فصل ۳

فصل سوم : اثبات و استدلال در هندسه

اصول اقلیدسی

۱- از یک نقطه بینهایت خط راست می گذرد.
۲- بر هر دو نقطه ی متمایز فقط یک خط راست می گذرد.
۳- از یک نقطه و شعاع معین فقط یک دایره می توان رسم کرد.
۴- از هر نقطه خارج یک خط فقط می توان یک خط با آن موازی رسم کرد.
۵- از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط می توان بر آن عمود کرد.

قضیه : اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد ضلع روبه رو از زاویه ی بزرگ تر بزرگ تر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر .

نکته : وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر اعضای مجموعه نیز باشد می توان درستی نتیجه ی بدست آمده را به همه ی اعضای آن مجموعه تعمیم داد.

برخی از نکات و تعاریف مهم هندسه

۱- حالت های عمومی هم نهشتی مثلث ها

الف) برابری دو ضلع و زاویه ی بین آن ها

ب)برابری دو زاویه و ضلع بین آن ها

پ) برابری سه ضلع

۲- هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

۳- ویژگی نیمساز : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه در نظر بگیریم از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۴-دو زاویه که مجموع آن ها ۹۰ درجه باشد متمم و دو زاویه که مجموع آن ها ۱۸۰ درجه باشد مکمل اند.

۵- دو زاویه ی متقابل به راس با هم برابرند.

۶-اگر دو زاویه برابر باشند متمم ها و مکمل های آن ها نیز با هم برابرند.

۷-دو خط در صفحه سه وضعیت دارند : متقاطع – منطبق و موازی

۸-اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود یا موازی باشد بر دومی نیز عمود یا موازی است

۹-اگر خطی دو خط موازی را قطع کند روی آن ها ۸ زاویه درست می شود که زوایای کوچک با هم و زوایای بزرگ با هم برابرند.

۱۰-مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.

۱۱-حالت های هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه

الف) برابری وتر و یک زاویه تند

ب) برابری وتر و یک ضلع

۱۲- در هر مثلث هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن برابر است.

۱۳- مجموع زوایای خارجی در هر مثلث برابر ۳۶۰ درجه است.

۱۴- میانه مثلث : پاره خطی است که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابل رسم شود.

۱۵-ارتفاع مثلث : پاره خطی است که از یک راس مثلث به ضلع مقابل عمود باشد.

۱۶-عمود منصف مثلث : خطی است که بر یک ضلع مثلث عمود بوده و آن را نصف می کند.

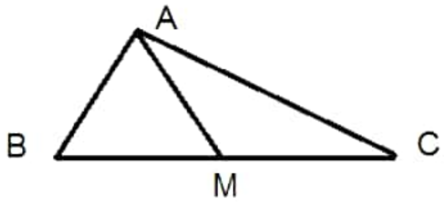
۱۷- هر میانه مثلث مساحت آن را نصف می کند.

۱۸- سه میانه مثلث از یک نقطه می گذرند و در آن نقطه یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می کنند.

۱۹- سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تبدیل می کنند.

۲۰- میانه ی وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است.

۲۱- در مثلث ABC اگر AM میانه باشد داریم :



$$AB^{۲} + AC^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{BC^{۲}}{۲}$$

۲۲- در هر مثلث هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور به آن کوچک تر است.

۲۳- در هر مثلث هر میانه از مجموع دو میانه ی دیگر کوچک تر است پس می توانند یک مثلث تشکیل دهند که مساحتش $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث اولیه است.

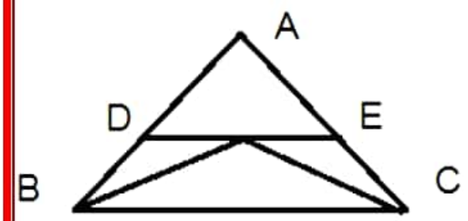
۲۴- نیمساز داخلی هر راس مثلث بر نیمساز زاویه ی خارجی همان راس عمود است.

