrt{۵}} = \log^{\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{(۳۶-۲۰)}} = \log^{۱۶}$

$= \log^{۲^۴} = ۴\log^۲ = ۴k$

$* \ \log_۲^{\sqrt[۵]{e^۲}} = A \longrightarrow \log_{\sqrt{e}}^{۳۲} = ? \quad \log_{\sqrt{e}}^{۳۲} = \log_{e^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^۵} = ۱۰\log_e^۲ \Rightarrow ۱۰\times\frac{۲A}{۵} = \frac{۴}{A}$

$\log_۲^{e^{\frac{۲}{۵}}} = A \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۵}}{۲}\log_۲ \dots \log_۲ \dots \frac{\dots}{۲} \Rightarrow \log_e = \frac{۲A}{۵}$

* $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ \times \dots \times \log \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ = ?$ صفر

در این وسط داریم

$\log \tan 45^\circ = \log^1 =$ صفر

* $\log \tan 10^\circ + \log \tan 20^\circ + \log \tan 70^\circ + \log \tan 80^\circ =$

$\log(\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 70^\circ \times \tan 80^\circ) = \log^{1\times 1} = \log^1 =$ صفر

نکته: هرگاه دو زاویه متمم هم باشند

$\alpha + \beta = 90$

$\Downarrow$

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$

* $\log \cot 1^\circ + \log \cot 2^\circ + \dots + \log \cot 89^\circ = ?$

$\log(\cot 1^\circ \times \cot 2^\circ \times \cot 3^\circ \times \dots \times \cot 89^\circ) = \log^1 =$ صفر

نکته:

$\boxed{\begin{array}{l} \tan 1 \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 89 = 1 \\ \cot 1 \times \cot 2 \times \dots \times \cot 89 = 1 \end{array}}$

* $\frac{1}{1+\underbrace{\log_3^2}_{a}} + \frac{1}{1+\underbrace{\log_2^3}_{\frac{1}{a}}} = ?$ $\quad \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}} \Rightarrow$

$\frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = \frac{1+a}{1+a} = 1$

سوال: حاصل مشتق و انتگرال عبارت $\underbrace{2^{2-\log_4^x}}_{f(x)}$ کدام است

$f(x) = \frac{2^2}{2^{\log_4^x}} = \frac{4}{x^{\log_4^2}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

$\int f(x)dx = 4 \times 2\sqrt{x} + C = \boxed{8\sqrt{x} + C}$

$f'(x) = 4 \times -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{-2}{\sqrt{x^3}}}$

③ از دو معادله‌ی $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2+y^2=46$ لگاریتم $x+y$ بر مبنای ۴ کدام است؟

1) 1,5
2) 2
3) 3
4) 2,5

$\log_3^x + \log_3^y = \log_3^{xy} = 2 \iff xy = 3^2 = 9$

$x^2+y^2 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2(9) = 46$

$\Rightarrow (x+y)^2 = 64 \Rightarrow x+y = 8$

$\log_4^{x+y} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2} = 1,5$

یادآوری: $\log_m^a + \log_m^b + \dots = \log_m^{ab}$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

③ اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد آنگاه لگاریتم (a^3+7) در پایه‌ی ۸ کدام است.

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{19}{24}$
۴) $\frac{7}{4}$

$$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \xrightarrow{\text{طرفین توان ۳}} a^3 = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}\times 3} \Rightarrow a^3 = 9$$

$$\log_8 (a^3+7) = \log_8 (9+7) = \log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}$$

③ اگر لگاریتم $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد آنگاه لگاریتم $\left(\frac{1}{A}-1\right)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

۱) -2
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

$$\log_8 2\sqrt[3]{0/25} = A \longrightarrow \log_8 2\times 2^{-\frac{2}{3}} = \log_8 2^{\frac{1}{3}} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} = A$$

$$\log_4 \left(\frac{1}{A}-1\right) = \log_4 \left(\frac{1}{\frac{1}{9}}-1\right) = \log_4 (9-1) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

③ اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد حاصل $\log_3 2 \times \log_4 3 \times \dots \times \log_{27} 26$ برابراست با:

