به نام خدا

Subject

Date

ترکیبیات | ترکیبیات با اتصال !!!

حالات ممکن برای تولید k فرزند و پرتاب k سکه برابر 2^k است، حالات ممکن برای پرتاب k تاس برابر 6^k است.

هرگاه در مسائل ترکیبیات، شرط داشتیم، ابتدا خانه های شرط دار را تعیین تکلیف می کنیم و سپس سراغ بقیه خانه ها می رویم.

نکات فاکتوریل:

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 2\times 1$

$0! = 1$ / $1! = 1$ /

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)!$ /

$n! = n\times(n-1)!$

پس هر جا که بخواهیم می توان فاکتوریل را قطع کرد به شرط آنکه در طول جمله آخر علامت ! گذاشت.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = n^2+n$$

اگر n کتاب و n دفتر را بخواهیم به طوری یکی در میان کنار هم قرار دهیم تعداد حالات ممکن برابر می شود با $2\times n!\times n!$

جابجایی اولی — جابجایی دومی — جابجایی نوعی

اگر n کتاب و n+1 دفتر را بخواهیم به طور یکی در میان کنار هم قرار دهیم تعداد حالات ممکن برابر است با: $(n+1)!\times n!$

چون همیشه گروه n+1 آخر و اول دسته هستند دیگر ۲ را نمی خواهیم.

اگر بخواهیم N شیء را که n_1 تای آنها مشابه و n_2 تای دیگر آنها مشابه و ... و n_k تای آنها مشابه هم باشند در کنار هم قرار دهیم به طوری که $n_1+n_2+\dots+n_k=N$ در این صورت تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\frac{N!}{n_1!\times n_2!\times\dots\times n_k!}$$

⊞ برای حل مسائل جایگشت با تکرار:

ابتدا فرض می‌کنیم n شیء متمایز هستند و جواب را بدست می‌آوریم و سپس جواب بدست آمده را به جایگشت عضوهای تکراری تقسیم می‌کنیم.

⊞ مثال ⊞ با اعداد ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت؟

چون تعداد جای خالی با تعداد اعداد برابر نیست نمی‌توان از جایگشت رفت. پس داریم:

① ۳ رقم ۳ باشد: ۳،۳،۳ , $n = \frac{3!}{3!} = 1$

② ۲ رقم ۳ باشد: ۳۳۱/۳۳۲ , $n = \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 6$

③ ۱ رقم ۳: ۳،۱،۲/۳،۲،۲ , $n = 3! + \frac{3!}{2!} = 9$

④ ۰ رقم ۳: ۲،۲،۱ / $n = \frac{3!}{2!} = 3$

$n_T = 3+9+6+1 = 19$

⊞ اصل دسته‌بندی: اگر بخواهیم در جایگشت‌های n شیء برخی از آنها همواره در کنار هم باشند ابتدا اشیاء مورد نظر را در یک دسته قرار داده و همگی آنها را یک شیء در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت‌های کل اشیاء و اشیاء داخل دسته را حساب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

⊞ جایگشت‌های دوری: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز در اطراف یک دایره به طوری که جهت دور اهمیت داشته باشد برابر $(n-1)!$ و تعداد این جایگشت‌ها وقتی که جهت دور اهمیت نداشته باشد برابر $\frac{(n-1)!}{2}$ می‌باشد.

⊞ انتخاب r شیء از میان n شیء ⊞

① جایگشت r شیء از میان n شیء:

ترتیب انتخاب مهم است و آنرا با $(n)_r$ یا $P(n,r)$ نمایش داده و فرمول زیر را داریم:

$$P(n,r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Subject
Date

۲) ترکیب r شئ از میان n شئ:

در این حالت ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست و ما آن را به صورت $\binom{n}{r}$ یا $C(n,r)$ نمایش می‌دهیم و فرمول زیر را داریم:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

+ اصل زندگی + یک اصل من در آوردی ولی کاربردی. هرگاه بخواهیم از بین n نفر r نفر را انتخاب کنیم به طوری که k نفر از این r نفر باید انتخاب شوند به جای $\binom{n}{r}$ باید $\binom{n-k}{r-k}$ را انجام دهیم. در مقابل مثال می‌نویسیم:

