بسمه تعالی

جزوه ریاضی نهم

فصل اول تا هشتم

فصل ۱

فصل اول : مجموعه ها

نکته : اعضای هر مجموعه را با (و) یا ویرگول از هم جدا می کنند.

مثال : مجموعه ی $A=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ چند عضو دارد؟

این مجموعه سه عضو دارد . $\{\{a\}\}$, $a,\{a\}$ سه عضو این مجموعه هستند.

نکته : جمله ای که اعضای یک مجموعه را مشخص می کند باید کاملا واضح باشد.

مثال : کدام یک از دسته های زیر یک مجموعه را مشخص می کند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱۰۰۰ ب) اعداد خیلی بزرگ

پ) چهار عدد فرد متوالی شروع از ۲ ت) مقسوم علیه های عدد ۳۰

جواب : هر یک از گزینه های بالا اعضای مشخصی دارند به جز گزینه ی ب که اعضای آن کاملا مشخص نیستند.

عضویت : اگر x عضو مجموعه ی A باشد می نویسیم $x\in A$ در این صورت باید x عینا در مجموعه ی A دیده شود . و اگر x عضو A نباشد می نویسیم $x\notin A$

مثال : در مجموعه $A=\{۲,\{۲\},\{۳,۵\}\}$ کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟

الف) $۲\in A$ ب) $\{۲\}\in A$ پ) $\{\{۲\}\}\in A$ ت) $\{۲,\{۲\},\{۳,۵\}\}\in A$

گزینه ی الف و ب درست است گزینه ی پ درست نیست چون $\{\{۲\}\}$ عضو مجموعه نیست $\{۲\}$ عضو مجموعه A است . و گزینه ی ت خود مجموعه A به طور کامل است و غلط است.

مجموعه ی تهی : مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نام دارد. و با علامت $\emptyset$ نمایش داده می شود.

مثال : آیا دو مجموعه ی $\emptyset$ و $\{\emptyset\}$ با هم برابرند؟ چرا؟

جواب : مجموعه ی $\{\emptyset\}$ یک مجموعه ی تک عضوی است که تنها عضو آن $\emptyset$ است پس دو مجموعه بالا با هم مساوی نیستند.

زیرمجموعه : مجموعه ی B را زیر مجموعه ی مجموعه ی A می نامیم هرگاه هر عضو مجموعه ی B در مجموعه A باشد و با $B\subset A$ نشان می دهیم و اگر عضوی در مجموعه ی B باشد که در A نباشد می نویسیم $B\not\subset A$

مثال : در مورد مجموعه ی $A=\{a,\{b\},\{c,d\}\}$ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{a\}\subseteq A$ ب) $\{a,b\}\subseteq A$ پ) $\{\{b\}\}\subseteq A$

گزینه ی الف درست است گزینه ی ب درست نیست چون b عضو A نیست و گزینه ی پ درست است.

نکته : همه ی زیر مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه ی مجموعه ای به نام مجموعه ی مرجع هستند. (M,U)

نکته : برای تشخیص علامت $\in$ یا $\subseteq$ در جای خالی باید به { } دقت کنیم . در صورتی که این علامت همراه عضو باشد از علامت $\subseteq$ استفاده می کنیم در غیر این صورت از علامت $\in$ استفاده می شود

مثال : با توجه به $A = \{a, \{b\}, \{۱\}\}$ جاهای خالی را پر کنید.

$\{b\} \dots A \quad , \{a\} \dots A$

پاسخ : در سمت راست علامت $\subseteq$ و در سمت چپ علامت $\in$ را قرار می دهیم.

زیر مجموعه های محض : همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه به غیر از خودش را زیر مجموعه های محض می گویند.

نکته : اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد آن گاه $A \subseteq C$ خواهد بود.

نکته : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : ۲^n

نکته : تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $۲^n - ۱$

مثال : یک مجموعه ی ۱۰ عضوی چند زیر مجموعه دارد؟

حل : $۲^n \to ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

مثال : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه برابر $۴^{۳n-۱}$ است . این مجموعه چند عضو دارد؟

حل : $۴^{۳n-۱} = ۲^{۶n-۲}$ پس تعداد اعضای این مجموعه برابر است با ۶n-۲

نکته : برای سهولت در محاسبات حاصل ضرب اعداد ۱ تا n را با نماد n! نمایش می دهند.