۱) $\frac{1}{6a}$
۲) $\frac{1-a}{6a}$
۳) $\frac{1-a}{3a}$
۴) $\frac{1}{3a}$

$$\log_3 2 \times \log_4 3 \times \dots \times \log_{27} 26 = \log_{27} 2 \Rightarrow \log_{27} 2 = \log_{3^3} 2 = \frac{1}{3}\log_3 2$$

$$\log_{12} 3 = a \longrightarrow \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 (3\times 4) = \log_3 3 + \log_3 2^2$$

$$= 1 + 2\log_3 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{\left(\frac{1}{a}-1\right)}{2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1-a}{2a}$$

$$\text{جواب تست} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1-a}{2a} = \frac{1-a}{6a}$$

* $$\frac{\log x}{\log_{25} x} + \frac{\log x}{\log_4 x} = ? \rightsquigarrow \frac{\log x}{\frac{\log x}{\log 25}} + \frac{\log x}{\frac{\log x}{\log 25}}$$

یادآوری: $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$

$$\Rightarrow \log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$$

* $$\frac{1}{\log_{12} 2} - \frac{1}{\log_3 2} = ? \rightsquigarrow \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

یادآوری: $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$

* $۳^{۲+\log_{۳}^{۵}} = ?$ $\quad ۳^{۲} \times ۳^{\log_{۳}^{۵}} \longrightarrow ۹ \times ۵^{\log_{۳}^{۳}} = ۹ \times ۵ = ۴۵$

* if $\log_{b}^{a} = \frac{۵}{۶} \longrightarrow \log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}} = ?$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}} = \log_{\sqrt{b}}^{a} + \log_{\sqrt{b}}^{b^{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \log_{b}^{a} + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} \log_{b}^{b} = ۲\log_{b}^{a} + ۴$$

$$\Rightarrow ۲ \times \frac{۵}{۶} + ۴ = \frac{۵}{۳} + ۴ = \frac{۱۷}{۳}$$

* $\log_{a}^{۳\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۴} \longrightarrow \log_{۴}^{(a-۱)} = ?$ طرق حل: در چنین مواردی طرفین را به توان عکس توان a می‌رسانیم.

$$a^{\frac{۳}{۴}} = ۳\sqrt{۳} = ۳^{\frac{۳}{۲}} \longrightarrow a^{\frac{۳}{۴}} = ۳^{\frac{۳}{۲}} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } \frac{۴}{۳}} a^{\frac{۳}{۴} \times \frac{۴}{۳}} = ۳^{\frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳}} \longrightarrow a = ۹$$

$$\log_{۴}^{۹-۱} = \log_{۴}^{۸} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

* $۶^{(\log_{۴}^{۳} \times \log_{۵}^{۴} \times \log_{۶}^{۵})} = ? \rightsquigarrow ۶^{\log_{۶}^{۳}} = ۳$ جواب

* if $A = \sqrt{۷}\left(\log_{۷}^{۲۷} + \log_{۷}^{۳}\right) \longrightarrow$
① $\log_{۴}^{(A+۷)} = ?$ $\quad \log_{۴}^{۹+۷} = \log_{۴}^{۱۶} = ۲$
② $A + ۵ = ?$ $\quad ۹ + ۵ = ۱۴$

$$A = ۷^{\frac{۱}{۲}(\log_{۷}^{۸۱})} = ۷^{\log_{۷}^{\sqrt{۸۱}}} = ۷^{\log_{۷}^{۹}} = ۹$$

* $\dfrac{\log^{۲} + \log^{۳} + \log^{۴}}{\log^{۲} + \frac{۱}{۲}\log^{۶}} = ? \longrightarrow \dfrac{\log^{۲۴}}{\log^{\sqrt{۴}} + \log^{\sqrt{۶}}} = \dfrac{\log^{۲۴}}{\log^{\sqrt{۲۴}}} = \dfrac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$

معادلات لگاریتمی

$$\log_a A = \log_a B \longrightarrow \underline{A = B}$$

برای حل معادلات لگاریتمی طرفین تساوی را به دو لگاریتم با مبنای یکسان تبدیل می کنیم و سپس آنتی لگاریتم ها را مساوی هم قرار می دهیم.