مثال: به چند طریق می‌توان از میان یک کلاس ۲۰ نفره، ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که: (این کلاس شامل افراد a تا e است)

الف) شامل اشخاص a و b باشد:

$$\binom{20-2}{5-2}=\binom{18}{3}$$

ب) شامل اشخاص c و d و e نباشد:

$$\binom{20-3}{5}=\binom{17}{5}$$

پ) شامل اشخاص a و b باشد ولی شامل اشخاص c، d و e نباشد:

$$\binom{20-5}{5-2}=\binom{15}{3}$$

+ روابط مهم ترکیب:

① $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$

② $\binom{n}{3}=\binom{n}{n-3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

+ با توجه به فرمول ۱ و ۲ اگر دو ترکیب که قسمت بالای آن‌ها با هم برابر بود، با هم مساوی بودند، مجموع قسمت‌های پایین ترکیب باید با قسمت بالای آن برابر باشد.

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{r}\Rightarrow\boxed{k+r=n}$$

Subject
Date

③ $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

④ $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

⑤ $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

⑥ $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

+ تعداد زیرمجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{r}$

+ تعداد کل زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

+ تمام زیرمجموعه های یک مجموعه به جز خود آن مجموعه زیرمجموعه های محض آن مجموعه است:

زیرمجموعه های محض $= 2^n - 1$

* از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی n^m تابع می‌توان تعریف کرد.

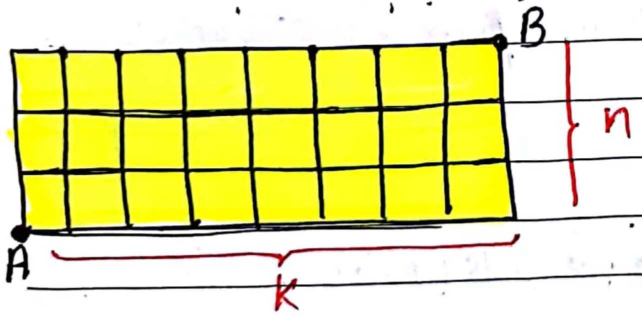
+ اگر یک صفحه شطرنجی مستطیلی $n\times m$ داشته باشیم، تعداد مستطیل هایی که در آن قابل شمارش است برابر است با:

$$P=\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$$

+ اگر یک صفحه شطرنجی مربعی $n\times n$ داشته باشیم تعداد مربع هایی که در آن قابل شمارش است برابر است با:

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

+ تعداد مسیر های شمرده در شکل زیر برای رفتن از A به B برابر است با:



$$P=\frac{(n+k)!}{n!\times k!}$$

Subject
Date

+ اگر گفته شود یک عدد بر ۲۵ بخش‌پذیر است دو رقم سمت راست آن باید ۰۰ / ۲۵ / ۵۰ / ۷۵ / باشد.

+ برای محاسبه‌ی تعداد k ضلعی‌هایی که با n نقطه واقع بر روی یک دایره می‌توان ساخت از فرمول $\binom{n}{k}$ استفاده می‌شود.

* یک نکته از مشتق *

+ در تابع $y=ax^2+bx+c$، آهنگ متوسط تابع در بازه‌ی زمانی $[\alpha,\beta]$، با آهنگ لحظه‌ای این تابع در وسط این بازه برابر است. α و β دو عدد دلخواه

Mohammad Rahimi انتا!

+ یک تست یک راه‌حل عالی تمرین +

تجربی خارج ۹۲: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی system به طوری که s ها کنار هم نباشند؟

/ ۱۲۰ / ۱۸۰ / ۲۴۰ / ۳۶۰ /

این رابطه قبل تقسیم به صورت زیر هست:

ابتدا جایگشت ytem را حساب می‌کنیم ⟸ $4!$

سپس می‌خواهیم $\boxed{SS}$ را لابلای آن قرار دهیم یعنی:

. y . t . e . m .