نکته : تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال : مجموعه ی $k = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند مجموعه ی حداقل ۳ عضوی دارد؟

حل : $\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!} + \frac{۶!}{۴!(۶-۴)!} + \frac{۶!}{۵!(۶-۵)!} + \frac{۶!}{۶!(۶-۶)!} = ۴۲$

نتیجه :تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی حاوی k عضو معین برابر است با : $\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$

نتیجه :تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی فاقد k عضو معین برابر است با : $\frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!}$

نکته : تعداد زیر مجموعه های حاوی یا فاقد k عضو از یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : ۲^{n-k}

نکته : تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی و زوج عضوی یک مجموعه برابر است با : $۲^{n-۱}$

مثال: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی x+۵ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه x+۳ عضوی است؟

حل : $۲^{x+۵} \div ۲^{x+۳} = ۲^۲ = ۴$

نکته : $(A \subseteq B, B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$

نکته : اگر $A\subseteq\emptyset$ باشد آن گاه $A=\emptyset$ و اگر $U\subseteq A$ باشد $A=U$

نکته : مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه ی توانی آن می گویند.

نحوه ی نمایش مجموعه ها :

۱-توصیفی

۲- بیان ریاضی : در این روش با پیدا کردن یک ویژگی مشترک و نشان دادن آن ویژگی با علائم ریاضی مجموعه را بیان می کنیم.

مثال : اعداد طبیعی زوج $E = \{2k | k \in N\}$

اعداد طبیعی فرد $O = \{2k - 1 | k \in N\}$

فرمول کلی نوشتن مجموعه {محدوده اعضا و عضویت در مجموعه | جمله عمومی}

فرمول جمله ی عمومی در سری های منظم : جمله ی عمومی = جمله ی اول + فاصله × (n-۱)

نکته : تعداد عددهای یک سری منظم از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\text{تعداد عدد های یک سری منظم} = \left(\frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله دو جمله}}\right) + \text{یک}$$

مثال : اگر n عدد طبیعی باشد ۲<n≤۳۰ $A = \{x | x = 3n + 1, x < 70\}$ چند عضو دارد؟

حل : $x < 70 \Rightarrow 3n + 1 < 70 \Rightarrow n < 23 \Rightarrow 2 < n < 23 \Rightarrow \text{تعداد} = 22 - 3 + 1 = 20$

تعمیم اجتماع و اشتراک

N مجموعه ی دلخواه $A_1, A_2, \dots, A_n$ را در نظر بگیرید:

اجتماع این مجموعه ها برابر است با : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

اشتراک این مجموعه ها برابر است با : $\bigcap_{i-1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

مثال : اگر $A = \{m \in Z | m \geq n, 2^m \leq n\}$ آن گاه مجموعه ی $A_4 \cap A_3$ چند زیر مجموعه دارد؟

دومجموعه ی جدا از هم : دو مجموعه را جدا از هم می گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. $A \cap B = \emptyset$

خواص اصلی اجتماع و اشتراک:

$$1 - \begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A \end{cases}$$

$$2 - \left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq D \cup B \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$$

۳ − $\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ A\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\subseteq B\cap C$

۴ − $\left.\begin{matrix}A\subseteq C\\ B\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq C$

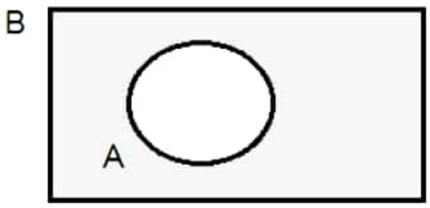
۵ − $A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cap B=A\\ A\cup B=B\end{cases}$

۶ − $\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$ توزیع پذیری

۷ − $\begin{cases}A\cup(A\cap B)=A\\ A\cap(A\cup B)=A\end{cases}$ قوانین جذب

متمم مجموعه : اگر A زیر مجموعه ی مجموعه ی B باشد متمم مجموعه ی A نسبت به B برابر است با $B\text{-}A$

$$A'=B-A=\{x\in B|\ x\notin A\}$$



روش شماره گذاری برای جبر مجموعه ها :

قضیه : هر گاه اجتماع چند مجموعه با اجتماع چند مجموعه ی دیگر برابر باشد و این مجموعه ها دو به دو جدا از هم باشند. آن گاه هر مجموعه که در یک طرف تساوی وجود داشته باشد ولی در طرف دیگر نباشد برابر با مجموعه ی تهی خواهد بود.