نکته: در حل تشریحی یا کلاسیک ابتدا باید دامنه ی توابع لگاریتمی طرفین تساوی را بدست آوریم. اما در حل تستی کافیست جواب ها را بدست آوریم (بدون نیاز به بررسی دامنه) سپس جواب ها را چک کنیم تا آنتی و مبنا را صفر یا منفی نکند و مبنی را برابر 1 نکند.

$$* \log_2 (x-1) + \log_2 (x+3) = 5$$

$$\log_2 (x-1)(x+3) = \log_2 x^2+2x-3 = 5 \Longrightarrow x^2+2x-3 = 2^5 = 32$$

$$x^2+2x-35=0$$

$$S=-2,\ P=-35 \begin{cases} x_1=-7 & \text{غ ق ق} \\ x_2=5 & \text{ق ق} \end{cases}$$

این معادله دارای یک جواب می باشد.

$$*\ \log_3 (x+2) - \log_3 (x-4) = 1$$

$$\log_3 \frac{x+2}{x-4} = 1 \Rightarrow 3^1 = \frac{x+2}{x-4} \Rightarrow 3x-12 = x+2$$

$$2x = 14 \Rightarrow x = 7$$ ق ق

$$*\ \log_2 (x+2) + \log_2 (x-2) = \log_2 (2x+4) + \cancel{1}\ \log_2 2$$

$$\log_2 (x+2)(x-2) = \log_2 2(2x+4) \Rightarrow x^2-4 = 4x+8 \Rightarrow$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$\left.\begin{array}{l} S=4 \\ P=-12 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 & \text{ق ق} \\ x_2 = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

این معادله دارای یک جواب است .

$$*\ \log_4 x + \log_2 x + \log_8 x^3 = 10$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x + \frac{3}{3}\log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2}\log_2 x = 10 \Rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4 = 16$$ ق ق

$$*\ \log_5 (x+3) = 2\log_5 (x+1) \Rightarrow \log_5 (x+3) = \log_5 (x+1)^2 \Rightarrow x+3 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow x+3 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 & \text{ق ق} \\ x_2 = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_5 (x+3) = \log_5 (x+1)^2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \text{ق ق} \\ x_1 = -2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

سوال: اگر فرم معادله به شکل زیر بود جواب چه می‌شد

$$*\ \log_4 x + \log_x 8 = \frac{7}{2} \qquad \log_2 x = a$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\log_2 x}_{a} + \frac{3}{1}\underbrace{\log_x 2}_{\frac{1}{a}} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}a + 3\times\frac{1}{a} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{a^2+6}{2a} = \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$a^2-7a+6=0 \xrightarrow{a+b+c=0}$$

$$\begin{cases} a=1 \rightarrow \boxed{x=2} & \text{ق ق} \\ a=6 \rightarrow \boxed{x=64} & \text{ق ق} \end{cases}$$

این معادله دارای دو ریشه می‌باشد

$* \log_3 (x^2-1) = \underset{\log_3 3}{\cancel{1}} + \log_3 (x+3) \longrightarrow \log_4 (x-3) = ?$

$\log_3 (x^2-1) = \log_3 (3x+9) \Rightarrow x^2-1 = 3x+9 \Rightarrow x^2-3x-10=0 \begin{cases} x_1 = 5 & \text{ق ق} \\ x_2 = -2 & \text{ق ق} \end{cases}$

$\log_4 (x-3) = \log_4 (5-3) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ جواب

$x=-2$
آنش راشش می‌کنه

$* \log (2x-1) + \log (x+3) = \log 30 - \log 2 \longrightarrow \log_8 x = ?$

$\log (2x^2+5x-3) = \log 15 \Rightarrow 2x^2+5x-3=15 \Rightarrow 2x^2+5x-18=0$

$\Delta = b^2-4ac = 25+144 = 169$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 13}{4} \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} & \text{غ ق} \\ x_2 = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$

$\log_8 x = \log_8 2 = \frac{1}{3}$ جواب

$* x^{(\log x - 1)} = 100$

در چنین تست‌هایی که x هم تو توان هم تو پایه باشد
نکته: از طرفین در مبنای داده شده لگاریتم می‌گیریم

$\log x^{(\log x - 1)} = \log 100$

$(\underbrace{\log x}_{a} - 1) \log x = 2 \Rightarrow (a-1)a = 2 \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$