$\boxed{SS}$

پس برای قرار دادن ۲ تا s در این ۵ خانه داریم: $\binom{5}{2}=10$ پس تعداد حالات کل برابر است با: $4!\times 10=24\times 10=\boxed{240}$

تجربی ۹۲: از هر یک از مدارس A، B، C، D و E، ۴ نفر به اردوی علمی دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که ۲ به ۲ غیرهم‌مدرسه‌ای باشند، انتخاب کرد؟

① ۱۶۰ ② ۳۲۰ ③ ۴۸۰ ④ ۶۴۰

ابتدا ۳ مدرسه، از ۵ مدرسه انتخاب می‌کنیم و سپس از هر مدرسه یک نفر انتخاب می‌کنیم و طبق اصل ضرب:

$n(S)=\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}=4^3\times 10=\boxed{640}$

به نام خدا

Subject

Date

اصول

+ به هر کدام از فضای نمونه ای یک برآمد گویند.

مثلا پرتاب یک تاس، ۶ برآمد دارد.

$n(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

+ هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می نامیم. مثلا تعداد پیشامد های کلی در یک آزمایش برابر است با تعداد زیر مجموعه های فضای نمونه ای

یا $2^{n(S)}$ یا $2^{(\text{برآمد})}$ ← البته برای مسئله ی فرزندان

+ انداختن n تاس با انداختن یک تاس برای n بار یکسان است همین طور برای سکه.

+ برداشتن n مهره به طور همزمان از کیسه ای با برداشتن n مهره به طوری که بدون جایگذاری یکسان است.

+ قانون دمرگان:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

+ $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$

+ $A - B = A \cap B'$

+ پیشامد این که از A و B دقیقا یکی رخ دهد یعنی یا A رخ دهد و B رخ ندهد $(A-B)$ یا B رخ دهد و A رخ ندهد $(B-A)$ و داریم:

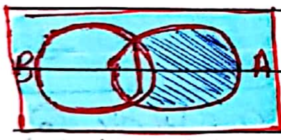
$n(A-B) + n(B-A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

+ اگر مهره ای از ظرفی انتخاب کنیم و بدون نگاه به رنگش آن را کنار بگذاریم و دوباره مهره ای برداریم مثل آن است که مهره ای بر نداشته ایم!

+ اعمال روی پیشامد ها +

مهم ها را می نویسم.

① تفاضل دو پیشامد $(A-B)$: پیشامد اینکه

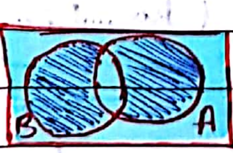


A رخ بدهد ولی B رخ ندهد.

- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A-B) = P(A \cup B) - P(B)$

② پیشامد اینکه دقیقا یکی از A یا B رخ دهد:

- $P = P(A-B) + P(B-A)$
- $P = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

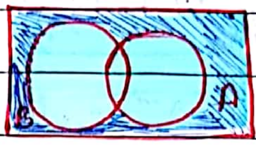


- $P = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Subject
Date

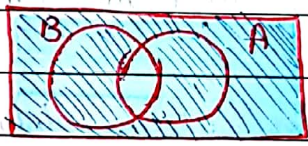
③ پیشامد آنکه نه A رخ دهد و نه B:

$P(A'\cap B') = P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B)$



④ پیشامد آنکه از A و B حداکثر یکی رخ دهد:

$P(A'\cup B') = P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B)$



* یک سوال مهم *: یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آنکه حداقل یکبار رو ظاهر شود بیش از 95% باشد؟

$P(\text{حداقل یکبار رو}) = 1 - P(\text{همه پشت})$

$P(\text{همه پشت}) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{95}{100} \Rightarrow$

$\frac{1}{2^n} < \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{2^n > 20}$

$\boxed{n \geq 5}$

⑤ تعداد حالتهای k تایی از n با تعداد حالتهای n-k تایی از n برابر است.

+ اگر در مورد دو پیشامد A و B بدانیم که $P(A)+P(B) > 1$ آنگاه A و B همواره سازگارند.

+ شرط مستقل بودن ۲ پیشامد این است که:

$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

+ اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، متمم آنها نیز مستقل است.

+ پیشامد تهی و فضای نمونه‌ای با هر پیشامد دیگری مستقل می‌باشند.

+ اگر پیشامدی با خودش مستقل باشد، آنگاه یا همواره برابر تهی است یا برابر فضای نمونه‌ای.

+ اگر A و B مستقل و ناسازگار باشند، در این حالت حتماً یکی از دو پیشامد غیر ممکن (تهی) خواهد بود.

+ اگر دو پیشامد غیر تهی ناسازگار باشند هیچ گاه مستقل از هم نخواهند بود.