مثلا اگر $A\cup B=A\cup C$ آن گاه $B=C=\emptyset$

با استفاده از قضیه ی فوق هر گاه یک تساوی از مجموعه ها داشته باشیم می توانیم به روش زیر عمل کنیم.

۱- هر دو طرف تساوی را به صورت اجتماع مجموعه های جدا از هم می نویسیم.
۲- مجموعه های مساوی را از طرفین حذف می کنیم.
۳- مجموعه های باقیمانده را مساوی تهی قرار می دهیم و رابطه را محاسبه می کنیم.

در روش شماره گذاری ابتدا به هر مجموعه شکل دلخواهی نسبت می دهیم سپس به هر یک از مجموعه ها ی از هم جدا عددی را می دهیم و بوسیله ی این اعداد رابطه ی موجود را بازنویسی می کنیم و سپس مانند بالا عمل می کنیم.

مثال : اگر $A\cup B=A-B$ باشد آن گاه کدام گزینه درست است؟

الف) $B=\emptyset$ ب) $A=M$ پ) $A=\emptyset$ ت) $B=M$

$A\cup B=A-B\Rightarrow A\cup B=A\cup B'\Rightarrow B=B'=\emptyset$ پس گزینه ی اول درست است.

عدد اصلی یک مجموعه

تعداد اعضای یک مجموعه ی متناهی مانند A را عدد اصلی و با $n(A)$ نمایش می دهند.

مجموعه های متناهی و نامتناهی : اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد مجموعه را متناهی و اگر تعداد اعضایش محدود نبود نامتناهی می نامند.

ویژگی های مهم عدد اصلی:

الف) برای هر دو مجموعه ی متناهی :
$$\begin{cases} n(A-B)=n(A)-n(A\cap B) \\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \end{cases}$$

ب) برای هر سه مجموعه ی متناهی :

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

انواع حالت های پیشامد

۱- A رخ دهد و B رخ ندهد. $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

۲- A و B رخ دهد ولی C رخ ندهد. $n\big((A\cap B)-C\big)=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

۳-Aرخ دهد ولی B وCهم زمان رخ ندهند: $n(A)-n(A\cap B\cap C)$

۴-A رخ دهد ولی B رخ ندهد و C رخ ندهد.

$$n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$$

۵-فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد. $n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$

مثال : تعداد ارقام دو رقمی که بر ۷ بخش پذیرند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند چقدر است؟

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=\left[\left(\frac{۹۹}{۷}-\frac{۹}{۷}\right)\right]-\left[\left(\frac{۹۹}{۷۷}-\frac{۹}{۷}\right)\right]=(۱۴-۱)-(۱-۰)=۱۲$$

در مثال بالا برای پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ باید خارج قسمت صحیح تقسیم عدد ۹۹ بر ۷ را بیابیم.

اصل ضرب : هر گاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و جزء دوم به n طریق مختلف انجام شود آنگاه آن عمل به $m\times n$ طریق مختلف انجام می شود.

مثال : چند عدد چهار رقمی می توان ساخت که از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ تشکیل شده باشد و بر ۵ بخش پذیر باشد.

حل تعداد هر رقم برای هر جایگاه

۵	۶	۶	۲

تعداد برابر است با : $۵\times۶\times۶\times۲=۳۶۰$

نکته : قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم از رابطه ی $n!$ به دست می آید.

مثال : با ارقام ۱ و ۹ و ۳ و ۷ و ۵ چند عدد ۵ رقمی با ارقام مختلف می توان نوشت؟

حل تعداد ارقام برای هر جایگاه

۵	۴	۳	۲	۱

تعداد برابر است با : $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$