$a = \log x \quad \xrightarrow{\text{if } a=-1} x = 0.1$ ق ق

$\quad \xrightarrow{\text{if } a=2} x = 100$ ق ق

* $x^{(\log_2^x+1)} = 64$

از طرفین در مبنای ۲ لگ میگیریم

$$\log_2 x^{(\log_2^x+1)} = \log_2^{64} \Rightarrow (\underbrace{\log_2^x}_{a}+1)(\underbrace{\log_2^x}_{a}) = 6$$

$$(a+1)(a)=6 \Rightarrow a^2+a-6=0 \begin{cases} a=2 \\ a=-3 \end{cases}$$

$$\log_2^x = a \begin{cases} \xrightarrow{\text{if } a=2} x=4 \quad \text{ق ق} \\ \xrightarrow{\text{if } a=-3} x=\frac{1}{8} \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

* $\underbrace{\sqrt{\log^x}}_{a} - 3\underbrace{\log^x}_{a^2} + 2 = 0 \Rightarrow -3a^2+a+2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} a=1 \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases}$

$$a=\sqrt{\log^x} \begin{cases} \to 1 \text{ ق ق} \rightsquigarrow \log^x = 1^2 = 1 \Rightarrow x=10 \text{ ق ق} \\ \to -\frac{2}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

* جواب معادله $\underbrace{\log_{\cos x}^{\sin x}}_{a} + \underbrace{\log_{\sin x}^{\cos x}}_{\frac{1}{a}} = 2$ کدام است.

1) $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

2) $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$

3) $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ✓

4) $x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$

$$a+\frac{1}{a}=2 \longrightarrow \frac{a^2+1}{a}=2$$

$$\Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a=1$$

$$a=\log_{\cos x}^{\sin x}=1 \Rightarrow \cos x^1 = \sin x \ \frac{\text{طرفین تقسیم بر}}{\cos x}$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

نامعادله لگاریتمی

*

سوال: مجموعه ی نامعادله ی $\log \frac{x+3}{5} < (-1)$ کدام است.
$\log 0/1$

$\log \frac{x+3}{5} < \log 0/1$

مبنا $a > 1 \longrightarrow \frac{x+3}{5} < \frac{1}{10} \Rightarrow x+3 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$ (1)

(2)

$\frac{x+3}{5} > 0 \longrightarrow x > -3$

اشتراک $\Rightarrow -3 < x < -\frac{5}{2}$

جواب نامعادله مان میشه

مثال: اگر $\log 3 = 0/4771$ باشد عدد 9^{500} چند رقمی است.

$\log 9^{500} = \log 3^{1000} = 1000 \log 3 = 1000 \times 0/4771 = 477/1$

جواب $= [477/1] + 1 = 477 + 1 = 478$
رقمی

نکته: if $A > 1 \longrightarrow [\log A] = 1 -$ تعداد ارقام A

if $0 < A < 1 \longrightarrow [\log A] = -($ تعداد صفر بعد از ممیز $) - 1$

مثال: $[\log 523] = 3 - 1 = 2$

$[\log 0/0009] = -3 - 1 = -4$

جزء صحیح لگاریتم در پایه ی غیر از 10 $[\log_a x]$

مثال. $[\log_5 234] = 5^3 < 234 < 5^4$ $\frac{\text{از عدد در مبنا}}{\text{ن لگاریتم میگیریم}}$ $\log_5 5^3 < \log_5 234 < \log_5 5^4$

$\Rightarrow 3 < \log_5 234 < 4$

$[\log_5 234] = 3$

جواب

$\star \ [\log_{۶} ۲] + [\log_{۲} ۶] = ? \quad ۲ + ۰ = ۲$

$۶^{۰} < ۲ < ۶^{۱} \longrightarrow ۰ < \log_{۶} ۲ < \log_{۶} ۶ \Rightarrow [\log_{۶} ۲] = ۰$

$[\log_{۲} ۶] \Rightarrow ۲^{۲} < ۶ < ۲^{۳} \longrightarrow \log_{۲} ۲^{۲} < \log_{۲} ۶ < \log_{۲} ۲^{۳} \Rightarrow [\log_{۲} ۶] = ۲$

$\star \ [\log_{\frac{۱}{۵}} ۲۳۴] = ? \quad \log_{\frac{۱}{۵}} ۲۳۴ = -\log_{۵} ۲۳۴$

$۳ < \log_{۵} ۲۳۴ < ۴ \xrightarrow{\times(-۱)} -۴ < -\log_{۵} ۲۳۴ < -۳ \Rightarrow [\log_{\frac{۱}{۵}} ۲۳۴] = -۴$