۲۵- زاویه ی بین دو نیمساز داخلی زوایای B و C در مثلث ABC برابر است با $۹۰ - \frac{A}{۲}$

۲۶- زاویه ی بین دو نیمساز خارجی زوایای B و C در مثلث ABC برابر است با $۹۰ + \frac{A}{۲}$

۲۷- در هر مثلث زاویه ی بین نیمساز و ارتفاع هر راس برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل زاویه های دو راس دیگر

۲۸- هرگاه از نقطه ی تلاقی نیمسازهای داخلی دو راس خطی موازی با ضلع واقع بین آن دو رسم کنیم تا اضلاع دیگر را قطع کند رابطه ی زیر برقرار است:



DE=DB+EC

۲۹- در هر مثلث نسبت اندازه ی هر دو ضلع برابر است با نسبت عکس ارتفاع های نظیر آن دو ضلع

نکات مهم در مورد مثلث :

۱-در یک مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک تر و از تفاضل شان بزرگ تر است

۲-اگر a,b,c اضلاع مثلث باشند و $a \geq b \geq c$ باشد آن گاه داریم :

ثلث محیط ≤ کوچک ترین ضلع مثلث > ۰ نصف محیط > بزرگ ترین ضلع ≤ ثلث محیط

۳-پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل می کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

این پاره خط ارتفاع و میانه و نیمساز نظیر راس مقابل را نیز نصف می کند.

۴-با وصل کردن اوساط اضلاع هر مثلث به هم مثلث به چهار مثلث هم نهشت تقسیم می شود.

۵-اگر P نصف محیط مثلث باشد . مساحت مثلث از رابطه ی $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ بدست می آید.

۶-مساحت مثلث متساوی الساقین با قاعده ی a و ساق b برابر است با : $\frac{۱}{۲}a\sqrt{b^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}}$

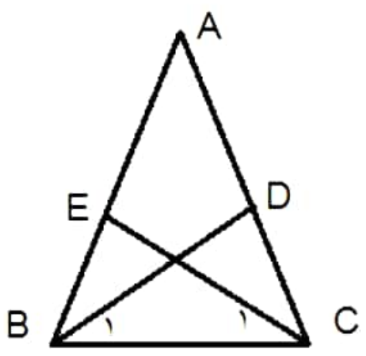
۷-در هر مثلث قائم الزاویه زاویه ی بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه ی تند

ویژگی های اجزای فرعی مثلث

الف) در مثلث متساوی الساقین نیمساز میانه و ارتفاع نظیر راس مثلث بر هم منطبق هستند.

ب) اگر در مثلثی دو تا از ارتفاع میانه یا نیمساز نظیر یک راس بر هم منطبق باشند مثلث متساوی الساقین است.

ب) در مثلث متساوی الاضلاع میانه ارتفاع و نیمساز متناظر به هر راس بر هم منطبق اند. همچنین در هر سه راس این سه پاره خط با هم مساوی اند.



مثال : ثابت کنید نیمسازهای داخلی مقابل به ساق ها ی هر مثلث متساوی الساقین برابرند.

حل: در مثلث متساوی الساقین ABC نیمسازهای دو زاویه ی B و C را رسم می کنیم.

می خواهیم ثابت کنیم BD=CE . چون BD و CE نیمساز ند. بنابراین :

$$\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}=\hat{C_۱}=\hat{B_۱}$$

$$\begin{cases}\widehat{C_۱}=\widehat{B_۱}\\ BC=BC\\ \hat{C}=\hat{B}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{BCD}=\overset{\Delta}{EBC} \rightarrow EC=BD$$

مثال: ثابت کنید میانه های نظیر به ساق های یک مثلث متساوی الساقین با هم برابرند.

پ) در مثلث متساوی الساقین نیمساز خارجی نظیر راس مثلث موازی با قاعده است و برعکس.

ت) ضلع روبه روی زاویه ی ۳۰ درجه در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است.

ث) میانه ی وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است.

ج) در مثلث قائم الزوایه زاویه ی بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر است با قدر مطلق تفاضل زاویه های حاده

قضیه : در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند وتر های نظیر آن ها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند کمان های نظیر آن ها با هم برابرند.

شکل های متشابه:

تعریف : هر گاه در دو چند ضلعی همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند و اندازه ی زاویه ها تغییر نکرده باشد آن دو چند ضلعی با هم متشابهند.

دو شکل وقتی متشابهند که سه ویژگی داشته باشند: الف) تعداد ضلع هایشان برابر باشند. ب) اندازه ی ضلع هایشان متناسب باشد. پ) اندازه ی زاویه هایشان برابر باشد.

نکته : به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه نسبت تشابه می گویند.

نکته : هر دو مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابهند.

نکته : هر دو مربع با هم متشابهند.

نکته : در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع ها و نیمساز ها و میانه ها و عمود منصف ها با نسبت تشابه برابر است.

نکته : نسبت محیط در هر دو شکل متشابه با نسبت تشابه برابر است.

نکته : نسبت مساحت دو شکل متشابه با مجذور نسبت تشابه برابر است.